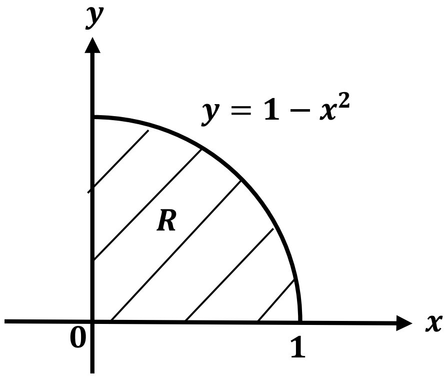
ALAN VE SONLU TOPLAMLARLA TAHMİNDE BULUNMAK

Belirli integral, matematik ve bilim için önemli büyüklükleri tanımlamak ve hesaplamak için kalkülüste kullanılan anahtar bir araçtır. Bunlar arasında olasılıklar, eğri uzunlukları, hacimler, alanlar gibi büyüklükler vardır.

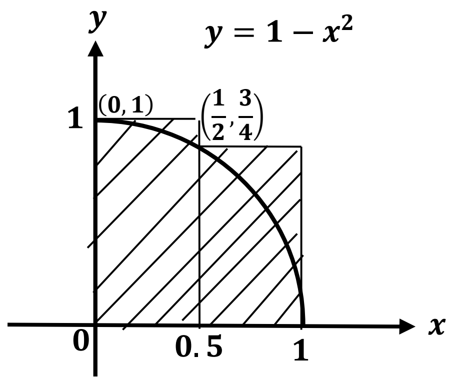
Belirli intagralleri formül haline getirmenin temeli uygun sonlu toplamlar oluşturmaktır. Bir düzlemdeki bölgenin alanının veya kapalı bir aralıkta bir fonksiyonun ortalama değerinin ne anlama geldiğini kesin olarak tanımlamaya ihtiyaç vardır. Bu büyüklüklere önce sonlu toplamlarla yaklaşarak integrale başlayacağız.



Şekil 1

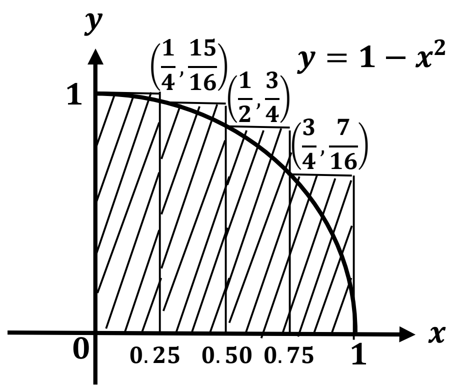
$x-$ekseninin üstünde, $y=1-x^2$ eğrisinin altında ve $x=0$ ile $x=1$ düşey doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmayı istediğimizi varsayalım. Bunu yapmanın kolay bir formülü yoktur. Buna rağmen basit bir yaklaşımda bulunabiliriz.

(a) R bölgesini kapsayan iki dikdörtgen kullanılması R nin alanı için bir üst tahmin verir.



Şekil 2 (a)

(a) Dört dikdörtgen daha iyi bir tahmin verir. Her iki tahmin alanın gerçek değerinden fazladır.



Şekil 2 (b)

$[0,1]$ aralığında dikdörtgenin tabanını oluşturan alt aralıkta f nin en büyük değerinin hesaplanıp ($y=1-x^2$, $[0,1]$ aralığında azalan olduğu için sol uç noktadaki değer hesaplanır), iki dikdörtgenin alanı toplanırsa, R bölgesinin A alanının bir yaklaşık değeri

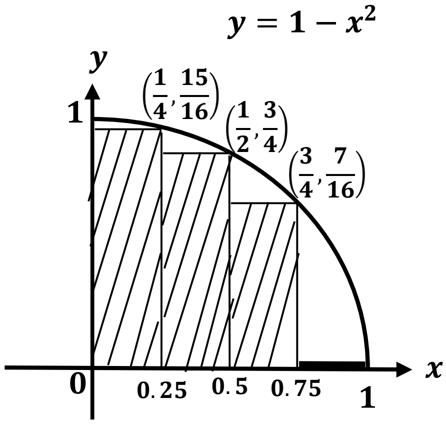
$$A \approx 1.\frac{1}{2}+\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=\frac{7}{8}=0.875$$

olarak bulunur. $[0,1]$ aralığı 4 parçaya bölündüğünde

$$A \approx 1.\frac{1}{4}+\frac{15}{16}.\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{1}{4}+\frac{7}{16}.\frac{1}{4}=\frac{25}{32}=0.78125$$

yaklaşımı elde edilir.

Dikdörtgenler R bölgesini içine aldığından bu tahminler gerçek alandan büyüktür. Bu yüzden yaklaşık değerlere (0.875, 0.78125) **üst toplam** denir. Burada yaklaşık değerlerden 0.78125 değerinin A ya daha yakın olduğuna dikkat ediniz.



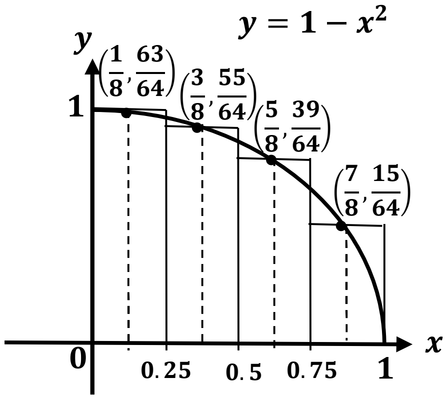
Alanı tahmin için yukarıdaki şekildeki gibi R bölgesinin dört dikdörtgeni kapsadığını varsayalım. Yükseklikleri, her alt aralıkta f fonksiyonunun aldığı minimum değer olan bu dikdörtgenlerin alanları toplamı R nin alanına **alt toplam** yaklaşımını verir.

$$A \approx \frac{15}{16}.\frac{1}{4} + \frac{3}{4}.\frac{1}{4} + \frac{7}{16}.\frac{1}{4} + 0.\frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125$$

Bu tahmin A dan küçüktür. A nın değeri alt ve üst toplamlar arasındadır.

$$0.53125 < A < 0.78125$$

Bu durumda hatanın büyüklüğü içinde bir sınır elde ederiz; burada hata $0.78125 - 0.53125 = 0.25$ değerinden büyük olamaz.



Bir diğer tahmin de yükseklikleri tabanlarının orta noktalarında f nin değerlerine eşit olan dikdörtgenler kullanılarak elde edilebilir. Bu tahmin yöntemi alan yaklaşımı için **orta nokta kuralı** diye adlandırılır. Bu kural bir alt toplam ile bir üst toplam arasında bir tahmin verir, ama alanın gerçek değerinden büyük ya da küçük olduğu açık değildir. Orta nokta kuralı R alanını şöyle tahmin eder;

$$A \approx \frac{63}{64}.\frac{1}{4}+\frac{55}{64}.\frac{1}{4}+\frac{39}{64}.\frac{1}{4}+\frac{15}{64}.\frac{1}{4}=0.671875$$

Hesapladığımız her toplamda f fonksiyonunun tanımlı olduğu $[a,b]$ aralığı $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ eşit uzunluklu $n-$ tane alt aralığa bölünmüş ve f her alt aralıktaki bir noktada hesaplanmıştır. Birinci aralıktaki nokta c_1, ikinci aralıktaki c_2 …vs. Bu durumda tüm sonlu toplamlar şu biçimdedir:

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x \ .$$

Gidilen mesafe

Bir otoyolda yönünü değiştirmeden ilerleyen bir otomobilin $v(t)$ hız fonksiyonu ile $t=a$ ve $t=b$ zaman aralığında ne kadar yol aldığını öğrenmeyi istediğimizi varsayalım. Eğer $v(t)$ nin $F(t)$ ters türevini biliyorsak, $s(t)=F(t)+c$ yazarak otomobilin konum fonksiyonu $s(t)$ yi bulabiliriz. Eğer hız fonksiyonu sürat göstergesindeki, sadece değişik zamanlarda okumalarla bilinirse, bir ters türev tespiti mümkün olamaz. O zaman ne yapacağız?

$[a,b]$ zaman aralığını kısalt zaman aralıklarına böleriz; her aralıkta hız neredeyse sabit olur. Sonra her alt zaman aralığında gidilen mesafeye bilinen uzaklık formülü yaklaşımını yaparız:

$$mesafe = hız \times\ zaman$$

Bölünen aralıklar aynı bir Δt uzunluğuna sahip olsun. Her bir aralıktan bir t_i , $i = 1,2,...,n$ olacağına göre alınan D yolu için bir yaklaşım

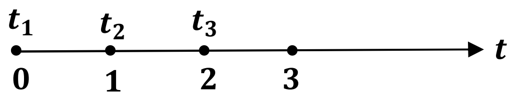
$$D \approx v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + ... + v(t_n)\Delta t$$

olur. Burada n sayısı alt aralıkların toplam sayısıdır.

ÖRNEK: Dik olarak havaya atılan bir merminin hızı $f(t) = 160 - 9.8t\ \ (m/sn)$ dir. Yukarıdaki tekniği kullanarak merminin ilk 3 saniyede ne kadar yükseldiğini tahmin ediniz. Toplamlar kesin sonuç olan 453.9 sayısına ne kadar yakındır?

ÇÖZÜM: $f(t)$ azalan olduğunda, alt aralıklardan sol uç noktaları seçmek bir üst toplam tahmini, sağ uç noktaları seçmek ise bir alt toplam tahminini verir.

(a) f nin sol uç noktalarda hesaplandığı birim uzunluklu üç alt aralık bir üst toplamı verir:



$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$$

olmak üzere D yüksekliğinin bu durum için tahmini değeri şöyle olur:

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$

$$= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1)$$

$$= 450.6$$

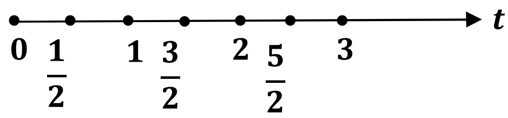
(b) f nin sağ uç noktalarda hesaplandığı 1 birim uzunluklu üç alt aralık bir alt toplam verir:

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$

$$= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1)$$

$$= 421.2$$

(c) Uzunluğu $\frac{1}{2}$ olan alt aralıkta:



Bu tahminler sol uç noktaları kullanarak bir üst toplam verir:

$$D \approx 443.25$$

Sağ uç noktaları kullanarak bir alt toplam verir:

$$D \approx 428.55$$

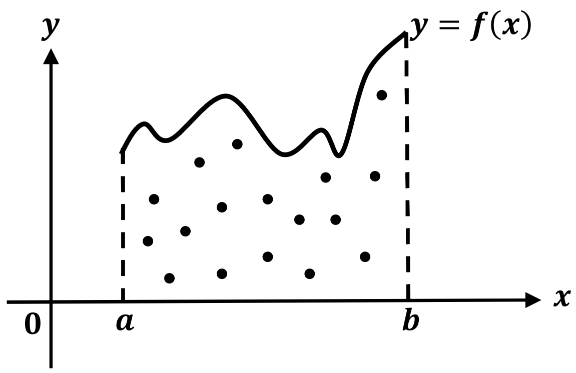
Bu altı aralıklı tahminler üç aralıklı tahminlere göre sonuca biraz daha yakındır. Alt aralıklar kısaldıkça sonuçlar daha da iyileşir.
Üst toplamlar gerçek değer 453.9 sayısına yukarıdan yaklaşırken, alt toplamlar alttan yaklaşır. Gerçek değer bu alt ve üst toplamlar arasında bulunur. O halde üç şıkta verilen durumlar için hatanın büyüklüğü

$$|gerçek\ değer - hesaplanan\ değer| = |435.9 - 428.55| = 7.35$$

Alt aralıkların sayısı artırıldığında bu hata büyüklüğü azalacaktır.

NEGATİF OLMAYAN SÜREKLİ BİR FONKSİYONUN ORTALAMA DEĞERİ

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış bir f fonksiyonunun ortalama değeri; $y = f(x)$ eğrisi, $x-$ ekseni ve $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlanmış bölgenin alanının $(b-a)$ ile bölümüne eşittir.



ÖRNEK: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığındaki ortalama değerini tahmin ediniz.

ÇÖZÜM: Sözü edilen alan A ile gösterilirse, A yı hesapladıktan sonra $\pi - 0 = 0$ değerine bölmek gerekir. Ancak şu anda alanı hesaplamak için basit bir yöntem yoktur. Bu nedenle probleme sonlu toplamlarla yaklaşabiliriz.

Bir üst toplam elde etmek için $[0,\pi]$ aralığında, $y = \sin x$ eğrisi ve $x-$ ekseninin arasındaki bölgeyi birlikte içeren ve genişlikleri aynı bir $\frac{\pi}{8}$ değeri olan sekiz dikdörtgenin alanlarını toplarız. O zaman A nın yaklaşık değeri

$$A \approx \left[\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{8}\right].\frac{\pi}{8}$$

$$\approx (0.38 + 0.71 + 0.92 + 1 + 1 + 0.92 + 0.71 + 0.38).\frac{\pi}{8}$$

$$= (6.02).\frac{\pi}{8} \approx 2.365$$

olarak bulunur. $y = \sin x$ in $[0,\pi]$ aralığındaki ortalama değeri için tahmini alanı π ile böldüğümüzde $\frac{2.365}{\pi} \approx 0.753$ değerine ulaşırız.

Alana yaklaşım için bir üst toplam kullandığımızdan bu tahmin $\sin x$ in $[0,\pi]$ üzerindeki gerçek ortalama değerinden daha büyüktür. Eğer her dikdörtgenin giderek inceldiği daha çok dikdörtgen kullanılırsa gerçek ortalama değere daha çok yaklaşırız.

ALIŞTIRMALAR

1) Sonlu yaklaşımları kullanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin altındaki alanı tahmin ediniz:

(a) $f(x) = x^2,\ x = 0\ ve\ x = 1$ arasında

(b) $f(x) = x^3,\ x = 0\ ve\ x = 1$ arasında

(c) $f(x) = \frac{1}{x},\ x = 1\ \ ve\ x = 5$ arasında

(d) $f(x) = 4 - x^2,\ x = -2\,ve\ \ x = 2$ arasında

NOT: i: Eşit genişlikli iki dikdörtgen ile bir alt ve üst toplam

ii: Eşit genişlikli dört dikdörtgen ile bir alt ve üst toplam hesaplayarak yaklaşımları yapınız.

2) Orta nokta kuralını kullanarak, aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin altındaki alanı önce iki ve sonra dört dikdörtgen kullanarak tahmin ediniz.

(a) $f(x)=x^2$, $x=0$ ve $x=1$ arasında

(b) $f(x)=x^3$, $x=0$ ve $x=1$ arasında

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x=1$ ve $x=5$ arasında

(d) $f(x)=4-x^2$, $x=-2$ ve $x=2$ arasında

3) Bir cisim helikopterden aşağıya bırakılıyor. Cisim gittikçe hızlanıyor, fakat ivmesi hava direncinden dolayı zamanla azalıyor. İvme m/s^2 olarak ölçülmektedir ve bırakıldıktan $5\ sn$ sonraki her saniyede ivme aşağıdaki gibi kaydediliyor:

t	0	1	2	3	4	5
a	9.75	5.92	3.59	2.18	1.32	0.80

(a) $t=5$ iken sürat için tahmini bir üst değer bulunuz.
(b) $t=5$ iken sürat için tahmini bir alt değer bulunuz.
(c) $t=3$ iken düşülen mesafe için tahmini bir üst değer bulunuz.

4) Verilen aralığı eşit uzunluklu dört aralığa bölerek ve f yi alt aralıkların orta noktalarında hesaplayarak, bu aralık üzerinde f nin ortalama değerini tahmin etmek için sonlu toplamları kullanınız.

(a) $[0,2]$ üzerinde $f(x)=x^2$

(b) $[1,9]$ üzerinde $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(c) $[0,2]$ üzerinde $f(x)=\dfrac{1}{2}+\sin^2 \pi t$

(d) $[0,4]$ üzerinde $f(x)=1-\left(\cos\dfrac{\pi t}{4}\right)^4$.

Sigma Sembolü ve Sonlu Toplamların Limitleri

Σ : Sigma sembolü

Her bir $k=1,2,\ldots,n$ için a_k sayıları verildiğinde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

formülü1 den n ye n tane terimin toplamını verir.

Sonlu Toplamlar İçin Cebir Kuralları

1. Toplam Kuralı :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. Fark Kuralı :

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. Sabitle Çarpım Kuralı : (Herhangi bir c sabiti)

$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

4. Sabit Değer Kuralı : (c herhangi bir sabit değer)

$$\sum_{k=1}^{n} c = n.c$$

ÖRNEK 1 .

(a)

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k = (-1)^1.1 + (-1)^2.2 + (-1)^3.3 = -1 + 2 - 3 = -2$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} = (1/2) + (2/3) = 7/6$$

ÖRNEK 2 .$1 + 3 + 5 + 7 + 9$toplamını sigma toplamı olarak belirtiniz.

Çözüm.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k-1) = \sum_{k=0}^{4}(2k+1) = \sum_{k=2}^{6}(2k-3)$$

ÖRNEK 3.

(a)

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 ;$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k ;$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{3}(k+4) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 4 = (1+2+3) + (3.4) = 18 ;$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n.\frac{1}{n} = 1$$

ÖRNEK 4. İlk n doğal sayının toplamı :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+n) + (n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1) \\ &= (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + \cdots (n+1) \\ &= n(n+1),\end{aligned}$$

yani

Aşağıda ifade edilen kareler ve küpler toplamı için formüller matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanır.

İlk n kare :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

İlk n küp :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

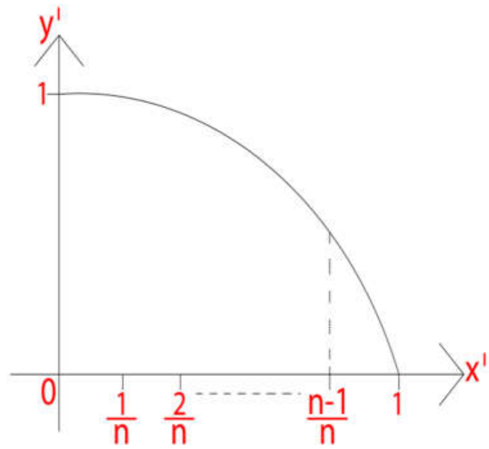
Sonlu Toplamların Limitleri

ÖRNEK 5. Sayıları sonsuza ve genişlikleri sıfıra yaklaşan eşit genişlikli dikdörtgenleri kullanarak, $y = 1 - x^2$ eğrisinin grafiği altında ve x - ekseninde $[0,1]$aralığı üstündeki R bölgesi alanının alt toplam yaklaşımları için limit değerini bulunuz.

Çözüm.$[0,1]$aralığını$\Delta x = {}^{(1-0)}/_{n} = {}^{1}/_{n}$ eşit uzunluklu n tane alt aralığa bölüp n tane dikdörtgen ile bir alt toplam oluşturalım.

Alt aralıklar

: $\left[0, {}^{1}/_{n}\right], \left[{}^{1}/_{n}, {}^{2}/_{n}\right], \dots, \left[{}^{(n-1)}/_{n}, {}^{n}/_{n}\right].$



Bu alt aralıkların sağ uç noktalarını kullanarak bir yaklaşım :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\left({}^{k}/_{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= n.\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1 - \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Aranan limit değer :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)=1-\frac{2}{6}={}^{2}/_{3}$$

Benzer bir hesaplama üst toplam yaklaşımlarının da yakınsadığını gösterir. Her sonlu toplam yaklaşım

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left({}^{1}/_{n}\right)$$

değeri de $2/3$ e yaklaşır, çünkü her sonlu toplam yaklaşımı alt ve üst toplam yaklaşımları arasındadır.

Riemann Toplamları

a ve b arasında $(n-1)$ tane nokta seçilsin :

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b=x_n$$

Bu durumda

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$$

kümesine$[a,b]$ kapalı aralığının bir 'bölünüşü' denir.

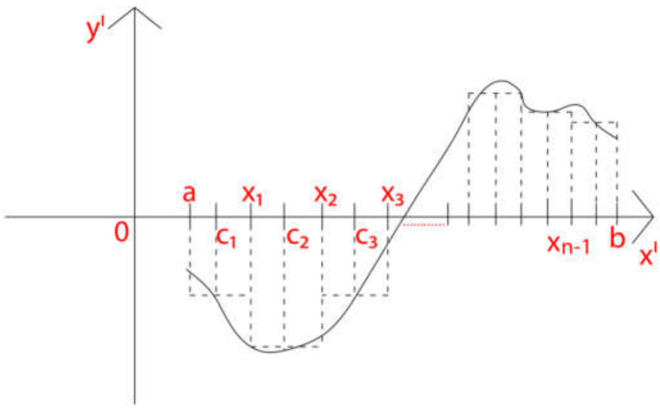
P bölünüşü $[a,b]$ yi n tane kapalı alt aralığa böler :

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$$

O zaman k. nci alt aralık : $[x_{k-1},x_k]$

Bu k. nci alt aralığın uzunluğu : $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$

Şimdi her bir alt aralıktan bir nokta seçilsin : $c_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\dots,n$



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

toplamına$f$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki 'Riemann toplamı' denir.

Bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölünüşünün normu $\|P\|$ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır :

$$\begin{aligned} \|P\| &= \text{maks}\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} \\ &= \text{maks}\{\Delta x_k : k = 1,2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Yani P bölünüşünün normu alt aralıkların uzunluklarının en büyüğüdür.

Belirli İntegral

Tanım. $f(x)$bir$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir J sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki 'belirli integrali' denir ve J sayısı

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Riemann toplamının limitidir :

Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $[a, b]$ nin $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölünüşü ve c_k sayısının $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki her seçimi için

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Bu tanım bölünüşün normunun sıfıra yaklaşması durumunda bir limit alma işlemini gerektirir.

Alt aralıkların hepsi eşit, yani $\Delta x = {(b-a)}/{n}$ genişlikli olması durumunda, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere (yani $c_k, k.$ alt aralıktan seçilmek üzere), Riemann toplamları şöyle oluşturulur :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Eğer $n \to \infty$ iken bu Riemann toplamlarının limiti varsa ve J sayısına eşitse, bu J sayısı $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde belirli integralidir. O halde

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

yazılır. Belirli integralin tanımındaki J sayısı yerine

$$\int_a^b f(x)dx$$

sembolü kullanılır ve '$a$dan$b$ ye kadar $f(x)dx$ integrali' veya bazen 'a dan b ye kadar $f(x)$ in x değişkenine göre integrali' diye ifade edilir. Belirli integral sembolündeki bileşen kısımların isimleri şöyledir :

a : integralin alt sınırı

b : integralin üst sınırı

$f(x)$: integrand

x : integral değişkeni

Tanımdaki koşul sağlandığında $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki Riemann toplamlarının $J = \int_a^b f(x)dx$ belirli integraline yakınsar olduğunu ve $f(x)$ in $[a, b]$ üzerinde 'integrallenebilir' olduğunu söyleriz.

İntegrallenebilen ve İntegrallenemeyen Fonksiyonlar

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde her fonksiyonun integrali yoktur. Hatta bazı fonksiyonlar bu aralıkta sınırlı olsalar bile integrallenemezler. Şimdi $[a, b]$ de hangi koşulları sağlayan fonksiyonların integrallenebildiğini söyleyeceğiz.

Özel olarak $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan her fonksiyon ve dolayısıyla en fazla sonlu sayıda sıçramalı süreksizliğe sahip her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir.

TEOREM 1 -Sürekli Fonksiyonların İntegrallenebilirliği : Eğer bir f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ise veya bu aralıkta en çok sonlu sayıda sıçramalı süreksizliği varsa, o zaman $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali vardır, yani f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında integrallenebilirdir.

ÖRNEK 1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun$[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde Riemann integrali yoktur.

Eğer $[0,1]$ kapalı aralığının bir P bölünüşü alınır ve c_k sayısı f fonksiyonunun $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı üzerindeki maksimum değerini verecek şekilde seçilirse, bu P bölünüşüne karşılık gelen Riemann toplamı şöyledir:

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\Delta x_k = 1$$

Çünkü her $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı$f(c_k) = 1$ olacak şekilde bir c_k rasyonel sayısını içerir. Böylece bu seçimi kullanan her Riemann toplamı 1 dir ve bu seçimleri kullanan Riemann toplamlarının limitleri de 1 dir.

Diğer yandan, eğer c_k noktasını f fonksiyonunun $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı üzerindeki minimum değerini verecek şekilde alırsak, her $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığı $f(c_k) = 0$ olacak şekilde bir irrasyonel sayı içerdiğinden, Riemann toplamı şöyle olur :

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\Delta x_k = 0$$

Bu seçimleri kullanan Riemann toplamlarının limiti sıfırdır. Limit c_k noktalarının seçimine bağlı olduğu için f fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında integrallenemez.