FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİ

Bu bölümde verilen bir fonksiyonun türevinden yararlanarak bu fonksiyonun ekstremum değerlerini yani maksimum ve minimum değerlerinin ne olacağını ve bu değerleri aldığı noktaların nasıl belirleneceğini inceleyeceğiz.

TANIM: $f: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa, bu c noktasına fonksiyonun mutlak maksimum noktası, $f(c)$ değerine de fonksiyonun mutlak maksimum değeri denir. Benzer şekilde $\forall x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ olacak şekilde ki $c \in D$ noktasına fonksiyonun mutlak minimum noktası, $f(c)$ değerine de fonksiyonun mutlak minimum değeri denir.

UYARILAR: Verilen bir fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum değerleri olmak zorunda değildir. Yine bu değerlerden birisi olup, diğeri bulunmayabilir. Ayrıca fonksiyon mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini tanım kümesindeki birden çok noktada alabilirler. Şimdi bu söylediklerimizi örnekler üzerinde görmeye çalışalım.

ÖRNEK: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon mutlak maksimuma ve mutlak minimuma sahip değildir. Gerçekten; bu fonksiyon $c \in \mathbb{R}$ noktasında mutlak maksimuma sahip olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq f(c) = c$ olmalıydı. Ancak $x = c+5 \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(c+5) = c+5 > f(c) = c$ olacağından hiçbir $c \in \mathbb{R}$ noktası mutlak maksimum noktası olamaz. Benzer düşünce ile $c \in \mathbb{R}$ noktası fonksiyonun mutlak minimum noktası olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq f(c) = c$ olmalıydı. Ancak $x = c-3 \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(c-3) = c-3 < f(c) = c$ olacağından hiçbir $c \in \mathbb{R}$ noktası mutlak minimum nokta olamaz.

ÖRNEK: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon için $c = 0$ noktası mutlak minimum noktasıdır. Gerçekten $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2 \geq f(0) = 0$ olur. Böylece bu fonksiyon için 0 mutlak minimum değerdir. Ancak mutlak maksimum noktası yoktur. Eğer $c \in \mathbb{R}$ noktasında mutlak maksimumu olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq f(c)$ olmalıydı. Ancak $x = \sqrt{1+c^2}$ için $f\left(\sqrt{1+c^2}\right) = 1+c^2 > f(c) = c^2$ olacağından bu fonksiyon mutlak maksimuma sahip değildir.

ÖRNEK: $f(0,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonunu alırsak $\forall x \in (0,2]$ için $f(x) \le f(2) = 4$ olduğundan $c = 2$ fonksiyonun mutlak maksimum noktası, $f(2) = 4$ fonksiyonun mutlak maksimum değeridir. Ancak $\forall x \in (0,2]$ için $f(x) > 0$ olur ve $0 = f(0),\ 0 \notin (0,2]$ olduğundan $f(x) \ge f(c)$ olacak şekilde $c \in (0,2]$ yoktur. Böylece fonksiyonun $(0,2]$ üzerinde mutlak minimumu yoktur.

ÖRNEK: $f:(0,2) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonu için $0 < f(x) < 4$ olur. Ancak

$$f(c) = 0 \Rightarrow c = 0 \notin (0,2) \text{ ve } f(c) = 4 \Rightarrow c = \pm 2 \notin (0,2)$$

olup, bu fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktası yoktur.

NOT: Bu örneklerden kolayca görülebileceği gibi; eğer fonksiyonun tanım kümesi sınırsız ise veya içermediği uç nokta varsa mutlak maksimum veya mutlak minimum bulunmayabilir.

ÖRNEK: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ fonksiyonunu alırsak $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le f(x) = \sin x \le 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $c = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ noktalarının hepsi bu fonksiyonun mutlak minimum noktaları, yine $c = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ noktaları da bu fonksiyonun mutlak maksimum noktalarıdır.

Görüldüğü gibi bir fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum noktaları birden çok olabilir.

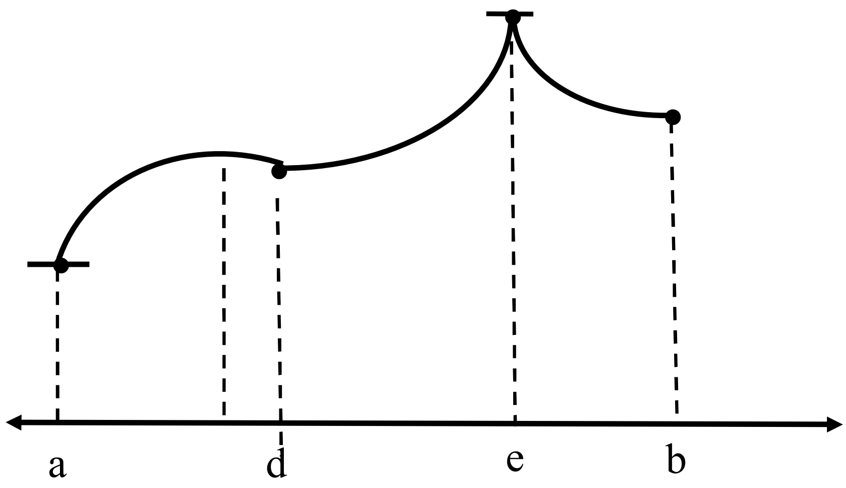
TEOREM (EKSTREMUM DEĞER PROBLEMİ): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak maksimum değeri M ve mutlak minimum değeri m vardır. Yani $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ için $f(c_1) = m$ ve $f(c_2) = M$ olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için $m \le f(x) \le M$ gerçekleşir.

Bu teoremde f nin sürekli ve tanım kümesinin sınırlı aynı zamanda uç noktaları içerdiğine dikkat edilmelidir. Bunların sağlanmadığı durumda m ve M sayılarının varlığını garanti edemeyiz.

Verilen bir fonksiyonun tanım kümesine ait olan bir noktanın uygun bir komşuluğunda maksimum veya minimum değerleri bulunabilir. Bunlar yerel maksimum ve yerel minimum olarak ifade edilirler. Şimdi bu kavramları inceleyelim.

TANIM: $f: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. c, D kümesinin bir iç noktası olmak üzere, eğer c noktasını içeren bir açık aralıktaki $\forall x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa bu c noktasına yerel maksimum nokta, $f(c)$ değerine de yerel maksimum değer denir. Benzer şekilde c noktasını içeren bir açık aralıktaki $\forall x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa bu c noktasına yerel minimum nokta, $f(c)$ değerine de yerel minimum değer denir.

Bir fonksiyonun grafiği üzerinden mutlak veya yerel maksimum, minimum değerlerini belirleyebiliriz. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.



Grafiğe dikkat edilirse fonksiyon en küçük değerini a noktasında, en büyük değerini de e noktasında almaktadır. O halde mutlak minimum nokta a , mutlak maksimum nokta e dir.

c noktasına bakılırsa, c noktasının yakınlarında f fonksiyonunun c noktasında aldığı değerden daha büyük değeri yoktur. O halde c noktası yerel maksimum noktadır.

d noktasına bakılırsa, d noktasının yakınlarında f fonksiyonunun d noktasında aldığı değerden daha küçük değer yoktur. O halde d noktası yerel minimum noktadır.

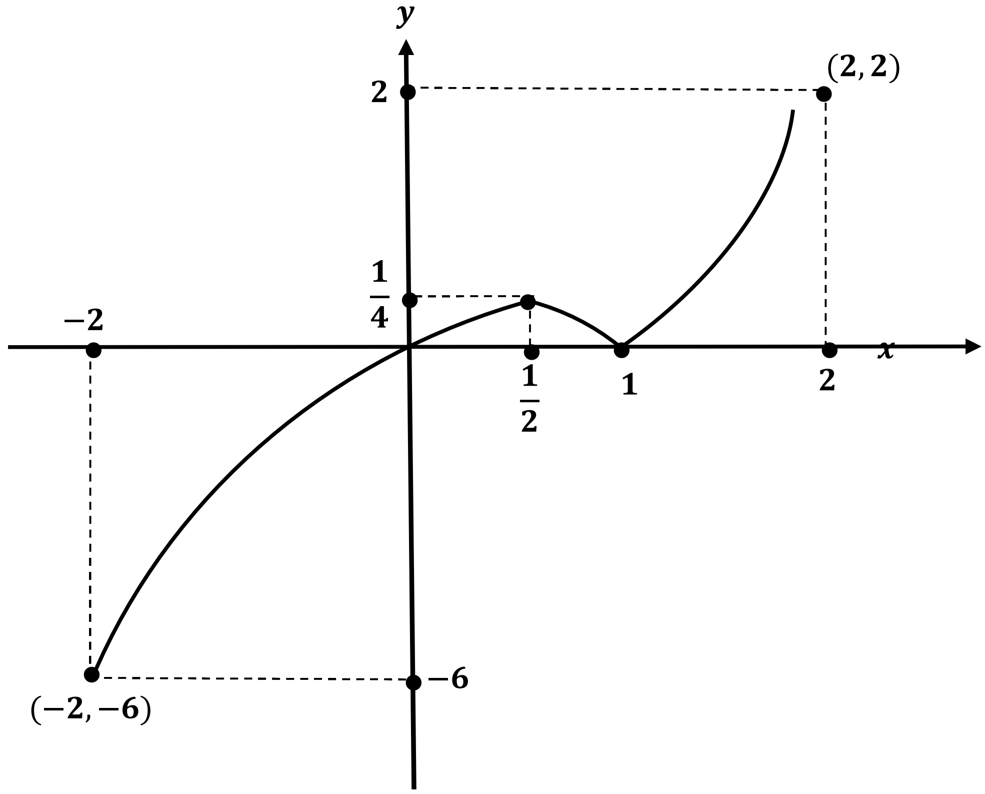
b noktasına bakılırsa, b noktasının yakınlarında f fonksiyonunun b noktasında aldığı değerden daha küçük değeri yoktur. O halde b noktası yerel minimum noktadır.

UYARI: $[a,b]$ de tanımlı fonksiyonun aralığın uç noktalarındaki ekstremum değerleri incelenirken a noktası için $a \le x < a+\delta$ (yani a noktasında sağdan) ve b noktası için $b-\delta < x \le b$ (yani b noktasında soldan) olacak şekilde belirlenmiş bir $\delta > 0$ sayısı için $f(x)$ değerleri incelenir.

ÖRNEK: $f:[-2,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x|x-1|$ fonksiyonunun grafiğini çizerek varsa mutlak veya yerel ekstremumlarını inceleyiniz.

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x^2 - x & , \ x \ge 1 \\ -x^2 + x & , x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir:



Grafiğe göre $\forall x \in [-2,2]$ için $-6 \le f(x) \le 2$ yazılır. Böylece $x=-2$ mutlak minimum, $x=2$ mutlak maksimum nokta olur. Bunların dışında $x=\frac{1}{2}$ noktası için $\forall x \in (0,1)$ olduğunda $f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$ olup, $x=\frac{1}{2}$ yerel maksimum noktadır. $x=1$ noktası için $\forall x \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ olduğunda $f(x) \ge f(1)$ olup $x=1$ yerel minimum noktadır.

Şimdi türev kullanılarak ekstremumların nasıl belirlenebileceğini inceleyelim.

TEOREM: (FERMAT TEOREMİ) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in (a,b)$ (yani c iç nokta) noktasında yerel minimum veya yerel maksimuma sahip olsun. Eğer f fonksiyonu bu c noktasında türevlenebilir ise $f'(c)=0$ olur.

Dikkat edilirse Fermat teoremi bize ekstremum noktaları buldurmuyor. Ancak bu noktaların nerede aranacağına dair ipucu veriyor.

Yine bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani $f'(c)=0$ olan c noktalarının ekstremum nokta olmaları gerekmez.

ÖRNEK: $f(x)=x^3$ fonksiyonunu alalım. $f'(x)=3x^2$ ve $c=0$ için $f'(c)=0,\ f(c)=0$ olur. Ancak 0 sayısını içeren hangi açık aralık alınırsa alınsın, bu aralıkta hem pozitif hem de negatif sayılar bulunur, yani kimi x değerleri için $f(x)>0$ ve kimi x değerleri için $f(x)<0$ olacağından $c=0$ türevi 0 yapmasına rağmen ekstremum nokta olamaz.

NOT: Böylece Fermat teoremi de dikkate alınırsa bir f fonksiyonunun ekstremumları türevi 0 yapan iç noktalarda, türevinin olmadığı iç noktalarda ve tanım kümesinin uç noktalarında araştırılmalıdır. Bu noktalar '**kritik noktalar**' olarak ifade edilirler.

ÖRNEK: Biraz önce grafikten çözdüğümüz,

$$f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x|x-1|$$

fonksiyonuiçin kritik noktalarımız, $[-2,2]$ aralığının uç noktaları olan $x=\pm2$ noktaları, türevin sıfır olduğu $x=\frac{1}{2}$ iç noktası ve türevin olmadığı $x=1$ iç noktasıdır. Böylece kritik noktaların hepsi ekstremum nokta olurlar.

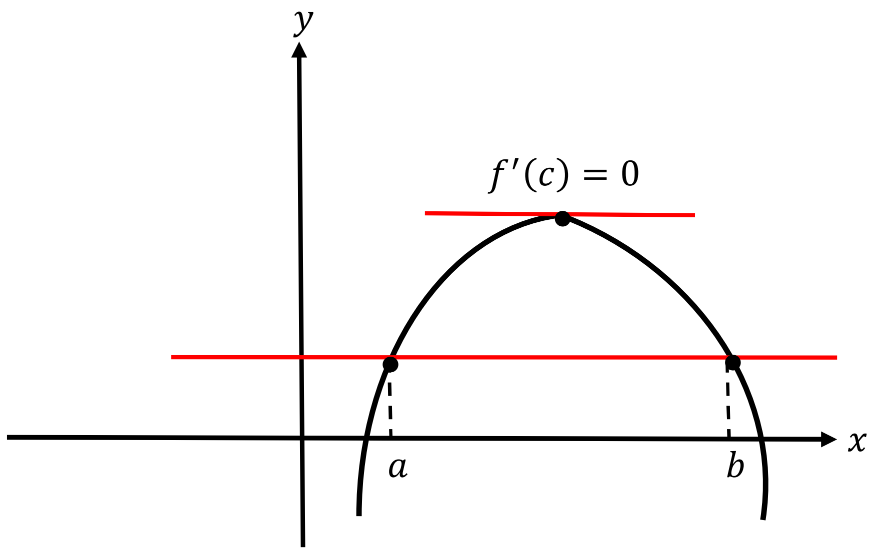
ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

TEOREM (ROLLE TEOREMİ): Bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır.

Burada özel olarak $f(a)=f(b)=0$ alınırsa, Rolle teoremi şöyle ifade edilebilir:

f fonksiyonunun herhangi iki kökünün arasında türevinin de bir kökü vardır.

Rolle teoremini geometrik olarak şu şekilde yorumlarız. Eğer türevlenebilen bir fonksiyon yatay bir doğruyu farklı iki noktada kesebiliyor ise bu noktalar arasında eğrinin teğetinin $x-$eksenine paralel olduğu, dolayısıyla türevin sıfır olduğu en az bir nokta vardır.



ÖRNEK: $x^3 + 3x + 1 = 0$ denkleminin bir tek reel kökünün olduğunu gösterelim:

$f(0) = 1 > 0, f(-1) = -3 < 0$ ve f sürekli olduğundan Aradeğer teoremi gereğince $(-1, 0)$ açık aralığında en az bir kök vardır. Eğer $f(x) = 0$ denkleminin birden çok reel kökü olsaydı, f fonksiyonu türevlenebilir olduğundan Rolle teoremi gereğince iki kökünün arasında türevinin de kökü olmalıydı, ama $f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$ olduğundan bu gerçekleşemez.

ÖRNEK: $r(\theta) = \theta + \sin^2 \dfrac{\theta}{3} - 8$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $(-\infty, +\infty)$ aralığında bir tek kökünün olacağını gösterelim:

$r(0) = -8 < 0$, $r(10) > 0$ ve r fonksiyonu sürekli olduğundan $(0, 10)$ açık aralığında en az bir kök vardır. Eğer $r(\theta) = 0$ denkleminin birden çok kökü olsaydı, r fonksiyonu türevlenebilir olduğundan Rolle teoremi gereğince Rolle teoremi gereğince iki kökünün arasında türevinin de kökü olmalıydı, ama

$$r'(\theta) = 1 + \frac{1}{3}\sin\frac{2\theta}{3} = 0 \Rightarrow \sin\frac{2\theta}{3} = -3$$

olduğundan bu gerçekleşemez.

ÖRNEK: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ fonksiyonunun türevinin köklerinin hangi aralıkta bulunduğuna bakalım:

f türevlenebilir bir fonksiyondur. Rolle teoremi kullanılırsa

$f(1) = f(2) = 0$ olduğundan $1 < c_1 < 2$ için $f'(c_1) = 0$

$f(2) = f(3)$ olduğundan $2 < c_1 < 3$ için $f'(c_2) = 0$.

f' ikinci dereceden bir polinomolduğundan en çok 2 kökü bulunabilir ve dolayısıyla bu kökler $[1,3]$ aralığında olmalıdır.

TEOREM (ORTALAMA DEĞER TEOREMİ): Bir $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda $\exists c \in (a,b)$ için $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ olur.

Ortalama değer teoremi Rolle teoreminin değiştirilmiş bir halidir. Gerçekten ortalama değer teoreminin sonucu

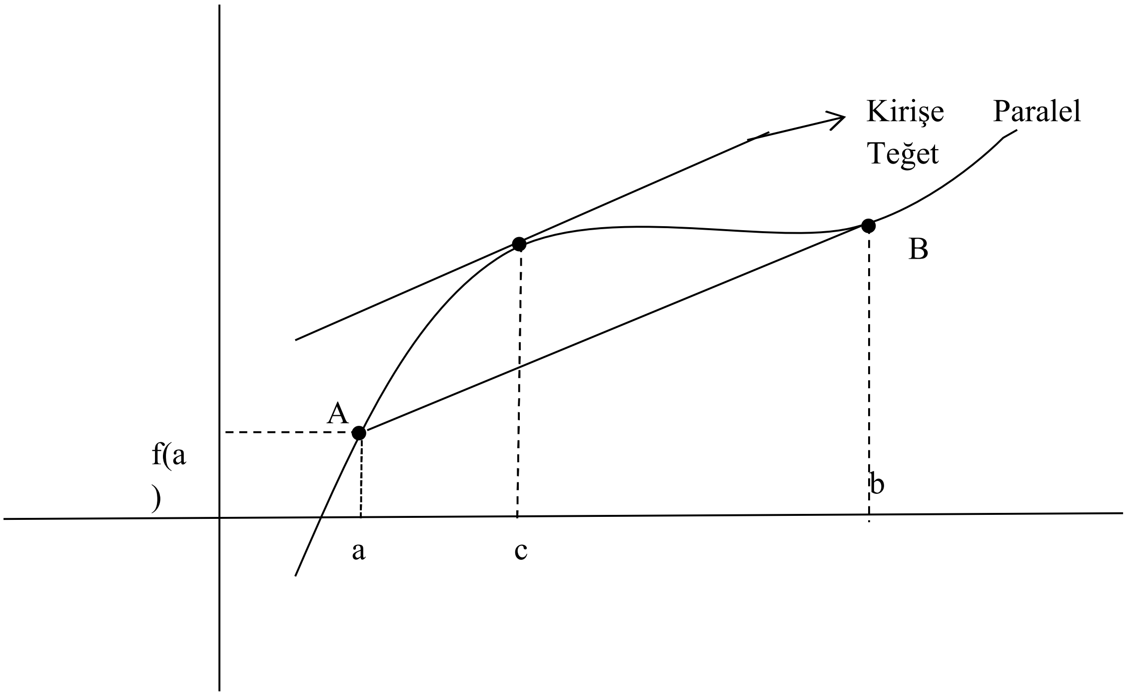
$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

biçiminde ifade edilirse

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$$

olur.

Bu teorem geometrik olarak şöyle yorumlarnır: Teoremin koşulları gerçekleşirse a ve b arasındaki en az bir c noktası için $C(c, f(c))$ noktasında çizilen teğet $A(a, f(a))$ noktasını $B(b, f(b))$ noktasına birleştiren AB kirişine paralel olur.



ÖRNEK: $f:[0,2]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$ fonksiyonu için ortalama değer teoremini sağlayan c sayısını bulalım:

f fonksiyonu $[0,2]$ üzerinde sürekli, $(0,2)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $f'(x)=3x^2-3$ olup,

$f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}\Rightarrow 3c^2-3=\dfrac{7-5}{2-0}=1\Rightarrow c=\mp\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ olur. Öte yandan $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\notin(0,2)$ olduğundan $c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ olmalıdır.

ÖRNEK: $f:[0,3]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-3 & , \ 0\le x\le 2\\ 6x-x^2-7 & , \ 2<x\le 3\end{cases}$ fonksiyonu ortalama değer teoremini sağlar mı?

f fonksiyonu $[0,3]$ üzerinde sürekli , $(0,3)$ üzerinde türevlenebilir olmalıdır. $[0,3]$ üzerindesüreksiz ve $(0,3)$ üzerindetürevsiz olabileceği nokta $x=2$ noktasıdır. Bu noktada süreklilik ve türevlenebilmeyi inceleyelim.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$ olur mu?

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(6x-x^2-7)=1,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-3)=1$

olduğundan f, $[0,3]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{6x-x^2-7-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{6x-x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{6-2x}{1}=2$$

olduğundan $f'(2^+)=2$ ve

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

olduğundan $f'(2^-)=2$ çıkar. O halde f fonksiyonunun 2 noktasındaki türevi vardır. Böylece ortalama değer teoreminin şartları sağlanır. Şimdi teoremde ki c sayısını bulalım:

$$f'(c)=\big(f(3)-f(0)\big)/\big(3-0\big)=5/3$$

denkleminde $c\in(0,2]$ ise $f'(c)=2\neq\frac{5}{3}$ olacağından $c\in(2,3]$ olmalıdır. Böylece $f'(x)=6-2x$ olup, $f'(c)=6-2c=\frac{5}{3}$ ifadesinden $c=\frac{13}{6}$ bulunur.

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

Ortalama Değer Teoremi kullanılarak $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ de sürekli (a,b) de türevlenebilir bir fonksiyon ise $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ olarak yazılabilir. $x_1<x_2$ olmak üzere $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ alalım. O halde f fonksiyonu $[x_1,x_2]$ aralığında ortalama değer teoreminin şartlarını sağladığından $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)$ olacak şekilde $c\in(x_1,x_2)$ vardır. Böylece (a,b) aralığında $f'>0$ ise $f(x_1)<f(x_2)$ olacağından fonksiyon artan, $f'(c)<0$ ise $f(x_1)>f(x_2)$ olacağından fonksiyon azalan olur.

Böylece f nin türevinin pozitif olduğu yerlerde f artan fonksiyon, f in türevinin negatif olduğu yerlerde f azalan fonksiyon olur. Bu sonuç sonlu olmayan aralıklar için de geçerlidir.

ÖRNEK: $f(x)=x^3-12x-5$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu yerleri bulalım:

$$f'(x)=3x^2-12=0\Leftrightarrow x=\mp 2$$

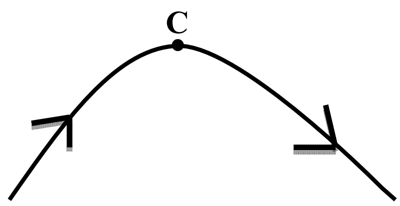
$(-\infty,-2)$ ile $(2,+\infty)$ aralıklarında $f'(x)>0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bu aralıklar üzerinde artan iken, $(-2,2)$ aralığında $f'(x)<0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bu aralık üzerinde azalandır.

x	$-\infty$		-2		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

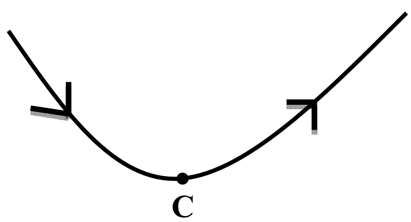
YEREL EKSTREMUMLARIN BELİRLENMESİNDE ARTANLIK-AZALANLIK İLİŞKİSİ

Eğer c noktası f fonksiyonunun bir ekstremum noktası ise c noktasının maksimum veya minimum nokta olup olmadığını c noktasının solunda ve sağında fonksiyonun artan ve azalanlık karakterine bakarak anlayabiliriz.

1) f fonksiyonu c noktasının solunda artan sağında azalan ise c yerel maksimum noktadır.

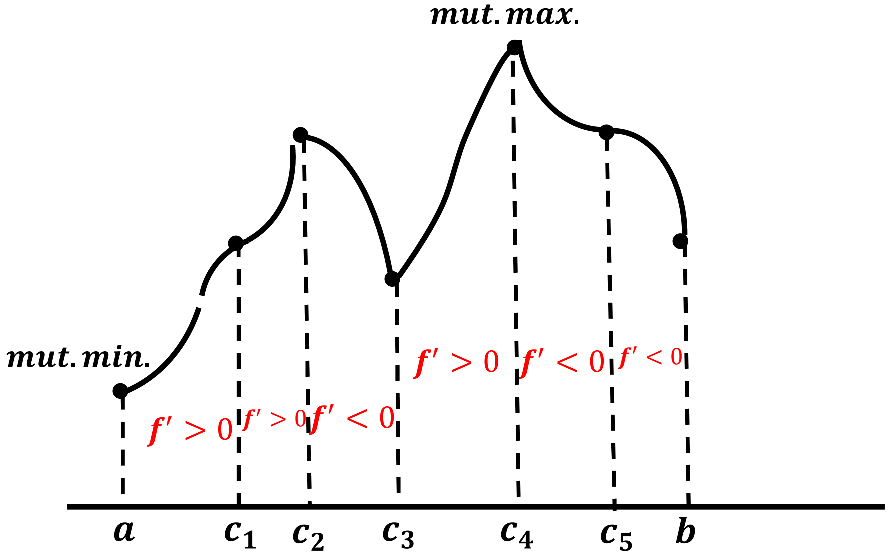


2) f fonksiyonu c noktasının solunda azalan sağında artan ise c noktası yerel minimum noktadır.



Böylece 1) ve 2) ifadeleri dikkate alınırsa ekstremum noktada fonksiyonun türevi işaret değiştirmelidir. Böylece f' türevi c noktasında negatiften pozitife geçmişse c yerel minimum ; pozitiften negatife geçmiş ise c yerel maksimum noktadır.

Bu anlatılanlar dikkate alındığında eğer f' türev fonksiyonunun grafiği verilirse ekstremum noktaları ve türlerini belirleyebiliriz. Buna Yerel ekstemumlar için Birinci türev testi denir.



a noktası mutlak minimum, c_4 noktası mutlak maksimum. c_1 noktasında $f'(c_1)=0$ ve f' işaret değiştirmediğinden ekstremum yoktur.

c_2 noktasında $f'(c_2)=0$ ve f' işaret değiştirir, artanlıktan azalanlığa geçer o halde c_2 yerel maksimum.

c_3 noktasında $f'(c_3)=0$ ve f' işaret değiştirir, azalanlıktan artanlığa geçer o halde yerel minimum.

c_4 noktasında türev yok, o halde bu nokta bir kritik nokta olarak mutlak maksimum.

c_5 noktasında $f'(c_5)=0$ ve türev işaret değiştirmediğinden ekstremum yok.

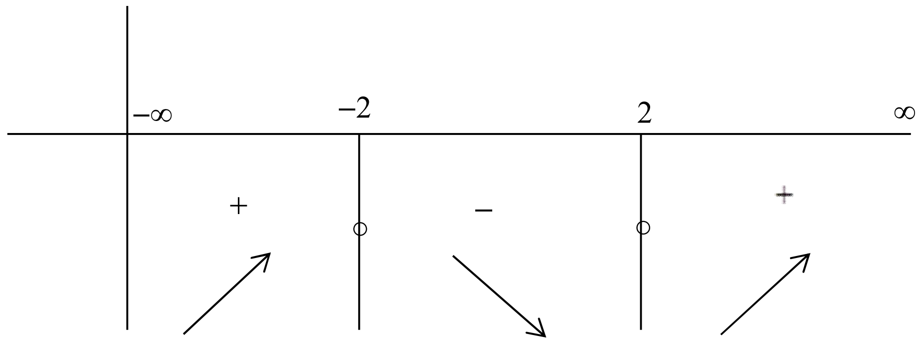
b noktasında sadece soldan bakılır, yerel minimum vardır.

ÖRNEK: $f(x)=x^3-12x-5$ fonksiyonunun kritik noktalardaki ekstemumlarını inceleyelim:

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\mp 2$$

olup, kritik noktalar ∓ 2 dir.

$x=-2$ noktasında f' , artanlıktanazalanlığa geçtiği için yerel maksimum ve $x=2$ noktasında azalanlıktanartanlığa geçtiği için yerel minimum
vardır.



YEREL EKSTREMUMLAR İÇİN İKİNCİ TÜREV TESTİ

f fonksiyonu ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ve c noktası kritik nokta olsun. ($f'(c)=0$ olsun.) Yine f'' fonksiyonunun c noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda

1) $f''(c)<0$ ise c noktası yerel maksimum nokta

2) $f''(c)>0$ ise c noktası yerel minimum noktadır.

Eğer $f''(c)=0$ olursa bu test cevap vermez.

ÖRNEK: $f(x)=x^4-4x^3+10$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını inceleyelim.

$$f'(x)=4x^3-12x^2=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0 \ ,$$

olduğundan $x_1=x_2=0, x_3=3$ kritik noktalardır.

$f''(x)=12x^2-24x$, $f''(0)=0$ olduğundan bir şey söylenemez.

$f''(3)=36>0$ olduğundan $x=3$ yerel minimum noktadır.

x	$-\infty$		0		3		∞
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

f'nün işaret tablosundan da görüldüğü gibi $x=3$ yerel minimum nokta, $x=0$ ekstremum nokta değildir.

ÖRNEK: $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{4}+7$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını inceleyelim:

Kritik noktalar $f'(x)=x^4-x^3=0 \Rightarrow x=0, x=1$ olur.

$f''(x)=4x^3-3x^2$, $f''(0)=0$ olduğundan $x=0$ için bir şey söyleyemeyiz.

$f''(1)=1>0$ olduğundan $x=1$ yerel minimum noktadır.

x	$-\infty$		0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f' türevinin işaret tablosundan görüldüğü gibi $x=0$ yerel maksimum noktadır.

ÖRNEK: f fonksiyonunun türevi $f'(x)=(x-1)^2(x-2)(x-4)$ şeklinde olsun. f fonksiyonunun yerel ekstremumlarını inceleyelim:

Kritik noktalardır: $f'(x)=0 \Rightarrow x=1, x=2$, $x=4$.

$f''(x)=2(x-1)(x-2)(x-4)+(x-1)^2(x-4)+(x-1)^2(x-2)$

$f''(1)=0$ bir şey söylenemez.

$f''(2)=-2<0$ olduğundan $x=2$ yerel maksimum,

$f''(4)=18>0$ olduğundan $x=4$ yerel minimum olur.

f' nün işaretini incelersek

x	$-\infty$		1		2		4		∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Görüldüğü gibi $x=1$ noktasında artanlık karakteri değişmediğinden $x=1$ ekstremum nokta değildir.

$x=2$ yerel maksimum , $x=4$ yerel minimumdur.

ÖRNEK: $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ için $f(x) = -2x + \tan x$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını inceleyelim:

Kritik noktalar

$$f'(x) = -2 + 1 + \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \mp 1 \Rightarrow x = \mp\frac{\pi}{4}.$$

$f''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$ olduğundan $x = \dfrac{\pi}{4}$ yerel minimum, $f''\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -4 < 0$ olduğunan $x = -\dfrac{\pi}{4}$ yerel maksimumdur.

ÖRNEK: $f'(x) = (\sin x - 1)(2\cos x + 1)$ olarak verilen f fonksiyonunun

a) kritik noktaları

b) artan azalan olduğu yerler

c) yerel ekstremumlarını inceleyiniz. ($x \in [0, 2\pi]$)

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad V \quad 2\cos x + 1 = 0\left(\cos x = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad V \quad \left(x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\; V \;\; x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z}$$

olduğundan kritik noktalar 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ ve 2π olarak bulunur.

$f'(x)$ in işaret tablosunuşöyledir:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\sin x - 1$		$-$	0	$-$		$-$		$-$	
$2\cos x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$-$	
		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

f fonksiyonunun artan olduğu küme $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$

f fonksiyonunun azalan olduğu küme $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$

$x=0$ ın sağında azalan olduğundan $x=0$ yerel maksimum

$x=\frac{\pi}{2}$ notasında artanlık karakteri değişmediğinden ekstremumnokta değildir.

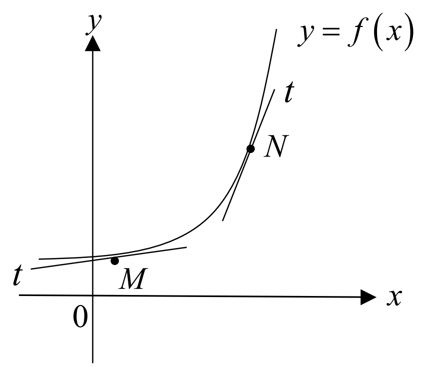
$x=\frac{2\pi}{3}$ noktasının solunda azalan, sağında artan olduğundan bu nokta yerel minimum noktadır.

$x=\frac{4\pi}{3}$ noktasının solunda artan, sağında azalan olduğundan bu nokta yerel maksimum noktadır.

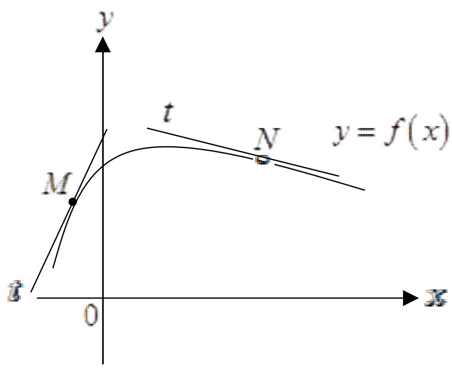
$x=2\pi$ nin solunda azalan olduğundan $x=2\pi$ yerel minimum nokta olur.

KONKAVLIK VE EĞRİ ÇİZİMİ

Aşağıda Şekil a ve b de $y=f(x)$ eğrisini ve bu eğri üzerinde hareketli bir noktayı gözönüne alalım.



Şekil a



Şekil b

(I) Şekil a da olduğu gibi bu hareketli nokta M den N ye doğru ilerlediğinde, teğetler saat yönünün tersinde döner ve eğri teğetlerinin üstünde kalır ise eğriye **yukarı doğru konkavdır (konvekstir)** denir.

(II) Şekil b da olduğu gibi bu hareketli nokta M den N ye doğru ilerlediğinde, teğetler saat yönüne döner ve eğri teğetlerinin altında kalır ise eğriye **aşağı doğru konkavdır (konkavdır)** denir.

Bu özelliklere genel olarak eğrinin **konkavlığı** denir.

Teğetin, Şekil a da olduğu gibi saat yönünün tersine dönmesi, $f'(x)$ türevinin artan bir fonksiyon olması anlamına gelir.

Benzer şekilde, teğetin Şekil b de olduğu gibi saat yönünde dönmesi, $f'(x)$ türevinin azalan bir fonksiyon olması anlamındadır.

Bu özellikler konkavlık için aşağıdaki tanımı verirler. Bu tanımı Ortalama Değer Teoremini, $f'(x)$ 'e uygulayarak elde ederiz:

<u>Tanım:</u> (Konkavlık için ikinci türev testi)

$y = f(x)$ fonksiyonunun, $I \subset \mathbb{R}$ aralığında ikinci türevi olsun. Bu aralık boyunca, eğer

(1) $f''(x) > 0$ ise f nin grafiği I aralığında yukarı konkav

(II) $f''(x) < 0$ ise f nin grafiği I aralığında aşağı konkavdır.

<u>Örnek:</u> $y = 3x^5 - 10x^3$ eğrisinin konkavlığını inceleyiniz.

<u>Çözüm:</u> $y' = 15x^4 - 30x^2$ olduğundan

$$y'' = 60x^3 - 60x \Rightarrow y'' = 60x(x^2-1) = 60x(x-1)(x+1)$$

bulunur. Buna göre aşağıdaki tablo oluşur:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		A.K.		Y.K.		A.K.		Y.K.	

O halde eğri, $[-1, 0]$ ve $[1, \infty]$ da konveks, $(-\infty, -1]$ ve $[0,1]$ de konkavdır.

<u>Dönüm (Büküm) Noktası</u>

$y = f(x)$ eğrisininkonveksliktenkonkavlığa veya konkavlıktankonveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası denir.

O halde:

(a) c noktası f için bir dönüm noktası ise ya $f''(c) = 0$ veya $f''(c)$ yoktur.

(b) c noktası f için bir dönüm noktası ise $f''(c) = 0$ ve $f'''(c) \neq 0$ olur.

f'' fonksiyonu c noktasında işaret değiştiriyorsa bu nokta f nin bir dönüm noktasıdır.

Örnek: $y = x^3 - 3x^2 - 4$ eğrisinin büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $y' = 3x^2 - 6x$ ve $y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$ olup

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	
y		Y.K.		A.K.	

Tablo göz önüne alındığında $x = 1$ için y'' türevi sıfır ve işaret değiştirmekte olduğundan $(1, -6)$ büküm noktasıdır. Diğer bir ifade ile, $x = 1$ için $y'' = 0$ ve $y''' = 6 \neq 0$ olduğundan $(1, -6)$ büküm noktasıdır.

Örnek: $y = 1 + (x-2)^5$ eğrisinin büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $y' = 5(x-2)^4$ ve $y'' = 20(x-2)^3$, $y''' = 60(x-2)^2$ olup $x = 2$ için $y'' = 0$ ve $y''' = 0$ olduğundan bir şey söylenemez. Böyle bir durumda, $x = 2$ için y'' nin işaret değiştirip değiştirmediğine bakılır:

x	$-\infty$	2		$+\infty$
y''	$-$	0	$+$	
y	A.K.		Y.K.	

Tablo gözönüne alındığında $x=2$ için y'' türevi sıfır ve işaret değiştirmekte olduğundan $(2,1)$ büküm noktasıdır.

<u>Uyarı:</u> $f'(c)=0$, $f''(c)=0$ ve $f'''(c)=0$ olması hallerinde türevler kolay bir şekilde alınabiliyorsa, $x=c$ için sıfır olmayan ilk türev bulununcaya kadar türev almaya devam edilir. Bu takdirde, $(c, f(c))$ noktası, sıfır olmayan ilk türevin mertebesi tek ise büküm noktası, çift ise bir ekstremum noktasıdır. Buna göre,

<u>Teorem (İkinci Türev Testi):</u> $y=f(x)$ iki kez türevlenebilen bir fonksiyon ve $x=c$ noktasını içeren herhangi bir aralıkta sürekli olsun. Eğer $f'(c)=0$ ve

(a) $f''(c)<0$ ise $x=c$ bir yerel maksimum noktasıdır.

(b) $f''(c)>0$ ise $x=c$ bir yerel minumum noktasıdır.

(c) $f''(c)=0$ ise $x=c$ bir yerel ekstremum olabilir veya olmayabilir.

<u>EĞRİ ÇİZİMİ</u>

$y=f(x)$ eğrisinin çizimi için aşağıdaki adımları takip etmek kolaylık sağlar;

(1) Tanım kümesi ve varsa simetriler bulunur. Eksenleri kestiği noktalar bulunur.
(2) Birinci ve ikinci türevler bulunur.
(3) Kritik noktalar bulunur ve bu noktalarda ekstremumlar belirlenir.
(4) Eğrinin artan ve azalan olduğu aralıklar bulunur.
(5) Konkavlık incelenerek büküm noktaları bulunur.
(6) Asimptotlar varsa bulunur.
(7) Tüm bunlar ortak bir tabloda gösterilir ve grafik çizimi yapılır.

Örnek: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:(1) $TK_f=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$dir. Tanım kümesi simetrik olduğundan

$f(-x)=\dfrac{(-x+1)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ ifadesi hem $f(x)$ den hemde $-f(x)$ den farklı olduğundan simetri yoktur.

$x=0$ için $y=1$ olduğundan $(0,1)$ ve $y=0$ için $x=-1$ olduğundan $(-1,0)$ eksenleri kestiği noktalardır.

(2) $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ ve $f''(x)=\dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

(3) $f'(x)$ türevini tanımsız yapan nokta yoktur. O halde kritik noktalar sadece $f'(x)=0$ yapan noktalardır. O halde, $x=\mp 1$ kritik noktalardır.

İkinci türev testine göre $f''(-1)=1>0$ olduğundan $x=-1$ yerel minumum ve $f''(1)=-1<0$ olduğundan $x=1$ yerel maksimum noktasıdır.

(4)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Tablo incelendiğinde $(-\infty,-1)$ ve $(1,\infty)$ aralığında fonksiyon azalan, $(-1,1)$ aralığında artandır.

(5) $f''(x)$ türevini tanımsız yapan nokta yoktur. O halde ikinci türevi sıfır yapan noktalar $x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}$ göz önüne alındığında şu tablo oluşturulur:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		A.K		Y.K		A.K.		Y.K.	

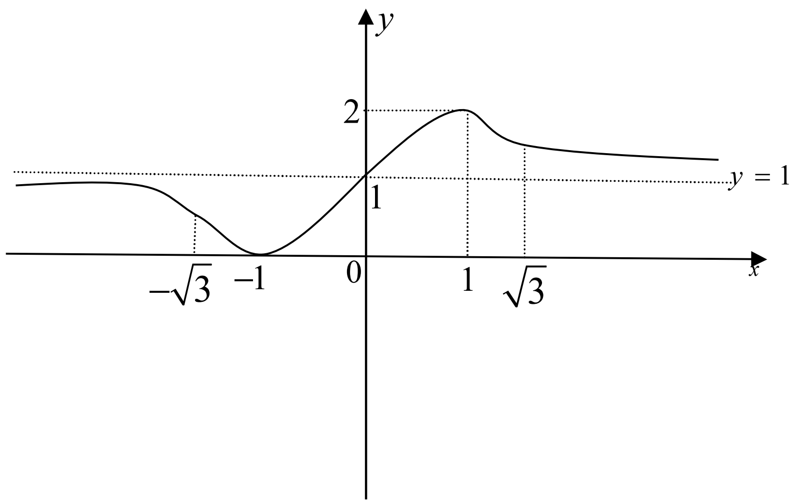
$x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}$ büküm noktası olur.

(6) $f(x)$ rasyonel bir fonksiyon olup paydayı sıfır yapan reel sayı olmadığından düşey asimptot yoktur. Ayrıca $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = 1$ olduğundan $y = 1$ yatay asimptot olur.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left| f(x) - p(x) \right| = 0$ olacak şekilde $p(x) = 1$ sabit olup eğik asimptot, yatay asimptot olarak karşımıza çıkar.

(7)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	1
			B.N.		Y.Min.		B.N.		Y.Maks.		B.N.		



Örnek: $y=\ln\left(\dfrac{x+1}{2-x}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:(1) Bu fonksiyonun tanımlı olması için $\dfrac{x+1}{2-x}>0$ olmalıdır. Aşağıdaki tablo yardımıyla tanım kümesi $TK_f=(-1,2)$ olarak bulunur:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+1}{2-x}$		$-$		$+$		$-$	

Tanım kümesi orjine göre simetrik olmadığına göre fonksiyonun simetrisinden söz edilemez.

$x=0$ için $y=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$ olduğundan $\left(0,-\ln 2\right)$ ve $y=0$ için $x=\dfrac{1}{2}$ olduğundan $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ eksenleri kestiği noktalardır.

(2) $y'=\dfrac{3}{(2-x)(x+1)}$ ve $y''=\dfrac{6x-3}{(2+x-x^2)^2}$.

(3) y' türevini sıfır yapan nokta yoktur. Ayrıca y' türevini tanımsız yapan noktalar tanım kümesinin elemanı olmadığından ekstremum yoktur.

(4) $\forall x \in (-1,2) = TK_f$ için $f'(x) > 0$ olduğundan fonksiyonun grafiği daima artan yani yukarı doğrudur.

(5) $f''(x)$ türevini tanımsız yapan noktalar -1 ve 2 olup tanım kümesinin elemanı değildir. O halde, sadece ikinci türevi sıfır yapan noktaları göz önüne alarak aşağıdaki tabloyu yapalım:

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
y''			$-$	0	$+$		
y			A.K.		Y.K.		

Buna göre konkavlık $x = \frac{1}{2}$ de değiştiğinden $x = \frac{1}{2}$ büküm noktasıdır.

(6)

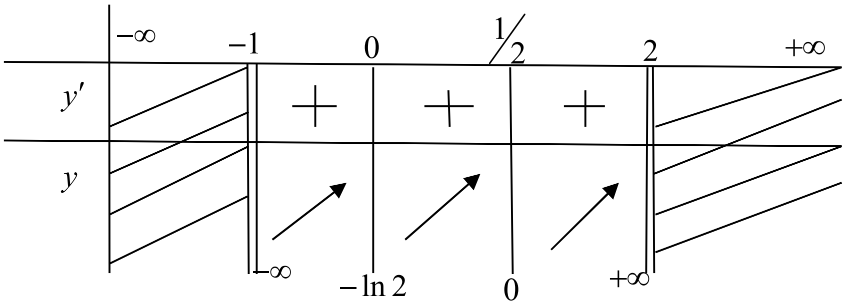
$$\lim_{x \to -1^+} \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) = \ln\left(\lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{2-x}\right) = -\infty$$

olduğundan $x = -1$ düşey asimptot ve

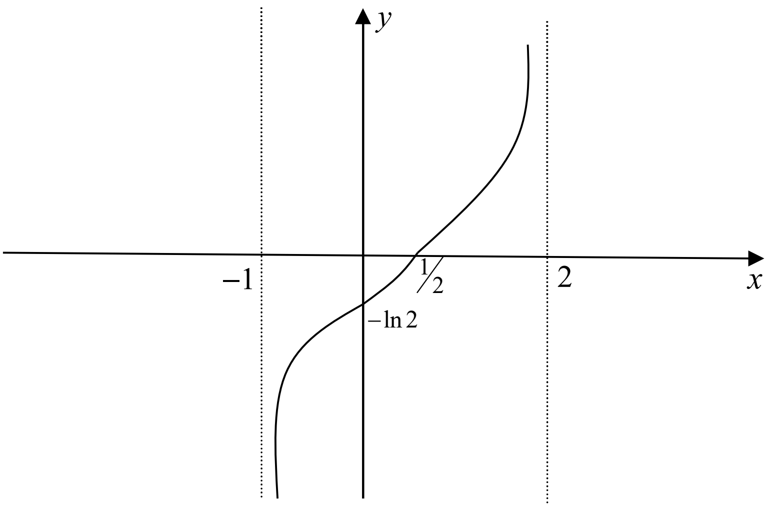
$$\lim_{x \to 2^-} \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{2-x}\right) = +\infty$$

olduğundan $x = 2$ düşey asimptottur.

(7)



(8)



Örnek: $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

(1) $T.K_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ tanım kümesi orjine göre simetrik ve $f(-x)=f(x)$ olduğundan grafiğin $y-$eksenine göre simetrisi vardır.

$x=0$ ise $y=2$ olup $(0,2)$ y-ekseni kestiği noktadır. $y=0$ için kök olmadığından grafik $x-$eksenini kesmez.

(2)

$$y'=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln 2$$

ve

$$y'' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{4x^2}{\left(x^2-1\right)^4} \ln^2 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}} \left(\frac{-8x^2-2}{\left(x^2-1\right)^3}\right)$$

olur.

(3) y' birinci türevini sıfır yapan nokta $x=0$ dır. Ayrıca y' birinci türevini sıfır yapan noktalar tanım kümesinde olmadığından, ekstremumlar sadece birinci türevi sıfır yapan $x=0$ noktasında aranır. $f''(0)=4>0$ olduğundan $x=0$ noktasında yerel minimum vardır.

(4)

x		0	
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$ Azalan		$\nearrow$ Artan

$(-\infty,0)\setminus\{-1\}$ aralığında fonksiyon azalan, $(0,\infty)\setminus\{1\}$ aralığında fonksiyon artandır.

(5) İkinci türevi sıfır yapan nokta yoktur. Ayrıca ikinci türevi tanımsız yapan noktalar fonksiyonun tanım kümesinde olmadığından büküm noktası yoktur. Ancak ikinci türevin tablosu incelendiğinde

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y''	$-$		$+$		$-$	
y	A.K.		Y.K.		A.K.	

(6)

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=0\,,\ \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=+\infty\,,\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=0$$

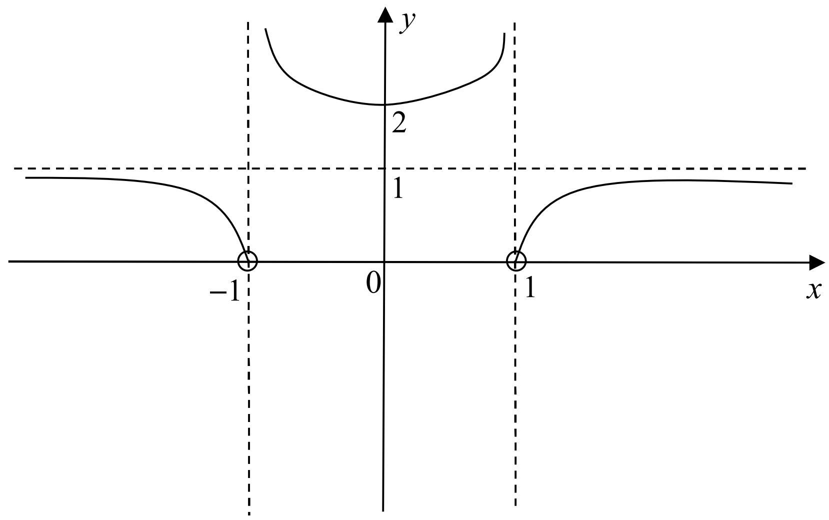
olduğundan $x=1$ ve $x=-1$ düşey asimptot olur. Ayrıca

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=1$$

olduğundan $y=1$ doğrusu yatay asimptot olur. Eğri ve eğik asimptot yoktur.

(7)

	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y''		$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$ A.K.	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$ Y.K.	2	$\nearrow$ Y.K.	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$ A.K.	1



Örnek: $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:(1) $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)\geq 0$ olduğundan, fonksiyonn tanımlı olabilmesi için $x\leq -1$ veya $x\geq 3$ olmalıdır. O halde $T.K_f=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ olur. Tanım kümesi simetrik değil, dolayısıyla fonksiyonun simetrisi yoktur.

$x=0$ için fonksiyon tanımlı değildir. $y=0$ için $x_1=-1$, $x_2=3$ olup fonksiyon $(-1,0)$ ve $(3,0)$ noktalarında x-eksenini keser.

(2)

$$y'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

ve

$$y''=-\frac{4}{\left(x^2-2x-3\right)^{3/2}}$$

olur.

(3)-(4) y' türevini tanımsız yapan noktalar $x_1=-1$ ve $x_2=3$ .noktalarıdır. Ayrıca y' türevini sıfır yapan nokta $x=1$ olup bu noktada fonksiyon tanımlı olmadığından türevi de yoktur.

Ancak $x<1$ için türev negatif ve $x>1$ için türev pozitif olduğundan fonksiyon $(-\infty,-1)$ aralığında azalan, $(3,+\infty)$ aralığında artandır. Ekstremum nokta yoktur.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$-$		$+$	
y	$\searrow$		$\nearrow$	

(5) : İkinci türevi sıfır yapan nokta yoktur. Ayrıca ikinci türevi tanımsız yapan noktalar da tanım kümesinde yoktur. O halde büküm noktası yoktur. Ancak tanım kümesinin her noktasında ikinci türev daima negatif olduğundan eğri daima aşağı konkav (konveks) olur.

(6) : $x=-1$ noktasında sol limit ve $x=3$ noktasında sağ limit değerleri sonlu olduğundan Düşey Asimptot yoktur.

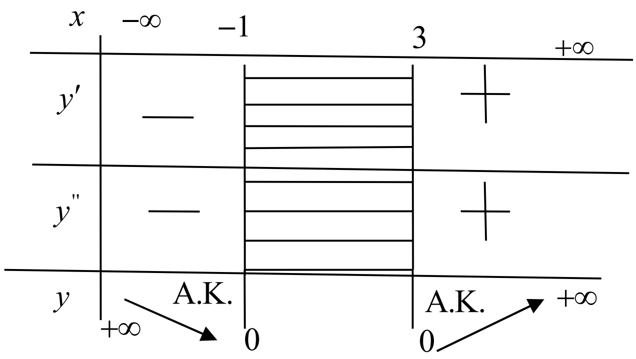
$$\lim_{x\to\mp\infty}\sqrt{x^2-2x-3}=+\infty$$

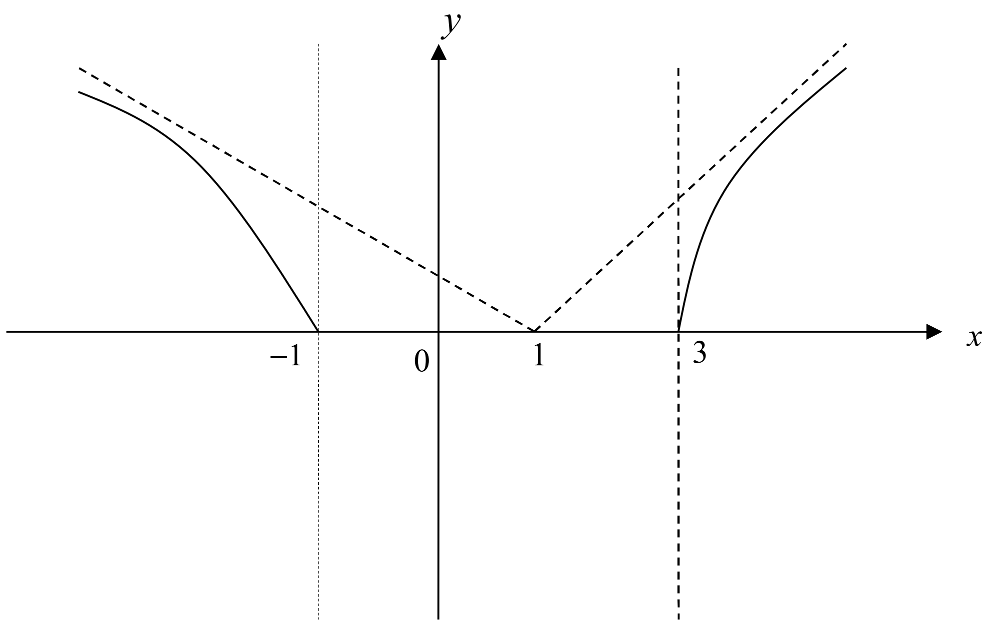
olduğundan Yatay Asimptot yoktur. Ayrıca,

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left|\sqrt{x^2-2x-3}-|x-1|\right|=0$$

olduğundan $y=|x-1|$ E.A. olur.

(7)


x
−∞
−1
3
+∞
y′
—
+
y''
—
+
y
A.K.
A.K.
+∞
0
0
+∞


y
x
−1
0
1
3