SIRA SİZDE 1

1) Verilen noktaların verilen denklemlerin grafiği üzerinde olup olmadıklarını belirleyiniz.

	Noktalar	**Denklem**
a)	A (3, 2) , B (8, 3)	$y = \sqrt{x+1}$
b)	A (0, 2) , B (1, 5)	$y = x^2 + 3x + 2$
c)	A (0, 0) , B (1, 5)	$y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

2) Verilen denklemlerin grafiklerinin, varsa koordinat eksenlerini kestiği noktaları belirleyiniz.

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x^2 + x - 2$

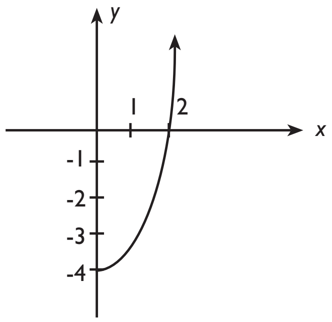
c) $y = (x - 3)(x + 1)$

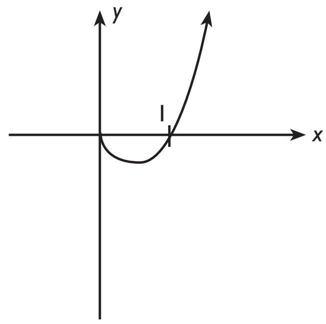
d) $x^2y - x^2 + 2y = 0$

e) $x = 4 - y^2$

3) Verilen simetrikliği kullanarak grafiği tamamlayınız.

a) $y = x^2 - 4$ (y- ekseni) **b)** $y = x^3 - x$ (orijin)

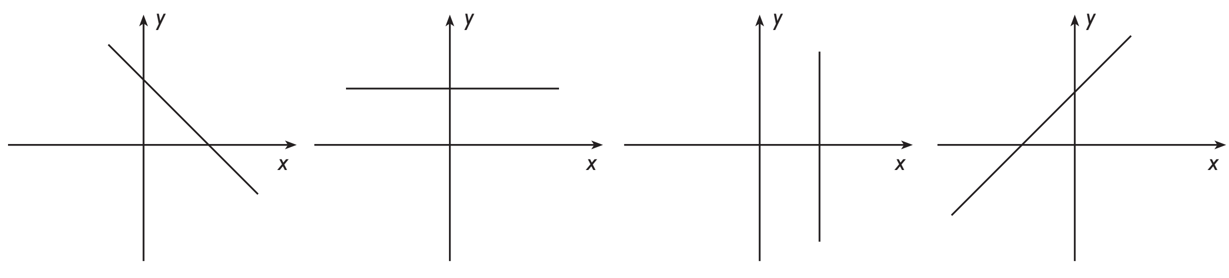




DOĞRU

Bu kesimde orta öğrenim yıllarında geometrik ve analitik olarak incelemiş olduğumuz doğru denklemlerini ve grafiklerini hatırlatacağız.

Geometrik olarak düzlemde düz bir çizgiye doğru denildiğini biliyoruz.



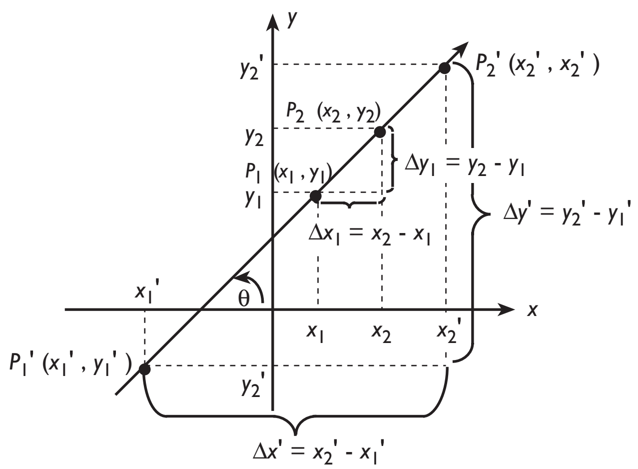
Şekil 3.8

Şimdi doğrunun analitik olarak elde edilişini hatırlatalım.

Doğrunun Eğimi

x - eksenini kesen bir doğrunun eğim açısı doğrunun x - eksenini kestiği nokta civarında saatin dönme yönünün ters yönünde ölçülen açıdır. x - eksenine paralel olan bir doğru için bu açı 0° dır.

Bir doğru üzerindeki herhangi iki noktanın ordinatları arasındaki farkın apsisleri arasındaki farka oranı sabittir. Bu sabit orana **doğrunun eğimi** denir ve ***m*** ile gösterilir.



Şekil 3.9

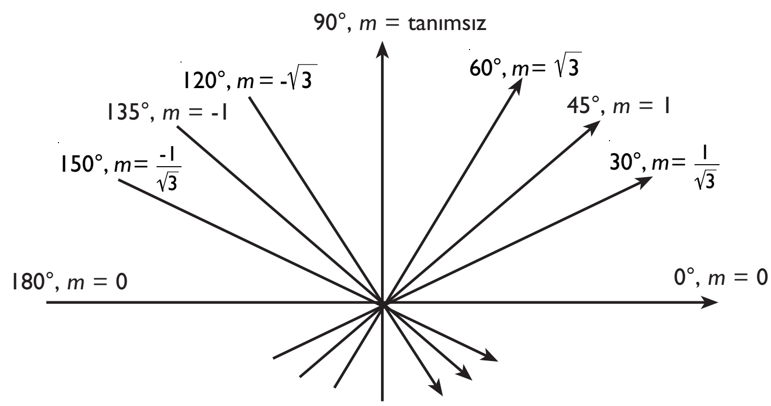
x - eksenine dik olan bir doğru için x - ekseni yönünde değişim söz konusu olmadığından $\Delta x = 0$ dır ve m tanımsızdır.

$$m = \frac{\text{Grafikteki yükselme}}{x\text{- ek. üzerindeki hareket}} = \frac{\text{düşey değişim}}{\text{yatay değişim}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

$$= \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \text{Tan } \theta$$

Bir doğrunun eğimi, doğrunun üzerindeki herhangi iki nokta ile belirlenir ve eğim nokta çiftlerinin seçiminden bağımsızdır.



Şekil 3.10

Doğru Denklemleri

Bir denklem, bir doğru üzerindeki tüm noktaları ve sadece bu noktaları sağlıyorsa, denkleme bu **doğrunun denklemi** denir.

Verilen bir doğrunun denklemini bulmak için üzerindeki iki noktanın koordinatlarını veya üzerindeki bir noktayı ve eğimini bilmemiz yeterlidir.

İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

Bir doğru üzerindeki iki nokta $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ olsun. Doğru üzerinde hareket eden bir $P(x, y)$ noktası alalım. Bu doğrunun eğimi değişmeyeceğinden

$m_{\overline{PP_1}}$, $\overline{PP_1}$ doğru parçasının eğimini göstermek üzere

$m = m_{\overline{PP_1}} = m_{\overline{P_1P_2}}$ dir. Buradan

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

bulunur. Böylece P_1, P_2 noktalarından geçen doğru denklemi

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

olur.

- *Özel olarak bu noktalar doğrunun x- ve y- eksenlerini kestiği noktalar olarak alınırsa denklem*

$P_1(x_1, y_1) = P_1(p, 0)$, $P_2(x_2, y_2) = P_2(0, q)$ ise

$$\frac{y-0}{q-0} = \frac{x-p}{0-p} \Rightarrow \frac{y}{q} = -\frac{x}{p} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

bulunur. Burada

$$\frac{x}{\text{grafiğin } x\text{-eksenini kestiği noktanın } x \text{ koordinatı}} + \frac{y}{\text{grafiğin } y\text{-eksenini kestiği noktanın } y \text{ koordinatı}} = 1$$

olduğundan, $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ denklemine ***eksenlerden ayırdığı parçalara göre doğru denklemi*** *denir.*

Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

Bir doğru üzerindeki bir nokta $P_1(x_1, y_1)$ ve eğimi m olsun. Doğru üzerinde hareketli bir $P(x, y)$ noktası alalım. Yine eğimi kullanacağız. $m_{\overline{P_1P}}$, $\overline{P_1P}$ parçasının eğimini göstermek üzere

$m = m_{\overline{P_1P}}$ dir. Böylece

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

olduğundan, bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemi

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

olur.

Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminde $P_1(x_1, y_1)$ noktası doğrunun y- eksenini kestiği nokta olarak alınırsa, yani $P_1(x_1, y_1) = P_1(0, b)$ alınırsa,

$$y - b = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + b$$

bulunur. Burada m doğrunun eğimi ve b grafiğin y- eksenini kestiği nokta olduğundan bu denkleme doğrunun **eğim - kesim denklemi** denir.

Yukarıdaki dört durumda da denklem x ve y bilinmeyenlerine göre düzenlenirse

$$Ax + By + C = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denkleme de doğrunun genel denklemi denir.

ÖRNEK 5

Verilenlere göre doğru denklemlerini belirleyiniz.

a) $P_1(-2, -1)$, $P_2(3, 4)$ **b)** $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 5)$

c) $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 3)$ **d)** $m = -1$, $P_1(3, 1)$

ÇÖZÜM

a) $\dfrac{y - (-1)}{4 - (-1)} = \dfrac{x - (-2)}{3 - (-2)} \Leftrightarrow \dfrac{y + 1}{5} = \dfrac{x + 2}{5}$

$\Leftrightarrow y + 1 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$ olur.

b) $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 5)$ noktalarından birincisi x- ekseni, ikincisi y- ekseni üzerinde olduğundan grafiğin eksenleri kestiği noktalardır. Eksen parçalarına göre doğru denklemi kullanılırsa

$$\frac{x}{\text{grafiğin } x\text{- eksenini kestiği noktanın } x \text{ koordinatı}} + \frac{y}{\text{grafiğin } y\text{- eksenini kestiği noktanın } y \text{ koordinatı}} = 1,$$

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{5} = 1 - \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow y = 5\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$ olur.

c) $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 3)$ noktalarından biri orijindir. $y = mx + b$ de bu noktalar yerine yazılırsa

$P_1(0, 0)$ $0 = m\ 0 + b \Rightarrow b = 0$

$P_2(1, 3)$ $3 = m(1) + 0 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

Böylece

$$y = mx + b = 3x + 0 = 3x$$

$y = 3x$ olur.

d) $m = -1,\ P_1\ (3, 1)$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \Leftrightarrow y - 1 = (-1)\,(x - 3)$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 4 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK 6

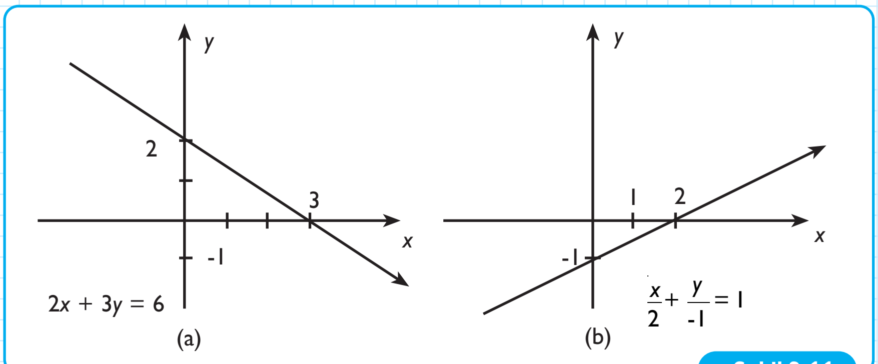
Verilen doğruların grafiklerini çiziniz.

a) $2x + 3y = 6$ **b)** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} = 1$

c) $y = -3$ **d)** $x = 2$

ÇÖZÜM

a) Grafiğin y- eksenini kestiği noktayı bulmak için $x = 0$ yazılır. $2.0 + 3.y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$ bulunur. Benzer şekilde grafiğin x- eksenini kestiği noktayı bulmak için ise $y = 0$ yazılır ve $2.x + 3.0 = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0)$ bulunur. (0, 2) ve (3, 0) noktalarını birleştiren doğru parçasını içine alan doğru istenen doğrudur (Şekil 3.11 (b)).



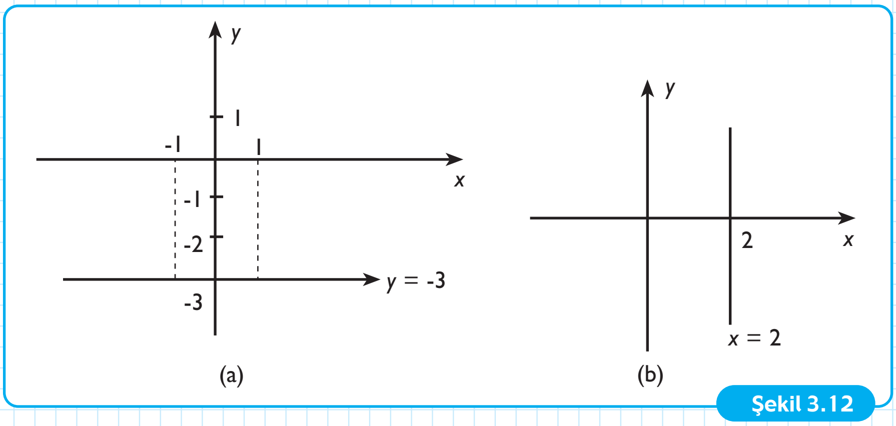
Şekil 3.11

b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} = 1$ de grafiğin x ve y- eksenlerini kestiği noktalar hazır bir biçimde verilmiştir (Şekil 3.11 (b)). Bunlar sırasıyla 2 ve -1 dir. Gerçekten

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{0}{-1} = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0}{2} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1) \quad \text{olur.}$$

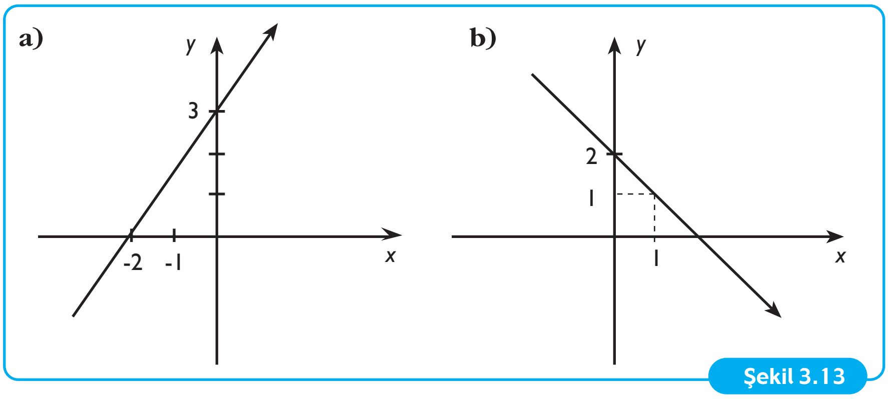
c) $y = -3$ denkleminde x değişkeni olmadığından x serbestçe değişiyor demektir, yani $(x, -3)$ tipindeki tüm noktalar bu doğru üzerindedir. Özel olarak (-1, -3) ve (1, -3) noktaları da bu doğru üzerindedir. Bu noktaları birleştiren doğru parçasını üzerinde bulunduran doğru istenen doğrudur. Ya da kısaca bu doğrunun eğimi sıfırdır. Dolayısıyla x- eksenine paraleldir. y- ekseni üzerinde -3 noktasından geçen x eksenine paralel doğru istenen doğru olur (Şekil 3.12 (a)).



Şekil 3.12

d) Aynı düşünceyle $x = 2$ doğrusunun grafiği yukarıdaki gibidir (Şekil 3.12 (b)).

ÖRNEK 7 ***Grafikleri verilen doğruların denklemlerini bulunuz.***



Şekil 3.13

ÇÖZÜM

Verilen doğruların denklemleri birkaç yolla bulunabilir. Aşağıda en kolay yolla bu denklemlerin elde edilişleri verilecektir.

a) Grafik x eksenini $(p, 0) = (-2, 0)$ ve y- eksenini $(0, q) = (0, 3)$ noktasında kestiğinden

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 2y - 3x - 6 = 0 \quad \text{olur.}$$

b) Grafik y- eksenini $(0, n) = (0, 2)$ noktasında kestiğinden, eğim-kesim denklemi kullanılırsa

$y = mx + n = mx + 2$ olur. Grafik üzerindeki diğer nokta kullanılırsa

$1 = m\,1 + 2 \Rightarrow m = -1$ bulunur. Böylece denklem

$y = mx + n = -x + 2$ olur.

ÖRNEK 8

Bir üretim firması yeni bir elektrikli süpürge üretmeyi düşünmektedir. Firmanın piyasa araştırma bölümü aşağıdaki fiyat-talep bilgilerini elde etmiştir.

Fiyat (milyon TL)	Tahmini Talep (kişi)
41	8 040
66	5 040
88	2 400
108	0

Fiyat ile talep arasında doğrusal bir bağıntı olduğunu görünüz ve (108, 0) için bağıntıyı kurunuz.

ÇÖZÜM

$m = \frac{0 - 2400}{108 - 88} = \frac{2400 - 5040}{88 - 66} = \frac{5040 - 8040}{66 - 41} = -120$ olduğundan q_d = Talep,

F = Fiyat denilirse, $m = \frac{q_d - 0}{F - 108}$ formülünden

$$q_d - 0 = -120\,(F - 108)$$
$$= -120\,F + 12\,960 \quad \text{veya} \quad q_d = 12\,960 - 120\,F \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 9

Ayakkabı üreten bir firmanın günlük sabit giderleri 165 000 000 TL. dir. Günlük 100 adet ayakkabı için 2 365 000 000 TL. harcama yapılmaktadır. Firmanın üretimi ile maliyeti arasında doğrusal bir bağıntının var olduğunu kabul edelim. Bu bağıntıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

C = Maliyet , x = Üretim ise istenen bağıntı

$(x_1, C_1) = (0, 165\,000\,000)$ ve $(x_2, C_2) = (100, 2\,365\,000\,000)$

noktalarını birleştiren doğrunun denklemi olacaktır. İki noktadan geçen doğru denkleminin

$$\frac{C - C_1}{C_2 - C_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

olduğu hatırlanırsa

$$\frac{C - 165\,000\,000}{2\,365\,000\,000 - 165\,000\,000} = \frac{x - 0}{100 - 0}$$

olur. Buradan maliyet

$$C = 22\,000\,000\,x + 165\,000\,000$$

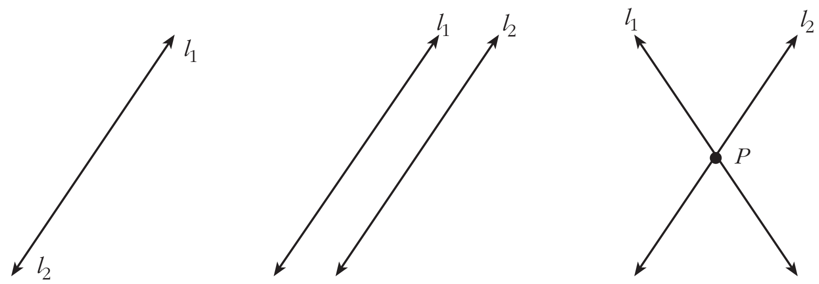
olarak elde edilir.

İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları

Verilmiş iki doğru için üç durum söz konusudur. Bu doğrular ya **çakışıktır** ya **paraleldir** ya da **kesişirler.** Şimdi bu durumların hangi şartlarda gerçekleştiğini görelim.

A) Doğrular

$$\left.\begin{array}{l} l_1 : y_1 = m_1 x + b_1 \\ \\ l_2 : y_2 = m_2 x + b_2 \end{array}\right\} \text{ denklemleriyle verilsin.}$$



çakışık doğrular: $l_1 = l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ve $b_1 = b_2$

paralel doğrular: $l_1 \,//\, l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ve $b_1 \neq b_2$

kesişen doğrular: $l_1 \cap l_2 = \{P\} \neq \phi \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$

Şekil 3.14

B) Doğrular

$$\left.\begin{array}{l} l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ \\ l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ denklemleriyle verilsin.}$$

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$l_1 \,//\, l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad \text{ve}$$

$$l_1 \cap l_2 = \{P\} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{olur.}$$

Kesişen doğruların kesim noktalarını bulmak için birkaç yol vardır. Burada bunların iki tanesini örnek içinde açıklayalım.

ÖRNEK 10 ***Verilen doğru çiftlerinin birbirlerine göre durumlarını inceleyiniz. Kesişme durumuna uyanların kesim noktasını bulunuz.***

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -6x - 10y = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$

ÇÖZÜM

a) $\frac{3}{-6} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}$ olduğundan bu iki doğru çakışıktır.

b) $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{-3}{-1}$ olduğundan verilen iki doğru paraleldir.

(Çizerek görünüz).

c) $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{-1}$ olduğundan doğrular keşişir. Kesim noktalarını **yok etme metodu** adı verilen metodla bulalım.

İkinci denklemin her iki yanını 3 ile çarpıp 1. denkleme eklersek

$$\begin{array}{rl} & x + 3y = 12 \\ 3\,/ & x - y = 4 \\ \hline & x + 3y = 12 \\ & 3x - 3y = 12 \\ \hline & 4x = 24 \end{array}$$

$$x = \frac{24}{4} = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{bulunur.}$$

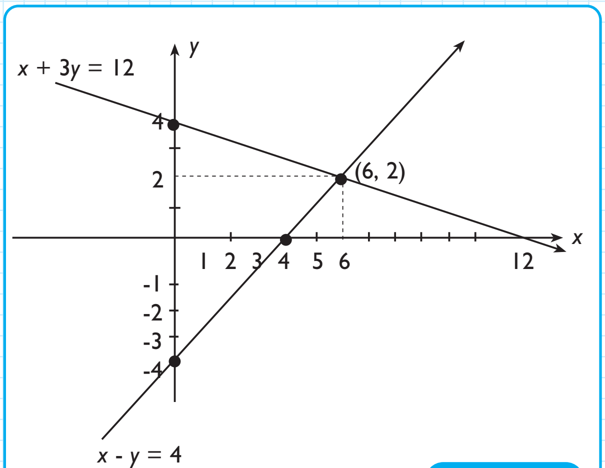
Bulunan $x = 6$ değerini ikinci denklemde (veya birinci denklemde) x gördüğümüz yere yazarsak

$x - y = 6 - y = 4 \Rightarrow$
$y = 6 - 4 = 2$

bulunur. Böylece kesim noktası

$(x, y) = (6, 2)$

olur.



Şekil 3.15

SIRA SİZDE 2

1) Verilen nokta çiftlerinden geçen doğruların eğimlerini ve denklemlerini bulunuz.

a) $A\,(0, 0)$; $B\,(3, -2)$ **b)** $A\,(-1, 3)$; $B\,(4, 0)$

c) $A\,(3, 0)$; $B\,(-1, -1)$ **d)** $A\,(3, 5)$; $B\,(-1, 3)$

2) x- eksenini 5, y- eksenini 3 noktasında kesen doğrunun denklemini bulunuz.

3) Verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $2x + y - 3 = 0$ **b)** $3x - 2y + 1 = 0$ **c)** $y = 3$

4) Verilen doğru çiftlerinin çakışık, paralel veya kesişen olup olmadıklarını araştırınız. Varsa kesişim noktalarını bulunuz.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2y = x + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y = x - 2 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$

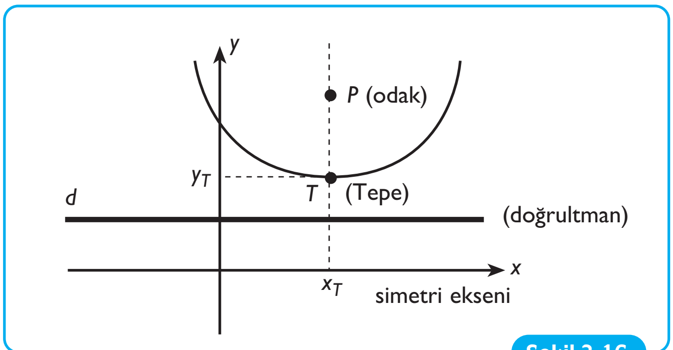
5) $y = 3x - 1$ doğrusuna paralel olan ve $A\ (2, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

PARABOL

Burada sadece simetri ekseni x- eksenine paralel veya y- eksenine paralel olan parabolleri inceleyeceğiz.

Geometrik olarak, düzlemde verilen bir noktaya ve verilen bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine parabol denir. Bu noktaya parabolün odağı, doğruya da parabolün doğrultmanı adı verilir.

Eğer parabolün doğrultmanı y- eksenine dik ve odağı doğrultmanın üst bölgesinde seçilirse şekildeki parabol elde edilir.



Şekil 3.16

Parabolün grafiği, odağından geçen ve doğrultmanına dik olan bir doğruya göre simetriktir. Bu doğruya simetri ekseni ve parabolü kestiği noktaya da tepe noktası denir.

$$Ax^2 + Bx + C + Dy = 0$$

denklemi $A \neq 0 \neq C$ olduğunda simetri ekseni y- eksenine paralel olan bir parabolün genel denklemidir. Buradan y çekilirse

$$y = -\frac{A}{D}x^2 - \frac{B}{D}x - \frac{C}{D}$$

bulunur. $a = -\frac{A}{D}$, $b = -\frac{B}{D}$ ve $c = -\frac{C}{D}$ denirse