



İŞLETME MATEMATİĞİ

ORTAK DERS

PROF. DR. ERGÜN EROĞLU

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

ORTAK DERS



İŞLETME MATEMATİĞİ

Prof. Dr. Ergün Eroğlu

Yazar Notu

Elinizdeki bu eser, İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi'nde okutulmak için hazırlanmış **bir ders notu niteliğindedir.**

ÖNSÖZ

Sevgili öğrenciler;

Sizler için hazırlamış olduğum “İşletme Matematiği” adlı kitabımın amacı; sizlere işletme matematiği kavramlarını vermek ve bu kavramların işletme ve iktisat problemlerinin çözümünde kullanılmalarını sağlamaktır. İşletme Matematiği dersinde ana kaynak olarak yararlanabileceğiniz bu kitapta işletme ve iktisat problemlerine ağırlık verilmeye çalışılmıştır. Matematik bilgilerinin işletme ve iktisat problemlerinin çözümüne ışık tutabilmesi ve rehberlik edebilmesi için hazırlamış olduğum bu kaynağın uzun yıllar sizlere yol göstereceğini ümit etmekteyim. Bu kitabı farklı kılmak ve katkı sağlamak amacıyla bölüm sonlarına çözümlü çalışma soruları ve çoktan seçmeli sorular da eklenmiştir. Kitabımızda, İşletme Matematiği dersinin tüm konuları ele alınmaktadır.

Siz sevgili öğrencilerimizi geleceğe hazırlamak amacıyla sunduğum bu kitabımda gözden kaçan eksiklikler ve farkına varılmamış hatalarım olduysa, bu konuda sizlerden gelecek katkılarla ve her türlü görüşünüz ile sorunların en aza indirilebileceğini ümit etmekteyim.

Son olarak siz değerli öğrencilerimiz HOŞGELDİNİZ... Sizleri aramızda görmekten mutluluk duymaktayım. Üniversite hayatınızda başarı merdivenlerini koşarak çıkmanız dileğiyle...

“İşletme Matematiği” adlı kitabımın öğrencilerime derslerinde başarılı olmaları için yardımcı kaynak oluşturması dışında çok daha önemlisi problem çözme ve sayısal düşünme alışkanlıklarını kazandırması yönünde yararlı bir kaynak olmasını dilerim.

Şubat 2019

Prof. Dr. Ergün EROĞLU
İstanbul Üniversitesi
Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
KISALTMALAR.....	iv
YAZAR NOTU	v
1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR.....	1
1.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar	7
1.2. Üç Boyutlu Koordinat Sistemi (Üç Boyutlu Uzay).....	10
1.3. Üç Boyutlu Uzayda İki Değişkenli Fonksiyon.....	13
1.4. Üç Değişkenli Fonksiyonlar	16
1.5. Çok Değişkenli Fonksiyonlar	17
2. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA EKSTREMUM.....	26
2.1. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit	32
2.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik.....	32
2.3. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Kısmi Türevler	33
2.4. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda İkinci Dereceden Kısmi Türevler	34
2.5. Yerel Maksimum ve Yerel Minimum	36
2.6. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Ekstremum Noktaları	38
2.7. İkame ve Tamamlayıcı Ürünler	43
3. MATRİS VE VEKTÖRLER.....	57
3.1. Matris Gösterimi.....	63
3.2. Vektörler.....	64
3.3. Matris Tanımları.....	64
3.3. Matrislerde Matematiksel İşlemler	68
4. DETERMİNANT VE TERS MATRİS.....	84
4.1. Bir matrisin determinantı.....	90
4.2. Minör ve Kofaktör	93
4.3. Bir Matrisin Rankı	96
4.4. Bir Matrisin Tersi	97
5. DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ ve ÇÖZÜMLERİ	107
5.1. Doğrusal Denklem Sistemi.....	113
5.2. Matrisin Rankı	115
5.3. Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümleri.....	118
5.4. Homojen Denklem Sistemleri	120
6. DOĞRUSAL DENKLEM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ (GAUSS VE GAUSS-JORDAN ELİMİNASYONU).....	128

6.1.	Gauss Eliminasyonu Yöntemi	134
6.2.	Gauss - Jordan Eliminasyonu Yöntemi	137
7.	TERS MATRİS VE CRAMER YÖNTEMLERİ İLE DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ	149
7.1.	Ters Matris Yöntemi ile Denklem Çözümü	155
7.2.	Cramer Yöntemi	158
8.	GİRDİ ÇIKTI (INPUT-OUTPUT) ANALİZİ	171
8.1.	Girdi – Çıktı Analizi	177
8.2.	Girdi-Çıktı Analizinin Varsayımları	178
9.	DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE GRAFİK YÖNTEM.....	195
9.1.	Doğrusal programlama Tekniği Varsayımları	201
9.2.	Doğrusal Programlama Probleminin Matematiksel Modeli	201
9.3.	Doğrusal Programlama Probleminin Grafik Yöntemle Çözümü	206
10.	SİMPLEKS YÖNTEM (MAKSİMİZASYON PROBLEMİ).....	218
10.1.	Simpleks Yöntem	224
10.2.	Simpleks Yöntemle Çözüm Aşamaları	226
11.	SİMPLEKS YÖNTEM (MİNİMİZASYON PROBLEMİ)	240
11.1.	Minimizasyon Probleminin Simpleks Yöntemle Çözümü	246
12.	DUALİTE VE DUYARLILIK ANALİZİ	260
12.1.	Dualite (İkilik veya İkincil Problem)	266
12.2.	Duyarlılık Analizi	268
12.3.	Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişim	269
12.4.	Sağ Taraf Sabitlerindeki (<i>bi</i>) Değişim	272
13.	TRANSPORT PROBLEMLERİNDE ATAMA	282
13.1.	Transport Probleminin Doğrusal Programlama ile Modellenmesi	288
13.2.	Ulaştırma Algoritması	291
13.3.	Kuzeybatı Köşe Yöntemi	292
13.4.	Minimum Maliyetli Atama (Kestirme Dağıtım)	292
13.5.	Russel Yaklaşım Yöntemi	293
13.6.	Vogel Yaklaşım Yöntemi (Metodu) (VAM)	295
14.	TRANSPORT PROBLEMİNDE OPTİMALLIK TESTLERİ	303
14.1.	Atlama Taşı (Boş Hücre Çevrimleri)	309
14.2.	MO-Dİ (Modified Distribution) Yöntemi	311
14.3.	Ulaştırma Problemlerinde Dejenerasyon	314
14.4.	Yasaklanmış Yol Problemi	315
KAYNAKÇA		322

KISALTMALAR

DP: Doğrusal Programlama
 $r(A)$ =A Matrisinin Rankı
VAM: Vogel Atama Metodu
RAM: Russel Atama Metodu
BBN: Başabaş Noktası
Det: Determinant

YAZAR NOTU

Değerli öğrencilerim,

İşletme Matematiği dersi, daha önceki yıllarda görmüş olduğunuz derslerden biraz farklıdır. Doğrusal Programlama, Dualite ve duyarlılık analizi ile ulaştırma probleminin çözümü konuları ile ilk defa karşılaşacak olabilirsiniz. İşletme problemlerinin matematiksel olarak modellenmesi işletme matematiği bilgileri yardımıyla gerçekleştirilecektir. Özellikle 3. ve 4. Sınıfta alacağınız sayısal ağırlıklı derslerdeki başarınız İşletme Matematiği dersinden başarınıza bağlıdır. Bu nedenle İşletme Matematiği dersinde anlatılan konuları iyice kavramanız sizler için önemli olacaktır.

İyi bir yıl geçirmeniz dileği ile.

Prof. Dr. Ergün EROĞLU
İÜ Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi

1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 1.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar
- 1.2. Üç Boyutlu Koordinat Sistemi (Üç Boyutlu Uzay)
- 1.3. Üç Boyutlu Uzayda İki Değişkenli Fonksiyon
- 1.4. Üç Değişkenli Fonksiyonlar
- 1.5. Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1) İki değişkenli fonksiyon ne demektir?
- 2) Üç değişkenli fonksiyona bir örnek veriniz?
- 3) Üç boyutlu uzayda iki değişkenli bir fonksiyon nasıl bir şekil oluşturur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Çok Değişkenli Fonksiyonun Tanımı	Çok değişkenli fonksiyonun tanımını bilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak
Üç Boyutlu Uzay	Üç boyutlu uzayda noktaların gösterimini yapabilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek
İki Değişkenli Fonksiyonlar	İki değişkenli bir fonksiyonu tanımlayabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek çözerek
Üç Değişkenli Fonksiyonlar	Üç değişkenli bir fonksiyonu tanımlayabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

**Çok değişkenli Fonksiyon
Üç Boyutlu Uzay**

Giriş

Bu bölümde gerçek hayattaki işletme, ekonomi ve sosyal bilimlere ait problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde sıkça kullanılan çok değişkenli fonksiyonlar ele alınmaktadır.

Bir durumdan diğerine, gözlemden gözleme farklılık gösteren özelliklere “**değişken**” adı verilir. Değişkenin belli özelliklerine karşı getirilen sayı ve sembollere ise “değişkenin değeri” adı verilmektedir. Değişken adı verilen iki terimin arasındaki matematiksel ilişkiye fonksiyon adı verilir. Matematikte değişkenler küçük italik harflerle gösterilir. x , y , z değişkenleri göstermek için en sık kullanılan harflerdir.

Örneğin değişkenler x ve y olsun. Eğer x için her değer y için sadece tek bir değer ile ilişkiyse, y değişkeni “ **x değişkeninin fonksiyonudur**” denilir. Bu fonksiyondaki x “**bağımsız değişken**” ve y ise “**bağımlı değişkendir**”, çünkü y ’nin değeri x ’in değerine bağlıdır. Bağımsız değişken fonksiyonun girdilerinden herhangi birisidir. Bağımlı değişken ise fonksiyonun çıktısıdır. Kısacası, “eğer x verilmişse, o zaman y bulunur” ifadesinde x bağımsız değişkeni, y ise bağımlı değişkeni simgelemektedir.

Temel Matematik dersi içeriğinden de hatırlanacağı gibi, bir tane bağımsız değişkene sahip olan fonksiyonlara tek değişkenli fonksiyon denmektedir. Tek değişkenli fonksiyonda y bağımlı değişken, x ise bağımsız değişken olup; tek değişkenli fonksiyon;

$$y = f(x)$$

biçiminde gösterilir.

Tek değişkenli fonksiyonlar, gerek teoride gerekse uygulamada karşılaşılan problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde çoğunlukla yetersiz kalırlar. Bu nedenle pek çok problem birden fazla değişkenin kontrol edilmesini gerektirir. Bu sebeplerden dolayı, değişken sayısı birden fazla olan fonksiyonları analiz edebilmek için çok değişkenli fonksiyonların ayrıntılı incelenmesi gerekir. Bu bölümde iki değişkenli fonksiyonlar ağırlıklı olmak üzere çok değişkenli fonksiyonlar üzerinde durulmaktadır.

1.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar

Basit anlatımla iki girdisi tek çıktısı olan fonksiyona iki değişkenli fonksiyon denir. Bir diğer ifade ile iki bağımsız değişkeni olan fonksiyonlara “**iki değişkenli fonksiyonlar**” denir.

Bir marangoz atölyesinde üretilen (satılan) tahta masa ve tahta sandalyelerden elde edilecek gelir, iki değişkenli fonksiyonlara bir örnektir. x ve y , bir dönemdeki sırasıyla masa ve sandalye üretim miktarlarını göstermek üzere, birim satış fiyatları masa için 400 TL ve sandalye için 100 TL ise, bu atölyenin tahta masa ve sandalye üretiminden (satışından) bir dönemde elde edeceği gelir;

$$R(x, y) = 400x + 100y$$

fonksiyonu ile hesaplanır. Burada R (toplam gelir) bağımlı; x ve y değişkenleri bağımsız değişkenlerdir. x ve y üretim (satış) miktarlarındaki değişim, bağımsız değişken olan R 'yi değiştirmektedir.

Genel olarak iki değişkenli fonksiyon $z = f(x, y)$ veya $y = f(x_1, x_2)$ biçiminde gösterilir. Burada x ve y (x_1 ve x_2) bağımsız değişken, z ise bağımlı değişkendir. Boyutları x ve y olan dikdörtgenin alanı,

$$S = xy$$

çevresinin uzunluğu,

$$P = 2(x + y)$$

dir. Burada dikdörtgenin alanı ve çevre uzunluğu kenar uzunluklarının iki değişkenli fonksiyonlarıdır.

Çoğu zaman, eğer bağımsız değişken sayısı 2 ise, bağımsız değişkenler x , y ve bağımlı değişken z ile; bağımsız değişken sayısı 3 ise, bağımsız değişkenler x , y , z ve bağımlı değişken w ile gösterilir.

Çok değişkenli fonksiyonlar günlük yaşamın pek çok alanında karşımıza çıkar ve pek çok problemin matematiksel modelinin kurulmasında ve çözülmesinde kolaylık sağlar.

Örnek:

A ve B gibi iki tür ürün üreten bir işletmenin haftalık sabit giderleri toplamı $FC = 10000$ TL, ürün başına hammadde maliyeti A ürünü için 200 TL, B ürünü için 400 TL'dir. Bu işletmenin haftada x adet A ürünü ve y adet B ürünü üretilmesi durumunda haftalık toplam maliyet;

$q_1 = A$ ürününün üretim (satış) miktarı

$q_2 = B$ ürününün üretim (satış) miktarı

$c_1 = A$ ürününün birim maliyeti

$c_2 = B$ ürününün birim maliyeti

Toplam maliyet fonksiyonu;

$$TC(q_1, q_2) = c_1 q_1 + c_2 q_2 + FC$$

$$TC(q_1, q_2) = 200q_1 + 400q_2 + 10000$$

olur ki, bu, iki değişkenli bir fonksiyon tanımlar. Burada q_1 ve q_2 bağımsız değişkenler, toplam maliyet (TC) ise bağımlı değişken olur. Bu işletme, haftada 20 adet A ürünü ve 30 adet B ürünü üretilirse, haftalık toplam gider, yukarıdaki ifadede q_1 yerine 20 ve q_2 yerine 30 yerleştirilerek;

$$TC(10, 15) = 200.20 + 400.30 + 10000 = 26000 \text{ TL}$$

olarak toplam maliyet hesaplanır.

Örnek:

Basit faiz için kullandığımız formül,

$$S = f(P, r, t)$$

$$S(P, r, t) = P + Prt$$

$$S(P, r, t) = P(1 + rt)$$

bir üç değişkenli fonksiyon tanımlar. 2000 TL, yıllık % 6 faiz oranı ile 3 yıl vadeli mevduat hesapta kalırsa paranın 3 yıl sonundaki toplam değeri;

$$S(P, r, t) = P + Prt = P(1 + rt)$$

$$S(2000, 0.06, 3) = 2000 + 2000.0.06.3$$

$$S(2000, 0.06, 3) = 2000 + 360 = 2360 \text{ TL}$$

olarak hesaplanır.

Tanım: Boş küme olmayan herhangi A, B ve C kümeleri verilsin ve $A \times B$ sembolü A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımını** gösterebilirsin:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

Eğer $A \times B$ kümesinden alınmış her (x, y) çiftini C kümesinden tek bir z elemanı ile eşleyen bir f kuralı verilmişse bu f kuralına $A \times B$ kümesinden C kümesine iki değişkenli fonksiyon denir ve sembolik olarak,

$$f : A \times B \rightarrow C, \quad z = f(x, y)$$

biçiminde gösterilir. $A \times B$ 'ye fonksiyonun tanım kümesi veya tanım bölgesi, C ye ise fonksiyonun değer kümesi denir.

Diğer bir deyişle, $D \subset R^2$ bölgesinin her (x, y) sayı çiftine bir ve yalnız bir $z = f(x, y)$ gerçel sayısını karşılık getiren bir f bağıntısına D 'den R 'ye ($R^2 \rightarrow R$) iki değişkenli fonksiyon denir. D 'ye fonksiyonun tanım kümesi, R 'ye fonksiyonun değer kümesi adı verilir.

$$G = \{z: z = f(x, y), (x, y) \in D, z \in R\}$$

Örnek:

$A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{-2, 1\}$, $C = \{2, 3, 5\}$ kümeleri verilsin. O zaman, $A \times B$ kartezyen çarpımı;

$$A \times B = \{ (-1, -2), (-1, 1), (2, -2), (2, 1), (3, -2), (3, 1) \}$$

olur. f kuralını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$f(-1, -2) = 3$$

$$f(-1, 1) = 5$$

$$f(2, -2) = 2$$

$$f(2, 1) = 5$$

$$f(3, -2) = 2$$

$$f(3, 1) = 2$$

Bu şekilde tanımlanmış f , $A \times B$ 'den C ye bir iki değişkenli fonksiyondur.

Örnek:

$f : R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ iki değişkenli fonksiyonu için $f(0, 1)$, $f(-2, 3)$ ve $a \in R$ olmak üzere, $f(a, a)$ yı hesaplayınız.

Çözüm:

$$f(0, 1) = 0^2 - 1^2 = -1$$

$$f(-2, 3) = (-2)^2 - 3^2 = -5$$

$$f(a, a) = a^2 - a^2 = 0$$

Örnek:

$f : R^2 \rightarrow R$ tanımlı, $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ iki değişkenli fonksiyonu için, $f(1, 3)$, $f(1, -1)$, $f(-1, 2)$ fonksiyon değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$f(1, 3) = 1^2 - 3.1.3 + 3^2 = 1$$

$$f(1, -1) = 1^2 - 3.1.(-1) + (-1)^2 = 5$$

$$f(-1, 2) = (-1)^2 - 3.(-1).2 + 2^2 = 11$$

Örnek:

$$f : R^2 \rightarrow R; \quad z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

iki değişkenli fonksiyonu için, $f(3, 4)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm:

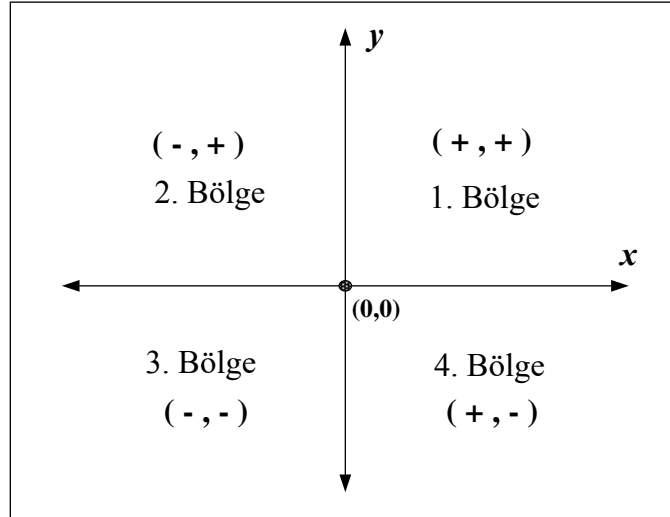
$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z(3, 4) = f(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$(x, y, z) = (3, 4, 5)$$

1.2. Üç Boyutlu Koordinat Sistemi (Üç Boyutlu Uzay)

Bir kâğıdın yüzeyi veya bir tahta düzlemi düşünülürse, bunların iki boyutları bulunmaktadır. Tahta yüzeyinin eni ve boyu gibi. Bu iki boyutlu düzlem, **xy-kartezyen koordinat sistemi** olarak adlandırılır. Kartezyen koordinat sisteminde bulunan noktaların x ve y olarak iki bileşeni bulunur. Orijin noktası olarak adlandırılan $(0, 0)$ noktası, x ve y eksenlerinin kesişim noktasıdır. Birinci bölgede bulunan noktaların her iki bileşeni de pozitif, ikinci bölgede bulunan noktaların, x değeri negatif, y değeri pozitif; üçüncü bölgede bulunan noktaların, her iki bileşeni de negatif, dördüncü bölgede bulunan noktaların, x değeri pozitif, y değeri ise negatif olur. Örneğin $(3, 5)$ noktası 1. bölgede, $(-4, 2)$ noktası ikinci bölgede, $(-5, -6)$ noktası üçüncü bölgede ve $(4, -1)$ noktası da dördüncü bölgede bulunur.

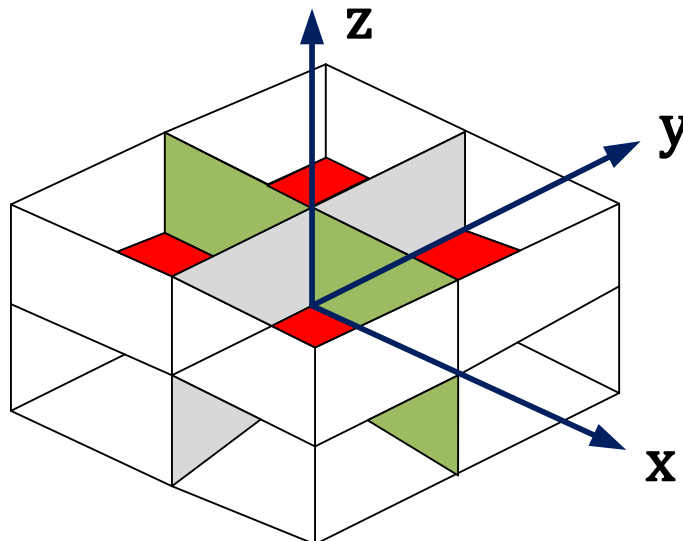


Şekil 1: İki boyutlu düzlemi (xy - kartezyen koordinat sistemi)

Bağımsız değişken x ekseninde, bağımlı değişken y ekseninde olmak üzere, tek değişkenli bir fonksiyon iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde gösterilirken, iki değişkenli bir fonksiyon ise ancak üç boyutlu dikdörtgensel koordinat sisteminde (üç boyutlu uzayda) gösterilebilir.

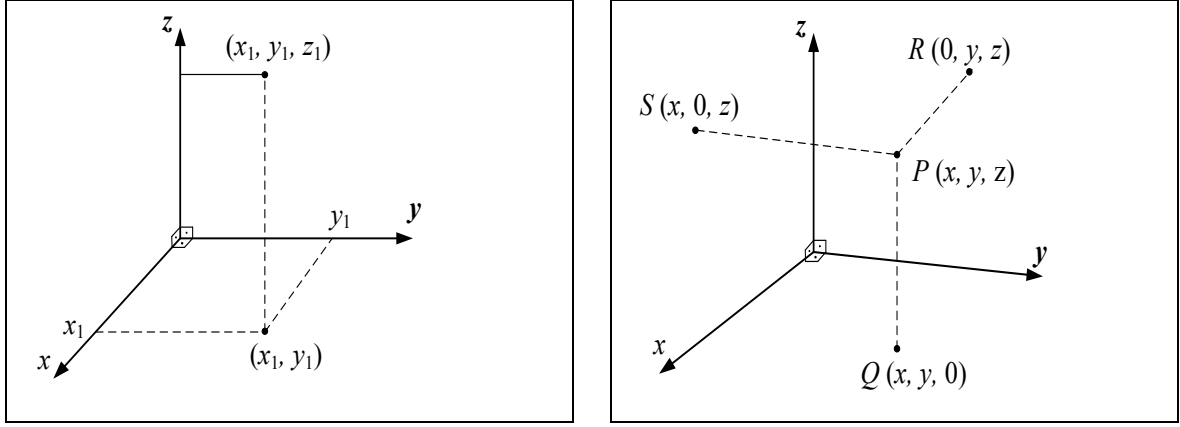
Üç tane birbirine dik dikdörtgensel yüzeylerin oluşturduğu eksen takımına üç boyutlu uzay denmektedir. Üç boyutlu dikdörtgensel koordinat sisteminde 8 bölge bulunmaktadır.

x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	-	+	-	+	-	+	-

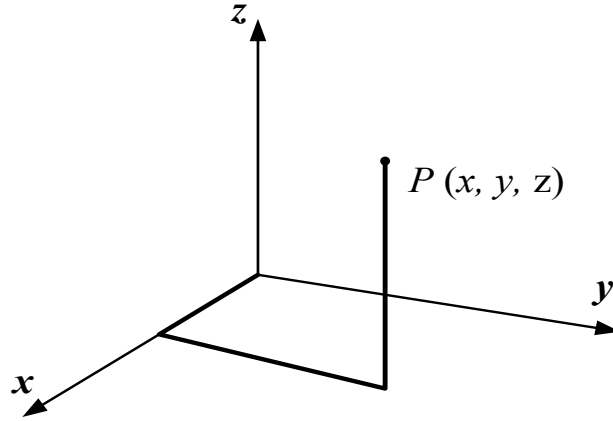


Şekil 2: Üç boyutlu dikdörtgensel koordinat sistemi

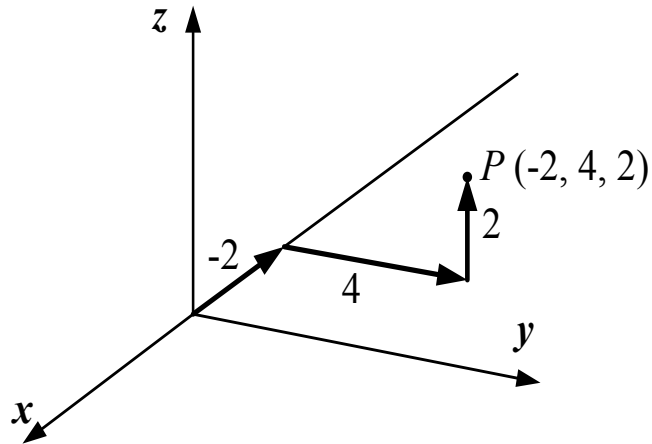
Aşağıdaki şekillerde (x, y, z) eksenlerinden oluşan bir üç boyutlu uzayda (x_1, y_1, z_1) noktası grafik üzerinde gösterilmektedir. İkinci şekilde ise üç boyutlu uzayda bir örnek nokta belirtilmiştir.



Şekil 3: Üç boyutlu uzayda bir noktanın gösterimi



Şekil 4: Üç boyutlu uzayda noktanın bileşenleri

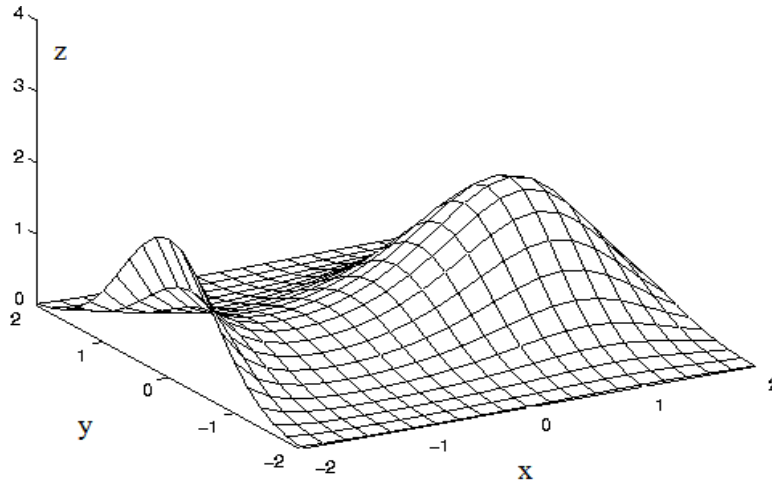


Şekil 5: Üç boyutlu uzayda $(-2, 4, 2)$ noktasının gösterimi

Şekil 5 dikkatle incelenirse, Üç boyutlu uzayda bir noktanın x , y ve z gibi üç bileşeni bulunduğu görülür. Örneğin $(-2, 4, 2)$ noktası bu uzayda konumlandırabilmek için, x eksenini boyunca negatif yönde 2 birim, y eksenini boyunca pozitif yönde 4 birim, z eksenini boyunca pozitif yönde 2 birim ilerlenir.

1.3. Üç Boyutlu Uzayda İki Değişkenli Fonksiyon

$y = f(x)$ (tek değişkenli fonksiyon) koşulunu sağlayan (x, y) değerleri iki boyutlu düzlemde (xy -kartezyen koordinat sisteminde) bir doğru veya eğriyi oluştururken, bir $z = f(x, y)$ (iki değişkenli fonksiyon) koşulunu sağlayan (x, y, z) noktaları üç boyutlu uzayda bir **yüzey** oluştururlar. Bu yüzeye, $z = f(x, y)$ fonksiyonunun grafiği denir. Aşağıda iki değişkenli bir fonksiyonun üç boyutlu uzayda (koordinat sistemindeki) grafiği örnek olarak verilmektedir.



Şekil 6: İki değişkenli bir fonksiyonun grafiği

Tek değişkenli fonksiyonların tanım kümesi bulunurken x yerine konabilecek sayılar kümesi belirtilir. Örneğin, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun tanım kümesi R^+ olur. Yani tanımlı olan x eksenini üzerindeki noktalar ifade edilmekte iken, iki değişkenli fonksiyonların tanım kümesi de (x, y) koordinat sisteminde gösterilmektedir. Buradan da anlaşılması gerekir ki, bu noktalar bir düzlem üzerinde bulunur. xy -düzlemi üzerinde tanımlı noktalar iki değişkenli fonksiyonda yerine konduğunda, $z = f(x, y)$ fonksiyonun aldığı değerler bulunarak, bu değerler de z eksenini boyunca negatif veya pozitif yönde ilerlenerek konumlanır. Konumlanan bu noktalar üç boyutlu uzayda doğrusal veya eğrisel yüzeyler oluşturur.

Örnek:

Aşağıda verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

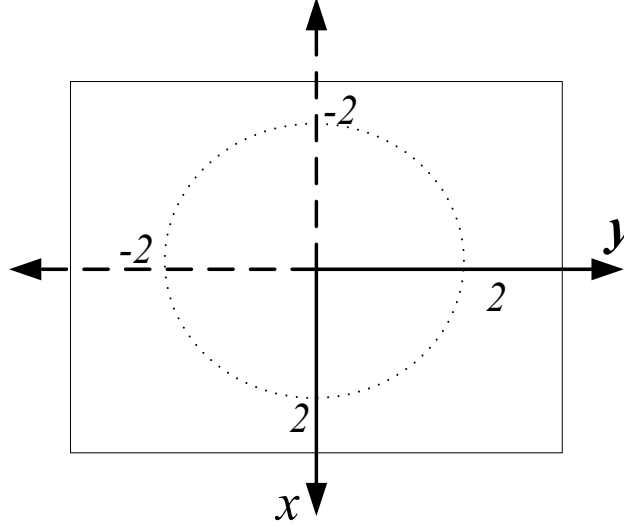
$$z = \frac{2x + 4y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

Çözüm:

Verilen fonksiyonda payda karekök ifadesi içerdiğinden, negatif sayıların karekökü alınamadığından, kök içerisindeki ifade ≥ 0 olmalıdır. Ayrıca fonksiyon kesirli olduğu için paydanın sıfır olmaması gerekir. Bu nedenle verilen fonksiyonun tanım kümesi;

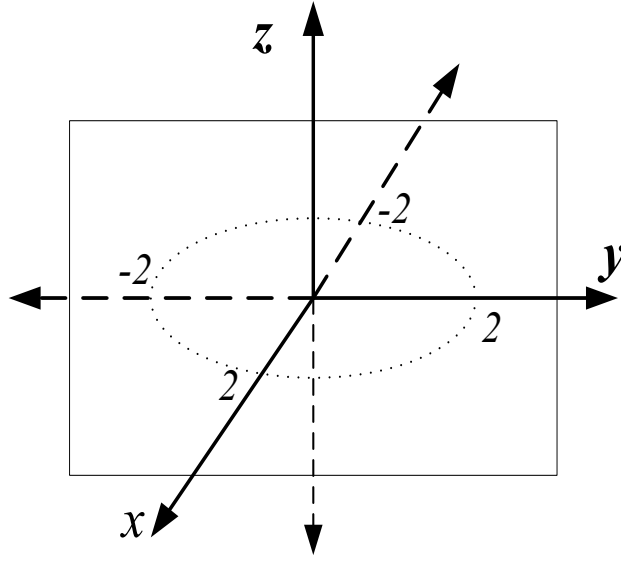
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4 &> 0 \\x^2 + y^2 &> 4\end{aligned}$$

olur.



Şekil 7: Örnekte verilen fonksiyonun tanım kümesi

Bu eşitsizliğin kartezyen koordinat sistemindeki grafiği, yukarıdaki gibi olacaktır ki, bu eşitsizlik koordinat sisteminde yarıçapı $r = 2$ olan bir dairenin dış tarafı anlamına gelir. Eşitlik olmadığı için de daire etrafı yani çember bu alana yani tanımlı alana dahil değildir. Tepeden bakıldığında x, y düzleminde bir dairenin dışında kalan alan olarak görülmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi verilen fonksiyonda x ve y yerine -2 den küçük ve 2 den büyük sayılar konduğunda fonksiyon tanımlı olur. $[-2, 2]$ aralığında sayılar konursa, verilen iki değişkenli fonksiyon tanımsız olur.



Şekil 8: Örnekte verilen fonksiyonun tanım kümesi

Örnek:

Aşağıda verilen iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

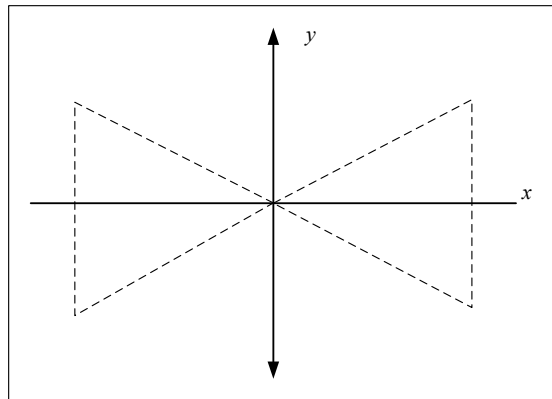
$$z = \frac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Çözüm:

Önceki örnekte olduğu gibi, verilen fonksiyonda payda karekök ifadesi içerdiğinden, negatif sayıların karekökü alınamadığından, kök içerisindeki ifade ≥ 0 olmalıdır.

$$x^2 - y^2 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 > y^2$$

Bu eşitsizlik kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi gösterilir. Taralı alanda bulunan noktaların apsislerinin karesi ordinatlarının karesinden büyüktür.



Şekil 9: Örnekte verilen fonksiyonun tanım kümesi

1.4. Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Örneğin bir yatırımcının r faiz oranı ile bankaya yatırmış olduğu P miktarındaki anaparanın t dönem sonraki değeri;

$$S = f(P, r, t) = P \cdot (1 + r)^t$$

ile hesaplanır. Yani paranın gelecekteki değeri, anaparanın miktarına (P), faiz oranına (r) ve dönem sayısına (t) bağlıdır. Paranın gelecekteki bağımlı değişkenin değeri; anapara, faiz oranı ve dönem sayısına yani üç bağımsız değişkene bağlıdır. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi, bu fonksiyonda; üç bağımsız değişken, bir bağımlı değişken bulunmaktadır.

$u = f(x, y, z)$ veya $y = f(x_1, x_2, x_3)$ biçiminde olan yani üç bağımsız değişkeni bulunan fonksiyonlara üç değişkenli fonksiyonlar denir. Örneğin;

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

fonksiyonu üç değişkenli bir fonksiyondur.

Üç değişkenli fonksiyonların tanım kümesi üç boyutlu uzayda bir hacim oluşturur. Ancak üç ve üçten fazla değişken bulunan fonksiyonların grafikleri bir anlam taşımaz ve üç boyutlu uzayda grafikleri çizilemez.

Örnek:

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

Logaritma (veya $\ln$) fonksiyonu pozitif sayılarda tanımlı olduğu için, $\ln$ fonksiyonunun sağında bulunan parantezin içi pozitif olmalıdır, yani sıfırdan büyük olmalıdır.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 > 1$$

ifadesi, merkezi $(0, 0, 0)$, yarıçapı 1 olan kürenin dış tarafını ifade etmektedir. Dolayısıyla verilen fonksiyonun tanım kümesi, kürenin dışında kalan üç boyutlu uzaydaki bir hacimden ibarettir.

Örnek:

$$w = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm:

Logaritma (veya $\ln$) fonksiyonu pozitif sayılarda tanımlı olduğu için, $\ln$ fonksiyonunun sağında bulunan parantezin içi pozitif olmalıdır, yani sıfırdan büyük olmalıdır.

$$\begin{aligned}1 - x^2 - y^2 - z^2 &> 0 \\1 &> x^2 + y^2 + z^2 \\x^2 + y^2 + z^2 &< 1\end{aligned}$$

ifadesi, merkezi $(0, 0, 0)$, yarıçapı 1 olan kürenin iç tarafını ifade etmektedir. Dolayısıyla verilen fonksiyonun tanım kümesi, kürenin içinde kalan üç boyutlu uzaydaki bir hacimden oluşur.

1.5. Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Tanım: Boş küme olmayan herhangi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ kümeleri verilsin ve $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ sembolü n kümenin kartezyen çarpımını gösterebilir:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

Eğer $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ kümesinden alınmış her $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nokta B kümesinden tek bir y elemanı ile eşleyen bir f kuralı verilmişse bu f kuralına $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ kümesinden B kümesine n değişkenli fonksiyon denir ve sembolik olarak,

$$f : A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n \rightarrow B, \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

biçiminde gösterilir. $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ 'e fonksiyonun tanım kümesi veya tanım bölgesi, B ye ise değer kümesi denir. Diğer bir deyişle, $D \subset R^n$ bölgesinin her $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasına bir ve yalnız bir $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gerçel sayısını karşılık getiren bir f bağıntısına D 'den R 'ye ($R^n \rightarrow R$) n değişkenli (çok değişkenli) fonksiyon denir. D 'ye fonksiyonun tanım kümesi, R 'ye fonksiyonun değer kümesi adı verilir. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ biçiminde olan fonksiyonlarda $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler, y ise bağımlı değişkendir.

Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonların kaç değişkenli fonksiyon olduklarını belirleyiniz.

Çözüm:

Çok değişkenli bir fonksiyonun kaç değişkenli olduğu belirlenirken, fonksiyonun bağımsız değişken sayılarının kaç olduğuna bakılır.

$$f(x, y, z) = 3x + y + z$$

(Üç değişkenli fonksiyon, x, y, z bağımsız değişkenler)

$$f(x, y, z, t) = 2x^2 + 5y^2 - z^2 - t^2$$

(dört değişkenli fonksiyon)

$$f(x, y, z, u, v) = x + \ln(y) + z^2 - \frac{u}{v}$$

(5 değişkenli fonksiyon)

Uygulamalar

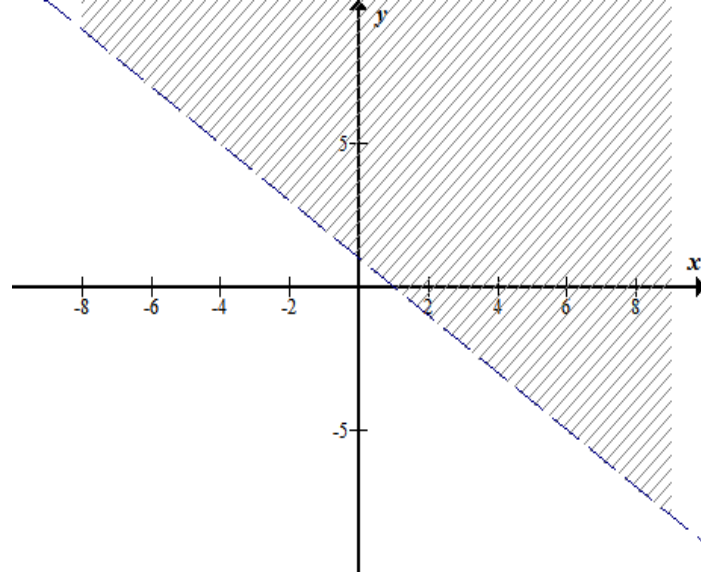
1) $y = \ln(x + y - 1)$ Fonksiyonunun tanım aralığını bulunuz.

Çözüm:

Logaritma fonksiyonu pozitif reel sayılar için tanımlıdır.

Dolayısıyla, $x + y - 1 > 0$ olmalıdır.

$$x + y - 1 > 0 \quad y > -x + 1$$



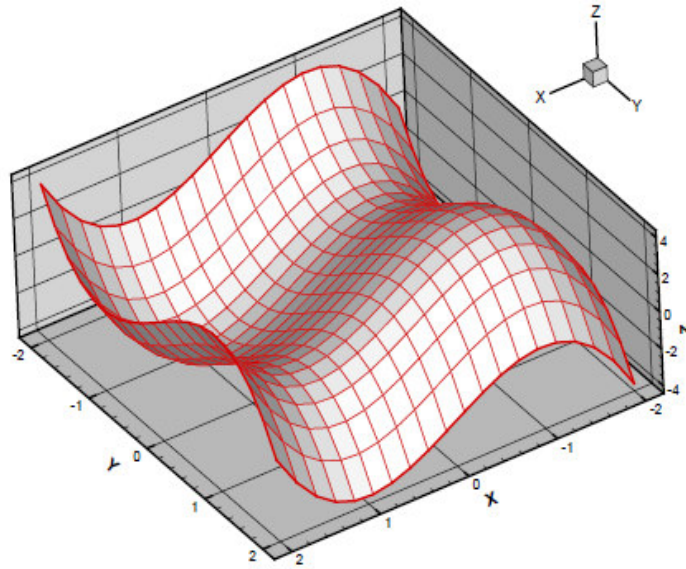
Şekil 10: $y = \ln(x + y - 1)$ fonksiyonunun tanım kümesi

Uygulama Soruları

1) $z = x^3 - 3x + 3y - y^3$ Fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Bu fonksiyonun grafiği ancak, bilgisayar paket programları yardımı ile çizilebilir. Bu örnekten anlaşılmalıdır ki, verilen fonksiyon iki değişkenli bir fonksiyondur. İki değişkenli fonksiyonların grafikleri de üç boyutlu uzayda bir yüzey oluşturur. Bu fonksiyon grafiği de üç boyutlu uzayda uçan halıya benzer bir yüzey oluşur.



Şekil 11: $z = x^3 - 3x + 3y - y^3$ fonksiyonunun grafiği

2) Araba kiralayan bir firma birbirinin benzeri arabaları günlük 50 TL'ye kiraya vermektedir. Bunun yanında kilometre başına 2 TL ücret istemektedir. Bu firmadan bir adet araba kiralayan bir şahsın katlanacağı maliyetin fonksiyonunu oluşturunuz. 3 gün arabayı kiralayan ve 350 km yol yapan bir kişi ne kadar maliyete katlanmak zorundadır.

Çözüm:

x : gün sayısı,

y : arabanın katettiği mesafe (km)

Olmak üzere, arabanın birkaç gün kullanılması durumunda oluşacak maliyet;

$$C = 50.x + 2.y$$

kadar olacaktır. $x = 3$ gün ve $y = 350$ km olduğundan,

$$C = 50.3 + 2.350 = 850 \text{ TL}$$

ödeme yapması gerekir.

3)

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$$

Fonksiyonu için,

$$f(2, -1, 6) = ?$$

Çözüm:

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$$

$$f(2, -1, 6) = e^{\sqrt{6 - (2)^2 - (-1)^2}} = e^{\sqrt{1}} = e^1 = e$$

$$e = 2,718 \dots$$

4) $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$ Fonksiyonu için $f(e, 1) = ?$

Çözüm:

$$f(x, y) = \ln(x + y - 1)$$

$$f(e, 1) = \ln(e + 1 - 1) = \ln e = 1$$

5) Üç boyutlu uzayda, $P_1(2, -1, 12)$ ve $P_2(-1, 3, 0)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm:

Üç boyutlu uzayda, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık;

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

formülü ile bulunur.

Verilen iki noktanın koordinatları formülde yerine konulursa;

$$d = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + [(-1) - (3)]^2 + [12 - 0]^2}$$

$$d = \sqrt{[3]^2 + [-4]^2 + [12]^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169}$$

$$d = 13$$

olarak uzaklık hesap edilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde çok değişkenli fonksiyonlara bir giriş yapılmıştır. Üç boyutlu uzay tanımı verildikten sonra iki değişkenli fonksiyonlar ve üç değişkenli fonksiyonlar anlatılmıştır. Son bölümde ise çok değişkenli fonksiyon tanımı verilmiştir.

Bölüm Soruları

1) Aşağıda verilen fonksiyon için $f(3,4,12)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$$f(r, s, t) = \frac{3}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}}$$

- a) 1
- b) 3/4
- c) 3/5
- d) 1/4
- e) 3/13

2) Aşağıda verilen fonksiyon kaç değişkenli bir fonksiyondur?

$$u = f(x, y, z) = \frac{3x}{\sqrt{y + z}}$$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

3) K , L ve M ürünlerinin üretimi için kullanılan hammadde miktarları sırası ile 2, 4 ve 5 ton ise, stokta bulunan hammadde miktarı 160 ton olduğuna göre K ve M ürünlerinin üretilmemesi, sadece L ürünü üretilmesi durumunda, en fazla kaç tane L ürünü üretilir?

- a) 32
- b) 40
- c) 80
- d) 160
- e) 320

4) $f(x, y) = x^2y + xy^2$ ise,

$$f(1, -1) + f(-1, 1) = ?$$

- a) 0
- b) -4
- c) -3
- d) -2
- e) -1

5) Aşağıda iki değişkenli fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$$

- a) $\{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 > 9\}$
- b) $\{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \geq 9\}$
- c) $\{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 9\}$
- d) $\{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 9\}$
- e) $\{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < 9\}$

6) Aşağıda verilen çok değişkenli fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

$$f(x, y, z) = \frac{16}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16}}$$

- a) Merkezi (0,0,0) yarıçapı 4 olan kürenin yüzeyi
- b) Merkezi (0,0,0) yarıçapı 4 olan kürenin dış tarafı
- c) Merkezi (0,0,0) yarıçapı 4 olan kürenin iç tarafı
- d) Merkezi (0,0,0) yarıçapı 4 olan kürenin yüzeyi dâhil olmak üzere dış tarafı
- e) Merkezi (0,0,0) yarıçapı 4 olan kürenin yüzeyi dahil olmak üzere iç tarafı

7) Aşağıda verilen ifadelerden hangisi yanlıştır?

- a) Tek değişkenli fonksiyonlar grafik düzlemde bir doğru veya eğri oluşturur.
- b) İki değişkenli fonksiyonlar üç boyutlu uzayda bir yüzey oluşturur.
- c) İki değişkenli fonksiyonların tanım kümesi kartezyen koordinat sisteminde gösterilebilir.
- d) Üç veya daha fazla değişkenin üç boyutlu uzayda grafiği gösterilemez.
- e) İki değişkenli bir fonksiyonda bir tane bağımlı bir tane bağımsız değişken bulunur.

8) $f : R^2 \rightarrow R, f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ iki değişkenli fonksiyonu için, $f(1, 3) = ?$

- a) 1
- b) 5
- c) 7
- d) 11
- e) 13

9) $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$ Fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $x^2 + y^2 \geq 9$

- b) $x^2 + y^2 \leq 9$
- c) $x^2 + y^2 > 9$
- d) $x^2 + y^2 < 9$
- e) $x^2 + y^2 = 9$

10) $x^2 + y^2 < 1$ eşitsizliği kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki bölgelerden hangisini gösterir?

- a) Merkezi (0,0) yarıçapı 1 olan dairenin dışı
- b) Merkezi (0,0) yarıçapı 1 olan dairenin içi
- c) Merkezi (1,1) yarıçapı 1 olan dairenin dışı
- d) Merkezi (1,1) yarıçapı 1 olan dairenin içi
- e) Merkezi (0,0) yarıçapı 1 olan çemberin kendisi

Cevaplar:

1) e, 2) c, 3) b, 4) a, 5) d, 6) b, 7) e, 8) a, 9) c, 10) b

2. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA EKSTREMUM

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 2.1. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit
- 2.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik
- 2.3. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Kısmi Türevler
- 2.4. Yerel Maksimum ve Yerel Minimum
- 2.5. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Ekstreum Noktaları
- 2.6. İkame ve Tamamlayıcı Ürünler

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Çok değişkenli fonksiyonlarda limit nasıl alınır?
- 2)** Çok değişkenli fonksiyonlarda kısmi türevler nasıl alınır?
- 3)** Ektremum nokta ne demektir?
- 4)** İkame ve tamamlayıcı ürün ne demektir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit	Çok değişkenli fonksiyonun limitini alabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak
Kısmi Türevler	Çok değişkenli fonksiyonlarda kısmi türevleri hesaplayabilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek, Tekrar yaparak
Ektremum Noktaların Bulunması	Noktaların Karakterlerini belirleyebilmek	Okuyarak, Örnek soru çözerek
İkame ve Tamamlayıcı Ürün	Ürünün ikame ürün veya tamamlayıcı ürün olup olmadığını belirleyebilmek	Okuyarak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Limit ve Süreklilik Kısmi Türev Kavramı Ekstremum Noktalar İkame Ürün ve Tamamlayıcı Ürün
--

Giriş

Tek değişkenli fonksiyonlar konusu hatırlanır ise, bir fonksiyonun ekstremum noktasını bulabilmek için birinci türevden yararlanılmaktaydı. Bu bölümde iki veya daha fazla değişkenin bulunduğu fonksiyonlar anlatıldığından kısmi türev kavramı devreye girmektedir. Öncesinde de limit tanımı yapmamız gerekir.

2.1. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

Tek değişkenli fonksiyonlarda, “ $f(x)$ fonksiyonu, x_0 noktasında tanımlı olsun ya da olmasın, x, x_0 ’a ($x \rightarrow x_0$) istenildiği kadar yaklaşırken, fonksiyon belirli bir reel sayıya gerektiği kadar yaklaşıyorsa, fonksiyonun x, x_0 ’a yaklaşırken limiti L ’dir” olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

İki değişkenli fonksiyonlar için, “ $f(x, y)$ fonksiyonu, (x_0, y_0) noktasında tanımlı olsun ya da olmasın, $(x, y), (x_0, y_0)$ ’a $[(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)]$ istenildiği kadar yaklaşırken, fonksiyon belirli bir reel sayıya (L) gerektiği kadar yaklaşıyorsa, fonksiyonun $(x, y), (x_0, y_0)$ ’a yaklaşırken limiti L ’dir” denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Benzer şekilde çok değişkenli fonksiyonlarda, “ $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasında tanımlı olsun ya da olmasın, $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ ’a istenildiği kadar yaklaşırken, fonksiyon belirli bir reel sayıya (L) gerektiği kadar yaklaşıyorsa, fonksiyonun $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ ’a yaklaşırken limiti L ’dir” denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L$$

Örneğin, iki değişkenli bir fonksiyon için limit kavramı;

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x_1, x_2) = L$$

biçiminde gösterilir.

Örnek:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

2.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Süreklilik

$f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında aşağıdaki şartları sağladığı takdirde sürekli olur.

- $f(x_0, y_0)$ var ise; yani fonksiyon (x_0, y_0) noktasında tanımlı ise,
- (x_0, y_0) noktası için fonksiyon L gibi bir limite sahip ise,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

- (x_0, y_0) noktasında fonksiyonun aldığı değer, limit değerine eşit ise,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Üç ve daha çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği de benzer yolla tanımlanabilir.

2.3. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Kısmi Türevler

Tek değişkenli fonksiyonlarda fonksiyonun türevi, x bağımsız değişkeni Δx kadar arttırıldığında, fonksiyonun $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ artmasının Δx 'e oranı bulunup, sonra bu Δx artışı sıfıra götürülerek limitinin alınmasıyla elde edilir.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu verildiğinde bağımsız değişkenlere Δx ve Δy artmaları verildiğinde fonksiyon artması $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ olur. Bu artmanın bağımsız değişkenler artması olan $(\Delta x, \Delta y)$ ikilisine oranı anlamlı değildir. Bağımsız değişkenlerden birisi sabit tutulursa fonksiyon tek değişkenli fonksiyona dönüşür ve artık yeni fonksiyonun türevinden söz edilebilir.

Dolayısıyla iki değişkenli fonksiyonlarda kısmi türev tanımından bahsedilir. Birinci dereceden kısmi türevler için oluşan limit tanımları aşağıda verilmektedir.

$$f_x(x, y) = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

İki değişkenli bir $z = f(x, y)$ fonksiyonunda, eğer y sabit tutulursa; $z = f(x, y)$ fonksiyonunun x 'e göre türevi varsa, bu türeve x 'e göre kısmi türev; eğer x sabit tutulursa; $z = f(x, y)$ fonksiyonunun y 'ye göre türevi varsa, bu türeve ise y 'ye göre kısmi türev denir. Birinci dereceden kısmi türevler aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f_x, \quad f'_x, \quad f_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_x$$

$$f_y, \quad f'_y, \quad f_y(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_y$$

İkiden fazla değişkenli fonksiyonlarda da benzer şekilde kaç değişken var ise her bir değişkene göre kısmi türevler bulunabilir. Örneğin $u = f(x, y, z)$ üç değişkenli fonksiyonun birinci dereceden üç farklı kısmi türevi alınabilir.

x 'e göre kısmi türev:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y 'ye göre kısmi türev:

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

z 'ye göre kısmi türev:

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

2.4. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda İkinci Dereceden Kısmi Türevler

$z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunun iki defa x 'e göre veya iki defa y 'ye göre veya da önce x 'e göre sonra da y 'ye göre türevleri alınırsa, ikinci dereceden kısmi türevler bulunmuş olur.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

İkinci dereceden kısmi türevler aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f_{xx}, \quad f_{xx}(x, y), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad z_{xx}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy} , \quad f_{yy}(x, y) , \quad \frac{d^2 f}{dy^2} , \quad \frac{d^2 z}{dy^2} , \quad z_{yy} \\
f_{xy} , \quad f_{xy}(x, y) , \quad \frac{d^2 f}{\partial x \partial y} , \quad \frac{d^2 z}{\partial x \partial y} , \quad z_{xy} \\
f_{yx} , \quad f_{yx}(x, y) , \quad \frac{d^2 f}{\partial y \partial x} , \quad \frac{d^2 z}{\partial y \partial x} , \quad z_{yx}
\end{aligned}$$

Örnek:

Aşağıda verilen fonksiyonun birinci dereceden kısmi türevlerini bulunuz.

$$f(x, y) = 3x^2y^3 - 5xy + y^2$$

$$f_x(x, y) = f'_x(x, y) = 6xy^3 - 5y$$

$$f_y(x, y) = f'_y(x, y) = 9x^2y^2 - 5x + 2y$$

Örnek:

Aşağıda verilen fonksiyonun birinci dereceden kısmi türevlerini bulunuz.

$$f(x, y) = x^2/y^2$$

$$f_x(x, y) = f'_x(x, y) = \frac{2x}{y^2}$$

$$f_y(x, y) = f'_y(x, y) = -2y \cdot \frac{x^2}{y^4} = -2 \cdot \frac{x^2}{y^3} = \frac{-2x^2}{y^3}$$

Örnek:

Aşağıda verilen fonksiyonun birinci dereceden kısmi türevlerini bulunuz.

$$f(x, y) = x \cdot e^{yz}$$

Verilen fonksiyon, üç değişkenli bir fonksiyon olduğu için, x 'e göre, y 'ye göre ve z 'ye göre olmak üzere üç tane kısmi türevi vardır.

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= f'_x(x, y, z) = e^{yz} \\
f_y(x, y) &= f'_y(x, y, z) = 0 \cdot e^{yz} + z \cdot e^{yz} \cdot x = x \cdot z \cdot e^{yz} \\
f_z(x, y) &= f'_z(x, y, z) = 0 \cdot e^{yz} + y \cdot e^{yz} \cdot x = x \cdot y \cdot e^{yz}
\end{aligned}$$

Örnek:

Aşağıda verilen fonksiyonun ikinci dereceden kısmi türevlerini bulunuz.

$$f(x, y) = 3x^2y^3 - 5xy + y^2$$

Birinci dereceden kısmi türevler:

$$f_x(x, y) = 6xy^3 - 5y$$

$$f_y(x, y) = 9x^2y^2 - 5x + 2y$$

İkinci dereceden kısmi türevler:

$$f_{xx}(x, y) = f''_{xx}(x, y) = 6y^3$$

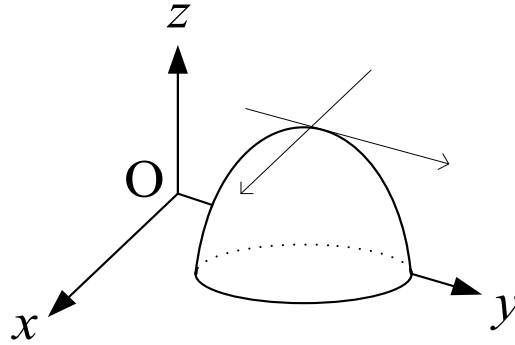
$$f_{xy}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = 18xy^2 - 5$$

$$f_{yx}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 18xy^2 - 5$$

$$f_{yy}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = 18x^2y + 2$$

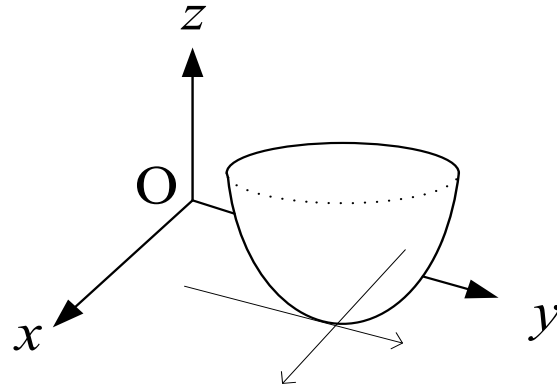
2.5. Yerel Maksimum ve Yerel Minimum

$z = f(x, y)$ denklemi ile tanımlanan iki değişkenli bir f fonksiyonu ve bu fonksiyonun tanım kümesi içinde $(a, b) \in R^2$ verilmiş olsun. Eğer (a, b) yi merkez kabul eden bir $(a, b, f(a, b))$ dairesel bölgedeki her (x, y) için $f(a, b) \geq f(x, y)$ ise, bu takdirde $f(a, b)$ ye f 'nin bir **yerel maksimum değeri** denir. $f(a, b)$ değeri f 'nin bir yerel maksimum değeri ise, f 'nin $(a, b, f(a, b))$ civarındaki grafiği aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.

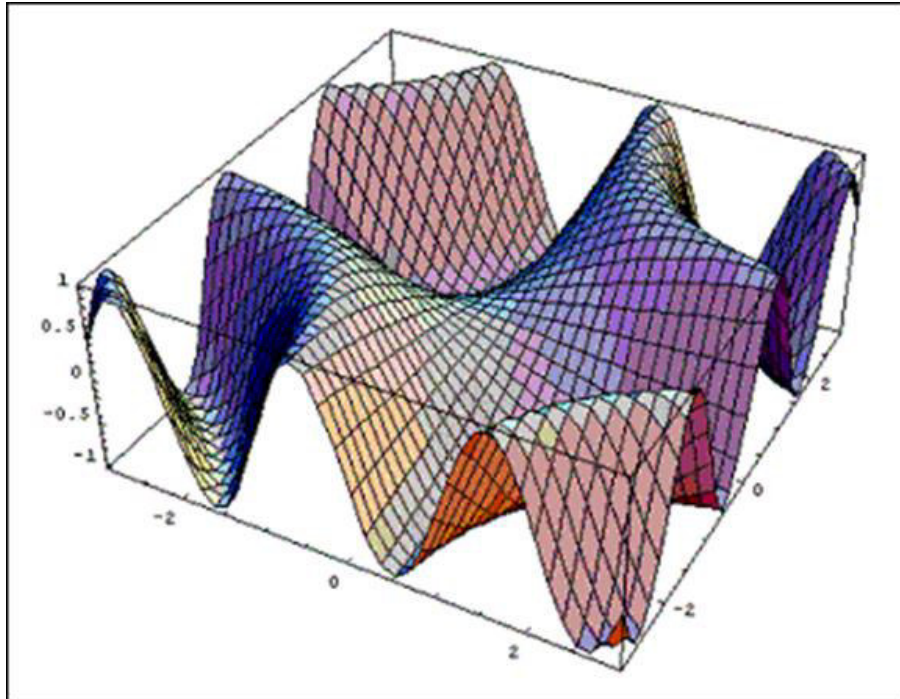
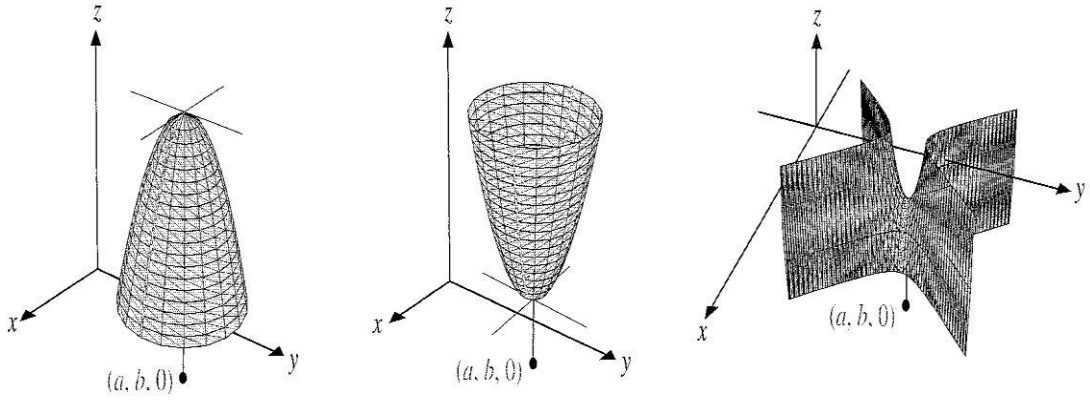


Şekil 12: Yerel maksimumun gösterimi

Eğer (a, b) yi merkez kabul eden bir dairesel bölgedeki her (x, y) için $f(a, b) \leq f(x, y)$ ise, bu takdirde $f(a, b)$ ye f 'nin bir **yerel minimum değeri** denir. $f(a, b)$ değeri f 'nin bir yerel minimum değeri ise, f 'nin $(a, b, f(a, b))$ civarındaki grafiği aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.



Şekil 13: Yerel minimumun gösterimi



Şekil 14: Yerel maksimum minimum ve eyer noktası

2.6. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Ekstremum Noktaları

Nasıl ki tek değişkenli bir fonksiyonun tepe noktalarını bulmak için türev alınmakta ise, Çok değişkenli fonksiyonlarda da aynı uygulama yapılır. Ancak birden fazla bağımsız değişken olduğu için, türev alınırken her bir bağımsız değişkenin değişiminden fonksiyonun değişimini belirleyebilmek için kısmi türevler alınır. Kısmi türev çok değişkenli bir fonksiyonun, sadece ilgili değişkeni sabit değilken alınan türevdir. Çok değişkenli fonksiyonlarda ekstremum noktalarını bulmak için birinci dereceden kısmi türevler alınır.

Verilen bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu için,

1. Kritik noktalar bulunur.
 - a) Fonksiyonun x 'e göre türevi, f_x alınır. $f'_x(x_0, y_0)$ bulunur.
 - b) Fonksiyonun y 'e göre türevi f_y alınır. $f'_y(x_0, y_0)$ bulunur.
 - c) Bulunan kısmi türevler 0'a eşitlenerek kritik noktalar bulunur.
2. İkinci dereceden kısmi türevler,

$$f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y) \text{ ve } f_{yy}(x, y)$$

bulunur.

3. Bulunan ikinci dereceden kısmi türevlerde bütün kritik noktalar yerine konur.
4. Kritik noktaların maksimum veya minimum noktaları olup olmadığına karar verilir.

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$$

Bir diğer gösterim de aşağıdaki gibidir.

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad D = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = A \cdot D - C \cdot B$$

$C = B$ olduğu için;

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = A \cdot D - C^2 = A \cdot D - B^2$$

Durum 1. Eğer $\Delta > 0$ ve $f_{xx}(a, b) < 0$ ise $f(a, b)$ bir yerel **maksimumdur**.

Durum 2. Eğer $\Delta > 0$ ve $f_{xx}(a, b) > 0$ ise $f(a, b)$ bir yerel **minimumdur**.

Durum 3. Eğer $\Delta < 0$ ise $f(a, b)$ bir **eğer (semer)** noktasıdır.

Durum 4. $\Delta = 0$ ise, bu test noktanın maksimum veya minimum olup olmadığı ile ilgili bir şey söylemez.

5. Bulunan kritik noktalar için fonksiyonun aldığı değerler bulunur, $z = f(a, b)$

Örnek :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 10x - 8y$$

fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm:

İlk olarak verilen fonksiyonun birinci türevi alınır. Fonksiyonda x ve y gibi iki bağımsız değişken bulunduğundan x ve y 'ye göre birinci dereceden kısmi türevler bulunur.

x 'e göre kısmi türev:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 10$$

y 'e göre kısmi türev:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4x - 8$$

Elde edilen kısmi türevler sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 10 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4x - 8 = 0$$

$$2x + 4y = 10$$

$$2y + 4x = 8$$

Elde edilen çözüm ($x = 1, y = 2$) noktası olur. Bu nokta birinci türevleri sıfır yaptığından bir ekstremum noktadır. Şimdi bu noktanın maksimum veya minimum olduğunu bulalım. İkinci dereceden kısmi türevler alınır.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 4$$

$$f_{xx}(1, 2) \cdot f_{yy}(1, 2) - [f_{xy}(1, 2)]^2 = 2 \cdot 2 - 4^2 = -12 < 0$$

çıktığından dolayı önceki bulunan (1,2) noktası bir semer noktasıdır.

$$z = x^2 + y^2 + 4xy - 10x - 8y$$

Örnek 2: Televizyon üretimi yapan bir firmanın yıllık işçilik ve malzeme maliyeti aşağıdaki fonksiyonla verilmiştir.

$$C(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x - 18y + 54$$

burada x yılda harcanan işçilik miktarını, y ise yılda harcanan malzeme miktarını göstermektedir. Toplam maliyeti en küçükleyebilmek için işçilik ve malzeme miktarını bulunuz. Minimum maliyeti hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 4x + 2y - 16$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 2x + 6y - 18$$

$$4x + 2y = 16$$

$$2x + 6y = 18$$

$$P(x = 3, y = 2)$$

$$\frac{d^2 C}{dx^2} = 4$$

$$\frac{d^2 C}{dy^2} = 6$$

$$\frac{d^2C}{\partial x \partial y} = 2$$

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 4 \cdot 6 - 2^2 = 20 > 0$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 4 > 0$$

olduğu için $P(x = 3, y = 2)$ noktası bir minimum noktadır.

Minimum maliyet;

$$C_{min} = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 3 - 18 \cdot 2 + 54 = 12$$

Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonun tepe noktalarını bulunuz.

$$f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y$$

Çözüm:

İlk olarak birinci dereceden kısmi türevler bulunur.

$$f'_x(x, y) = 6x^2 - 6$$

$$f'_y(x, y) = 3y^2 - 12$$

Bulunanlar kısmi türevler 0'a eşitlenir:

$$\begin{array}{lll} 6x^2 - 6 = 0 & x^2 - 1 = 0 & x = 1 \text{ ve } x = -1 \\ 3y^2 - 12 = 0 & y^2 - 4 = 0 & y = 2 \text{ ve } y = -2 \end{array}$$

Bulunan kritik noktalar;

$$P_1(1, 2), \quad P_2(1, -2), \quad P_3(-1, 2), \quad P_4(-1, -2)$$

Bu noktaların maksimum veya minimum nokta olup olmadıkları incelenir.

Verilen fonksiyon için ikinci dereceden kısmi türevler alınır.

$$f''_{xx}(x, y) = 12x$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0$$

$$f''_{yx}(x, y) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y) = 6y$$

Determinant matrisi oluşturulur.

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$$

Burada her bir noktanın değerleri yerine konur.

$P_1(1,2)$ için:

$$W(P_1) = \begin{vmatrix} 12.1 & 0 \\ 0 & 6.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

olduğu için P_1 minimum veya maksimum olabilir. İkinci türev işaret incelemesi yapılır.

$f''_{xx}(1,2) > 0$ olduğundan; $P_1(1,2)$ bir yerel minimum noktasıdır.

$P_2(1,-2)$ için:

$$W(P_1) = \begin{vmatrix} 12.1 & 0 \\ 0 & 6.-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

olduğu için P_2 noktasında maksimum veya minimum nokta yoktur.

$P_3(-1,2)$ için:

$$W(P_1) = \begin{vmatrix} 12.-1 & 0 \\ 0 & 6.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

olduğu için P_3 noktasında maksimum veya minimum nokta yoktur.

$P_4(-1,-2)$ için:

$$W(P_1) = \begin{vmatrix} 12.-1 & 0 \\ 0 & 6.-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

olduğu için P_4 minimum veya maksimum olabilir. İkinci türev işaret incelemesi yapılır.

$f''_{xx}(-1,-2) = -12$ olduğundan; $P_4(-1,-2)$ bir yerel maksimum noktasıdır.

Son adım olarak da, fonksiyonun minimum ve maksimum olarak aldığı değerler elde edilir.

$$f_{min} = f(1,2) = 2 + 8 - 6 - 24 = -20$$

$$f_{max} = f(-1,-2) = -2 - 8 + 6 + 24 = 20$$

2.7. İkame ve Tamamlayıcı Ürünler

Birbiri ile ilişkili iki mal göz önüne alalım. Birinci ürünün fiyatı p_1 ve talep miktarı q_1 , ikinci ürünün fiyatı p_2 ve talep miktarı da q_2 olsun. Bu ürünlerin talep miktarlarının, ürünün kendi fiyatı ile diğer ürünün fiyatına bağlı olduğu varsayılırsa,

$$q_1 = f(p_1, p_2) \quad \text{ve} \quad q_2 = f(p_1, p_2)$$

olarak ifade edilir. Eğer iki bağımsız değişkenli talep fonksiyonu sürekli ise, üç boyutlu uzayda bir yüzeyle gösterilebilir. Bu yüzeye talep yüzeyi denir. Talep fonksiyonu (q_1 ve q_2), iki ürünün fiyatları ile (p_1, p_2) ilişkilidir.

İlişkili iki malın talep fonksiyonları;

$$q_1 = f(p_1, p_2) \quad \text{ve} \quad q_2 = f(p_1, p_2)$$

olduklarına göre, bu fonksiyonların aşağıdaki kısmi türevlerine marjinal talep fonksiyonu denir.

$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$	:	p_1 'e göre q_1 'in marjinal talebi, Birinci ürünün kendi fiyatına göre oluşan marjinal talep
$\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$	:	p_2 'ye göre q_1 'in marjinal talebi, İkinci ürünün fiyatına göre birinci ürünün marjinal talep
$\frac{\partial q_2}{\partial p_1}$	:	p_1 'e göre q_2 'in marjinal talebi, Birinci ürünün fiyatına göre ikinci ürüne olan marjinal talep
$\frac{\partial q_2}{\partial p_2}$	:	p_2 'ye göre q_2 'in marjinal talebi, İkinci ürünün kendi fiyatına göre oluşan marjinal talep

Genel olarak p_2 sabit iken p_1 azalır, q_1 miktarı artar ve p_1 sabit iken p_2 fiyatı azalır, q_2 miktarı artar. Örneğin yazıcı veya kartuş fiyatlarının ikisinden birinin fiyatındaki azalış her ikisinin de talebinde artışa sebep olur. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} < 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_2} < 0$$

olur.

Belirli bir (p_1, p_2) fiyat çifti için her iki ürünün marjinal talep fonksiyonları;

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$$

ise bu iki ürüne “**tamamlayıcı ürünler**” denir.

Çünkü ikisinden birinin fiyatındaki azalışa karşılık her ikisinin talep miktarı artmaktadır.

Örneğin, yazıcı satışları ile kartuş satışları gibi.

Benzer şekilde, belli bir (p_1, p_2) çifti için her iki ürün için oluşan marjinal talep fonksiyonu,

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$$

ise bu iki ürüne “**ikame ürünler**” denir. Çünkü ikisinden birinin fiyatındaki azalışa karşılık talep miktarının birinde artış, diğerinde ise azalış olur.

Örnek olarak, margarin ve tereyağı talebinde olduğu gibi. Margarinin fiyatı artış gösterdiğinde tereyağı fiyatı değişmez ise tereyağa olan talep artar.

Örnek:

Birbiri ile ilişkili iki ürünün talep fonksiyonları;

Birinci ürünün talebinin, kendi fiyatı ile diğer ürünün fiyatına göre göre fonksiyonu;

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 400 - 5p_1 + 6p_2$$

İkinci ürünün talebinin, kendi fiyatı ile diğer ürünün fiyatına göre göre fonksiyonu;

$$q_2 = g(p_1, p_2) = 250 + 4p_1 - 5p_2$$

olarak verildiğine göre, marjinal talep fonksiyonlarını bulunuz. Bu iki ürünün tamamlayıcı ürünler mi yoksa ikame ürünler mi olduklarını belirleyiniz.

Çözüm:

Ürünlere ilişkin marjinal talep fonksiyonları;

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -5 \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 6 \quad , \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 4 \quad , \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -5$$

olduğuna göre,

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 6 > 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 4 > 0$$

olduklarına göre, bu iki ürün **ikame** ürünlerdir.

Uygulamalar

1) Aşağıda verilen fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştırınız.

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 27x - 24y + 1$$

Çözüm:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x_1 = -3 \text{ ve } x_1 = 3$$

$$f_y(x, y) = 6y - 24 \rightarrow y = 4$$

Kritik noktalar: $(-3, 4)$ ve $(3, 4)$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6x \cdot 6 - (0)^2 = 36x$$

$(-3, 4)$ noktası için;

$$\Delta = 36x = 36 \cdot (-3) = -108 < 0$$

olduğu için $(-3, 4)$ noktası bir ekstremum olmayıp $f(x, y)$ fonksiyonunun bir eyer noktasıdır.

$(3, 4)$ noktası için;

$$\Delta = 36x = 36 \cdot 3 = 108 > 0$$

$$f_{xx}(3, 4) = 6x = 6 \cdot 3 = 18 > 0$$

olduğu için $(3, 4)$ noktasında bir yerel minimum vardır. Bu yerel minimum noktada fonksiyonun değeri;

$$f(3, 4) = 3^3 + 3 \cdot 4^2 - 27 \cdot 3 - 24 \cdot 4 + 1 = -101$$

olup bu noktanın koordinatları $(3, 4, -101)$ olur.

Uygulama Soruları

1) Aşağıda verilen fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştırınız.

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 27x - 24y + 1$$

Çözüm:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$x = +3 \text{ ve } x = -3$$

$$f_y(x, y) = 6y - 24 = 0$$

$$y = 4$$

Kritik noktalar: $(-3, 4)$ ve $(3, 4)$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

$(-3, 4)$ noktası için;

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6 \cdot (-3) \cdot 6 - 0^2 = -108 < 0$$

olduğu için $(-3, 4)$ noktası bir ekstremum olmayıp $f(x, y)$ fonksiyonunun bir eyer noktasıdır.

$(3, 4)$ noktası için;

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6 \cdot (3) \cdot 6 - 0^2 = 108 > 0$$

olduğu için $(3, 4)$ noktasında bir yerel minimum vardır. Bu yerel minimum noktada fonksiyonun değeri $f(3, 4) = -101$ olup bu noktanın koordinatları $(3, 4, -101)$ dir.

2) Aşağıda verilen iki değişkenli fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştırın.

$$f(x, y) = -x^3 - y^3 + 75x - 3y - 2$$

Çözüm:

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 75 = 0$$

$$x = +5 \text{ ve } x = -5$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 3 = 0$$

$$y = +1 \text{ ve } y = -1$$

Kritik noktalar: $(-5, -1)$, $(-5, 1)$, $(5, -1)$ ve $(5, 1)$

$$f_{xx}(x, y) = -6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x) \cdot 6y - 0^2$$

$(-5, -1)$ noktası için;

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6 \cdot -5) \cdot 6 \cdot (-1) = -180 < 0$$

olduğu için $(-5, -1)$ noktası bir ekstremum olmayıp $f(x, y)$ fonksiyonunun bir eyer noktasıdır.

$(-5, 1)$ noktası için;

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6 \cdot -5) \cdot 6 \cdot 1 = 180 > 0$$

$$f_{xx}(-5, 1) = 30 > 0$$

olduğu için $(-5, 1)$ noktası $f(x, y)$ fonksiyonunun bir yerel minimum noktasıdır.

Bu yerel minimum noktada fonksiyonun değeri $f(-5, 1) = -254$ olup bu noktanın koordinatları $(-5, 1, -254)$ tür.

$(5, -1)$ noktası için;

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6 \cdot 5) \cdot 6 \cdot (-1) = 180 > 0$$

$$f_{xx}(5, -1) = -30 < 0$$

olduğu için $(5, -1)$ noktası $f(x, y)$ fonksiyonunun bir yerel maksimum noktasıdır.

Bu yerel maksimum noktada fonksiyonun değeri $f(5, -1) = 250$ olup bu noktanın koordinatları $(5, -1, 250)$ dir.

$(5, 1)$ noktası için;

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6.5) \cdot 6.1 = -180 < 0$$

olduğu için $(5, 1)$ noktası bir ekstremum olmayıp $f(x, y)$ fonksiyonunun bir eyer (semer) noktasıdır.

3) Aşağıdaki fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Çözüm:

$$f(0,0) = \sqrt{4 - 0^2 - 0^2} = 2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{4 - 0^2 - 0^2} = 2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{4 - 0^2 - 0^2} = f(0,0) = 2$$

olduğu için $(0,0)$ noktası süreklidir.

4) Aşağıda verilen fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz ve karakterlerini belirleyiniz.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 4$$

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0$$

Burada elde edilen fonksiyonlar sıfıra eşitlenirse;

$$2x + y = 6$$

$$x + 2y = 0$$

$(x = 4, y = -2)$ çıkar. $A(4, -2)$ noktası kritik noktadır. Şimdi bu noktanın karakterini belirleyelim.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

Diskriminant değeri pozitif çıktığı için, fonksiyonun maksimum veya minimum noktası var demektir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

olduğu için $A(4, -2)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

5) Aşağıda verilen fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz ve karakterlerini belirleyiniz.

$$f(x, y) = 8 - x^2 + xy - y^2 + 12y$$

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y + 12 = 0$$

Çözüm:

Burada elde edilen fonksiyonlar sıfıra eşitlenirse;

$$-2x + y = 0$$

$$x - 2y = -12$$

$(x = 4, y = 8)$ çıkar. $A(4, 8)$ noktası kritik noktadır. Şimdi bu noktanın karakterini belirleyelim.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = (-2) \cdot (-2) - 1^2 = 3 > 0$$

Diskriminant değeri pozitif çıktığı için, fonksiyonun maksimum veya minimum noktası var demektir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 < 0$$

olduğu için $A(4, 8)$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

6) Aşağıda verilen iki değişkenli fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz ve karakterlerini belirleyiniz.

$$f(x, y) = y^3 - x^3 + 6xy + 3$$

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 6x$$

Burada elde edilen fonksiyonlar sıfıra eşitlenirse;

Birinci denklemden $y = -\frac{1}{2}x^2$ bulunur ve ikinci denklemde yerine konursa,

$$\begin{aligned} -3x^2 + 6y &= 0 \\ 3y^2 + 6x &= 0 \end{aligned}$$

$A(x = 0, y = 0)$ ve $B(x = -2, y = 2)$ noktaları bulunur.

$A(0, 0)$ ve $B(-2, 2)$ noktaları kritik noktadır. Şimdi bu noktanın karakterini belirleyelim.

A noktası için;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

$$\Delta_A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = -6x \cdot 6y - 6^2 = -36xy - 36 = 0 - 36 = -36 < 0$$

$$\Delta_B = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = -36xy - 36 = -36 \cdot (-2) \cdot 2 - 36 = 144 > 0$$

A noktası için diskriminant değeri negatif çıktığı için, bu nokta bir eyer (semer) noktasıdır.
 B noktası için fonksiyonun maksimum veya minimum noktası var demektir.

$$\frac{\partial^2 f(-2,2)}{\partial x^2} = -6 \cdot (-2) = 12 > 0$$

ve

$$\frac{\partial^2 f(-2,2)}{\partial y^2} = 6 \cdot 2 = 12 > 0$$

olduğu için $B(-2, 2)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde çok değişkenli fonksiyonlarda limit alınması, noktaların sürekli olup olmadığının belirlenmesi, çok değişkenli fonksiyonlarda kısmi türevlerin elde edilmesi ve ekstremum noktaların bulunması incelenmiştir. Son kısımda ise iki ürüne ilişkin talep fonksiyonları verildiğinde bu iki ürünün tamamlayıcı ürün veya ikame ürün olup olmadıkları belirlenmiştir.

Bölüm Soruları

1) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$ Fonksiyonu için $f_x(x, y) + f_y(x, y) = ?$

- a) $\frac{2}{x+y}$ b) $\frac{-2}{x-y}$ c) $\frac{1}{x^2 - y^2}$ d) $\frac{1}{x^2 + y^2}$ e) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

2) $z = x^2 + xy + y^2 - y$ fonksiyonunun minimum noktasının x bileşeni aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $-1/6$
b) $2/3$
c) $-1/3$
d) 0
e) $1/3$

3) $z = x^2 + xy + y^2 - y$ fonksiyonunun minimum noktasının y bileşeni aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $-1/6$
b) $2/3$
c) $-1/3$
d) 0
e) $1/3$

4) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ fonksiyonu için;

$$[f_{xx}(2,3)] \cdot [f_{yy}(2,3)] - [f_{xy}(2,3)]^2 = ?$$

- a) 5
b) 3
c) 0
d) -5
e) -9

5) $f(x, y) = y^3 - x^3 + 6xy + 3$ fonksiyonunun ekstremum noktalarından birisi $A(0,0)$ noktası olduğuna göre, A noktasının karakterini belirleyiniz.

- a) A Noktası bir yerel minimumdur.
b) A Noktası bir yerel maksimumdur.
c) A Noktası bir eyer (semer) noktadır.
d) A Noktası hakkında bir şey söylenemez.
e) A Noktası kritik noktalardan biri değildir.

6) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$ fonksiyonunun ekstremum noktası olan B 'nin karakterini belirleyiniz.

- a) B Noktası bir yerel minimumdur.
- b) B Noktası bir yerel maksimumdur.
- c) B Noktası bir eyer (semer) noktasıdır.
- d) B Noktası hakkında bir şey söylenemez.
- e) B Noktası kritik noktalardan biri değildir.

7) $f(x, y) = 8 - x^2 + xy - y^2 + 12y$ fonksiyonunun ekstremum noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $(0, 0)$
- b) $(4, 8)$
- c) $(-1, 3)$
- d) $(2, -2)$
- e) $(3, -1)$

8) $f(x, y) = 8 - x^2 + xy - y^2 + 12y$ fonksiyonunun ekstremum noktası $A (4, 8)$ noktası olduğuna göre, A noktasının karakterini belirleyiniz?

- a) A Noktası bir yerel minimumdur.
- b) A Noktası bir yerel maksimumdur.
- c) A Noktası bir eyer (semer) noktasıdır.
- d) A Noktası hakkında bir şey söylenemez.
- e) A Noktası kritik noktalardan biri değildir.

9) Belirli bir (p_1, p_2) fiyat çifti için her iki ürünün marjinal talep fonksiyonları;

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$$

ise bu iki ürün için ne söylenebilir?

- a) Bu iki ürün ikame ürünlerdir.
- b) Bu iki ürün tamamlayıcı ürünlerdir.
- c) Bu iki ürün ilişkisiz ürünlerdir.
- d) Bu iki ürün hakkında bir şey söylenemez.
- e) Bilgi yetersizdir.

10) Birbiri ile ilişkili iki ürünün talep fonksiyonları aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 400 - 5p_1 + 6p_2$$

$$q_2 = g(p_1, p_2) = 250 + p_1 - 4p_2$$

Bu bilgilere göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) Birinci ürünün fiyatı ikinci ürünün talebini etkilemez.
- b) İkinci ürünün fiyatı birinci ürünün talebini etkilemez.
- c) Verilen bilgi yeterli değildir.
- d) Bu iki ürün birbirinin tamamlayıcısıdır.
- e) Bu iki ürün birbirinin ikamesidir.

Cevaplar:

- 1) a, 2) c, 3) b, 4) d, 5) c, 6) a, 7) b, 8) b, 9) b, 10) e

3. MATRİS VE VEKTÖRLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 3.1. Matris Gösterimi
- 3.2. Vektörler
- 3.3. Matris Tanımları
- 3.4. Matrislerde Matematiksel İşlemler
- 3.5. Matrislerde Toplama ve Çıkarma
- 3.6. Matris Çarpımı

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Matris nedir? Vektör nedir? Aralarında ne fark vardır?
- 2)** Herhangi iki matrisin her durumda çarpımı yapılabilir mi?
- 3)** Üst üçgen ve alt üçgen matris kavramlarını açıklayınız?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Matris ve Vektör	Matris ve vektör tanımlarını bilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek
Matris tanımları	Üç boyutlu uzayda noktaların gösterimini yapabilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek
Matris işlemleri	Matrislerde toplama çıkarma, çarpma işlemlerini yapabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Matris ve Vektör
Trnsspoze kavramı
Matris toplamı
Matris çarpımı
Matrisin kuvvetleri

Giriş

İşletme, ekonomi, mühendislik gibi birçok alandaki problemlerin modellenmesinde matrislerden sıkça yararlanılır. Bu nedenle matrisler; özellikle işletme matematiği ve sayısal karar verme teknikleri alanına temel teşkil eden bir konudur.

Matematikte *matris* veya *dizey*, dikdörtgen bir sayılar tablosu veya daha genel bir açıklamayla, toplanabilir veya çarpılabilir soyut miktarlar tablosudur. Bir başka ifade ile satır ve sütunlardan oluşan tablo biçiminde verilmiş veriler dizisine matris denir. Matrisler daha çok doğrusal denklemleri tanımlamak, doğrusal dönüşümlerde (lineer transformasyon) çarpanların takibi ve iki parametreye bağlı verilerin kaydedilmesi amacıyla kullanılırlar. Dizeylerin toplanabilir, çıkartılabilir, çarpılabilir, bölünebilir ve ayrıştırılabilir olmaları, doğrusal cebir ve dizey kuramının temel kavramı olmalarını sağlamıştır.

3.1. Matris Gösterimi

Genel olarak bir matris aşağıdaki gibi gösterilir. Matrisin sağ alt köşesine istenirse boyutları yazılır. Matristeki a_{ij} terimleri, A matrisinin elemanları olarak adlandırılır. m , matrisin satır sayısını; n ise matrisin sütun sayısını belirtir. a_{ij} elemanında i indisi elemanın bulunduğu satır numarasını, j ise elemanın bulunduğu sütun numarasını gösterir.

Yatay çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına **matrisin satırları**, dikey çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına **matrisin sütunları** denir. Matrisler [] veya () parantezleri ile gösterilirler. Genel olarak $A, B, C, \dots$ büyük harfle isimlendirilirler. Aşağıda bir firmanın yıllara göre mevsimsel satışları 4 satırı ve 3 sütunu bulunan bir matris ile gösterilmektedir.

	Yıllar		
	2009	2010	2011
İlkbahar	100	160	160
Yaz	130	200	190
Sonbahar	150	250	230
Kış	100	120	160

$$\text{Satışlar} = S = \begin{bmatrix} 100 & 160 & 160 \\ 130 & 200 & 190 \\ 150 & 250 & 230 \\ 100 & 120 & 160 \end{bmatrix}$$

Ekonomik analizlerin çoğunda doğrusal eşitlik veya eşitsizliklerin oluşturduğu bir set söz konusudur. Bu tür problemlerin çözümünde matris önemli bir konuma sahiptir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Aşağıda örnek olarak birkaç matris gösterilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 8 & -5 \\ -6 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 6}$$

Burada A , 3×6 boyutlu bir matrisi gösterir.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

B matrisinde, $b_{22} = 6$ ve $b_{31} = -1$ 'dir.

3.2. Vektörler

Satır veya sütun sayısı bir olan matrislere vektör denir. Satır veya sütun sayısı bir olduğundan diğer boyutu ile söylenir.

3 boyutlu satır vektörü;

$$\mathbf{u} = (2,3,5)$$

biçiminde gösterilir.

2 boyutlu sütun vektörü;

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Vektör aslında tek satırlı veya tek sütunlu matris olduğu için matrisle ilgili söylenebilecek ne var ise vektör için de söylenir. Örnek olarak iki vektörün toplamı veya çıkarılmasında boyutların aynı olması gerekir.

Bir satır vektörü ile sütun vektörü çarpılabilir. Yani a vektörü a 'nın (a^T) transpozesi ile çarpılabilir.

3.3. Matris Tanımları

3.1.1. 3.3.1. Kare Matris ve Esas Köşegen

Satır ve sütun sayısı eşit olan matrislere kare matris denir. Bir kare matristeki elemanların indislerinin eşit olduğu ($i = j$) elemanlar matrisin esas köşegenini oluşturur. A kare matrisinin esas köşegen elemanları; 2, 1, 5 olur.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 12 & 66 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

Burada K matrisinin **esas köşegen** öğeleri 7, 1, 22'dir

3.1.2. 3.3.2. Birim Matris

Kare matrislerin yaygın bir örneği ise, esas köşegenin üzerindeki öğelerinin 1 geri kalan öğelerin 0 olduğu birim matristir. Birim matris genellikle I harfi ile gösterilir.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İki, Üç ve Dört boyutlu birim matrisler aşağıda gösterilmektedir.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.3. 3.3.3. Sıfır Matrisi

Tüm elemanları sıfır olan matrislere sıfır matrisi denir. Aşağıda verilen O matrisi, 2×3 ve 4×3 boyutlarında bir sıfır matristirler.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.4. 3.3.4. Satır veya Sütun Matris (Vektör)

Sadece bir satırdan oluşan matrislere satır matrisi veya satır vektörü, sadece bir sütundan oluşan matrislere ise sütun matrisi veya sütun vektörü denir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = [3 \quad 5 \quad -2]$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Genellikle matrisler büyük harflerle (örneğin A), vektörler küçük kalın harflerle (örneğin $\mathbf{x}$), ve skalerleri ise küçük harflerle (örneğin k, p, v gibi) gösterilir.

3.1.5. 3.3.5. Bir Matrisin Transpozesi – Devrik Matris

Bir matrisin transpozesi (devrik matris) bulunurken satır ve sütunlar yer değiştirirler. Boyutu $m \times n$ olan bir A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen ve boyutu $n \times m$ olan matrise A matrisinin devriği (transpozu) denir ve A^T veya A' ile gösterilir. Aşağıdaki örnekte verilen A matrisinin transpozesi B matrisidir ve A^T ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

İse

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Örnek:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Burada A matrisinin Transpozesi;

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

olur.

Transpozenin Özellikleri

- 1) $(A^T)^T = A$
- 2) $(kA)^T = kA^T$
- 3) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$

3.1.6. 3.3.6. Simetrik Matris

Esas köşegene göre simetrik elemanlara sahip olan matrise simetrik matris denir. Bir matris ile matrisin transpozesi simetrik matrislerde aynıdır. A matrisi simetrik matris

demektir. Bir matrisin devriği kendisine eşitse, yani $(A^T)^T = A$ ise A matrisi Simetrik Matris adını alır.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & u & v \\ z & v & w \end{bmatrix}$$

Aşağıda simetrik matrise örnekler verilmektedir.

$$S_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi simetrik matristir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin simetrik olabilmesi için, a_{12} elemanının değeri 2 olduğuna göre, a_{21} elemanının değeri de 2 olmalıdır. $x = 2$ olmalıdır.

3.1.7. 3.3.7. Üst Üçgen ve Alt Üçgen Matris

Bir kare matriste esas köşegen elemanlarının altında kalan bütün elemanlar sıfıra eşitse üst üçgen matris (U) ve eğer esas köşegen elemanların üstünde kalan her eleman sıfıra eşitse buna da alt üçgen matris (L) denir. Aşağıda üst üçgen ve alt üçgen matris tanımına uyan örnekler verilmektedir.

Üst üçgen matris;

3	4	8
0	-1	3
0	0	1

Üst üçgen matris;

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alt Üçgen matris;

4	0	0
-1	2	0
3	5	1

Alt Üçgen matris;

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. Matrislerde Matematiksel İşlemler

Matrislerin kendilerine ait bir cebirleri vardır. Matrislerde aşağıda sıralanan işlemler önemlidir.

- Matrislerin Eşitliği
- Bir matrisin skalerle (sabit) çarpımı
- Matrislerin toplamı (farkı)
- Matrislerin çarpımı
- Matrisin Kuvvetleri
- Determinant, Minör ve Kofaktör
- Matrisin Tersi

3.1.8. 3.4.1. Matrislerin Eşitliği

Aynı tipteki iki matrisin karşılıklı tüm elemanları birbirine eşit ise bu iki matris eşittir denir.

$$A = [a_{ij}] = B = [b_{ij}]$$

ise; $A = B$ olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 3x-1 & 1 \\ 2 & y+2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ise x ve y değerlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 14 & x &= 5 \\ y + 2 &= 5 & y &= 3 \end{aligned}$$

3.1.9. 3.4.2. Matrisin Skalerle Çarpımı

Her hangi bir matris, bir k skaleri ile çarpılabilir. Sonuçta, matris kA ,

$$k.A = k(a_{ij})$$

olarak tanımlanır. Örneğin,

$$c_{ij} = k.a_{ij}$$

gibi.

$$k.A = k. \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \times a_{11} & \cdots & k \times a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \times a_{m1} & \cdots & k \times a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bir matrisi k gibi bir sabit sayıyla çarpmak demek, tüm elemanlarını k ile çarpmak demektir.

$$k = 3 \text{ ve } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ise, A matrisinin k katı, yani 3 katı;

$$k.A = 3. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bir matris, bir sayıyla çarpılırsa matrisinin her elemanı k sayısı ile çarpılır.

Örnek:

$$5 \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.0 & 2.3 \\ 2.4 & 2.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

3.1.10.3.4.3. Matrislerin Toplamı veya Farkı

İki matrisin toplanabilmesi için satır ve sütun sayılarının eşit olması gerekir. A ve B matrisleri aynı boyutta olmak şartıyla, toplamalarını bulmak (veya farklarını almak) için matris elemanları karşılıklı olarak toplanırlar (çıkarılırlar).

Toplam veya fark matrisinin elemanları, toplanan veya çıkarılan matrislerin karşılıklı elemanlarının toplamaları veya farkları olarak elde edilir.

Toplanacak $(m \times n)$ boyutlu matrisler;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

ise;

$$C = A \pm B \text{ işlemi;}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 44 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 24 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 2+5 & 0+2 \\ 1+2 & 3+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 10 & -90 & 55 \\ 77 & 12 & 0 \\ 3 & 98 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 100 & 15 \\ 11 & 1 & -4 \\ 4 & 18 & 87 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -10 & 30 \\ 66 & 2 & 5 \\ 13 & 28 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 40 \\ 22 & 11 & -9 \\ -6 & 88 & 58 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 3-0 & 2-5 \\ 1-7 & 2-5 & 0-2 \\ 1-2 & 3-1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sıfır matrisi, toplamada (fark almada) etkisiz elemandır. Yani,

$$A \pm O = O \pm A = A$$

Matris toplama ve skalerle yapılan işlemlerde özellikler:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = A + B + C = (A + B) + C$
3. $A \cdot (k \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$
4. $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$
5. $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$
6. $A + \emptyset = A$
7. $A - A = A + (-A) = \emptyset$

3.1.11.3.4.4. Matrislerin Çarpımı

İki matrisin çarpılabilmesi için, A matrisinin (birinci matrisin) sütun sayısının B matrisinin (ikinci matrisin) satır sayısına eşit olması gerekir. Bundan dolayı matris çarpma

işlemlerinde yer değiştirme özelliği yoktur. Fakat matris çarpımının dağılma özelliği vardır. Matris çarpım için aşağıdaki özellikler yazılabilir. Bir çarpımın tanımlı olup olmadığını anlamak için en kolay yöntem, aşağıdaki şekilde olduğu gibi matrisleri boyutlarıyla birlikte yazarak iç kısımdaki sayıların bir birine eşit olup olmadığını kontrol etmek olabilir. İçteki sayılar eşitse çarpım tanımlı olup, sonuçta elde edilen matrisin boyutları ise dış kısımdaki sayıların bir araya getirilmesiyle elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{A} & \times & \boxed{B} = \boxed{C} \\
 m \times n & & n \times p \quad m \times p \\
 & \text{İç} & \\
 & \text{Dış} &
 \end{array}$$

Çarpım yapılırken, birinci matris satırlarının elemanları ile ikinci matrisin sütunlarının elemanları karşılıklı çarpılır ve toplanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Örneğin;

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} = c_{11} \\
 \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n2} = c_{m2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \\
 [0 \quad 20 \quad 5 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 40 + 20 + 3 = 63
 \end{array}$$

Bu çarpımda, C matrisinin elemanlarının indisine dikkat edilirse çarpma işleminin nasıl yapıldığı hakkında daha fazla bilgi elde edilebilir. Mesela c_{ij} terimlerinin, A matrisinin i .

satırıyla B matrisinin j . sütununun elemanlarının karşılıklı çarpılıp bu çarpımların toplandığı kolayca görülebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{bmatrix}$$

İki tane 3×3 matrisin çarpımı:

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \text{ ise ;}$$

$$A.B = C$$

Çarpım matrisinin c_{11} ($i=1, j=1$) elemanı için, **birinci matrisin birinci satırı ile ikinci matrisin birinci sütunu** karşılıklı olarak çarpılır ve toplamı alınır.

c_{11} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

c_{12} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

c_{13} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

c_{21} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{21} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

c_{22} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{22} \end{bmatrix}$$

c_{23} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{23} \end{bmatrix}$$

c_{31} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{31} \end{bmatrix}$$

c_{32} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{32} \end{bmatrix}$$

c_{33} elemanı için karşılıklı olarak çarpılacak satır ve sütun;

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33} \end{bmatrix}$$

İki tane 2×2 matrisin çarpımı:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 0 \times 0 & 4 \times 0 + 0 \times -1 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 & 4 \times 0 + 4 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Örnek:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 20 & -16 \end{pmatrix}$$

Çarpımın Özellikleri:

1. $(A.B).C = A.(B.C)$
2. $A.(B + C) = A.B + A.C$
3. $(B + C).A = B.A + C.A$
4. $k.(A.B) = (k.A).B$
5. $(A.B)^T = B^T.A^T$, kare matrisler için.
6. $A^{-1}.A = I$, A^{-1} : A matrisinin tersi, I : Birim matris.
7. $A.I = A$

Çarpma işlemini örneklerle daha açık olarak görelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilmiş olsun;

$A.B$ matrisini bulalım. ($A.B \neq B.A$)

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 5.1 + 6.2 & 1.4 + 5.1 + 6.0 \\ 7.1 + 2.1 + 8.2 & 7.4 + 2.1 + 8.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

olarak elde edilir. $B.A$ matrisini bulalım.

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 4.7 & 1.5 + 4.2 & 1.6 + 4.8 \\ 1.1 + 1.7 & 1.5 + 1.2 & 1.6 + 1.8 \\ 2.1 + 0.7 & 2.5 + 0.2 & 2.6 + 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 13 & 38 \\ 8 & 7 & 14 \\ 2 & 10 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

olarak elde edilir. Bu örnekten de görüldüğü gibi $A.B$ ile $B.A$ çarpımı yapılabilsede çıkan matrisler boyutlar itibarı ile farklıdır. Dolayısıyla sağdan veya soldan çarpım bazen yapılamayabilir. Yapılsa dahi birbirine eşit matrisler çıkmaz.

$$B.C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

olarak elde edilir.

$$C.B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Bu iki matris boyutlar çarpıma uygun olmadığı için çarpılamazlar. C matrisinin sütun sayısı ile B matrisinin satır sayısı eşit değil, çarpım yapılamıyor. ($B.C \neq C.B$)

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 10 & 8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 40 + 10 = 50 & 54 + 32 - 12 = 74 \\ 0 + 10 - 5 = 5 & 45 + 8 + 6 = 59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 74 \\ 5 & 59 \end{bmatrix}$$

3.1.12.3.4.5. Matrisin Kuvvetleri

Bir A matrisinin kuvvetleri, çarpma işlemi yardımı ile bulunur. Sadece kare matrislerin kuvvetleri alınabilir. Kare olmayan matrislerin yan yana çarpımları yapılamaz.

$$A^2 = A.A$$

$$A^3 = A.A.A$$

$$A^4 = A.A.A.A$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

A^2 ve A^3 matrislerini oluşturunuz.

Çözüm:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{bmatrix}$$

Not: Matrisin kuvvetleri alınırken kesinlikle matrisler yan yana çarpımı yapılarak işlem yapılır. Matrisin içerisindeki her bir elemanın karesi alınarak kuvvet alma işlemi yapılmaz.

Uygulamalar

3.2. Aşağıda verilen matrislerin çarpımlarını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrislerinin çarpımlarının transpozmesini bulunuz.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen A matrisi ile transpozünün toplamını ve farkını alınız.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

olur.

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3 & 5+2 \\ 2+5 & -4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 3-3 & 5-2 \\ 2-5 & -4-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Uygulama Soruları

1) Aşağıda verilen matrislerinin çarpımını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{22} \\ 1 & \frac{3}{-22} \end{bmatrix}$$

Çözüm:

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{22} \\ 1 & -\frac{3}{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ Matrisinin 4. kuvvet (üs) matrisini bulunuz.

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -107 & 84 \\ -252 & 61 \end{bmatrix}$$

3) $A = \begin{bmatrix} 5x - y & 1 \\ 2 & x + y \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$A = B$ ise; $\sqrt{x^2 + y^2}$ değerini bulunuz.

$$5x - y = 11$$

$$x + y = 7$$

Çözüm değerleri

$$(x = 3, y = 4), \sqrt{x^2 + y^2}$$

İfadesinde yerine konursa;

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

olur.

4) Bir firma iki farklı fabrikasında A ve B ürünlerinden 400 ve 210 adet üretmektedir. Ürünlerin birim satış fiyatları; $A = 20 TL, B = 35 TL$ olduğuna göre firmanın toplam gelirini hesaplayınız.

$$\text{Gelir} = \text{Satış fiyatı} \times \text{Talep Miktarı}$$

$$R = p \cdot q$$

Burada p ve q matris olarak yazılır ve çarpımı yapılırsa,

$$R = \begin{bmatrix} 20 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 210 \end{bmatrix}$$

$$R = 20.400 + 35.210$$

$$R = 15350 \text{ TL}$$

olarak gelir değeri skaler sayı olarak bulunur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde matris ve vektör kavramları, matris tanımları, matris işlemleri anlatılmıştır. Matrislerde toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur.

Bölüm Soruları

1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ matrisinin boyutu aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 3
- b) 2×3
- c) 3×2
- d) 6
- e) 3×3

2) $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & z \\ t & 6 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisleri birbirine eşit matrisler ise,
 $x + y + z + t = ?$

- a) -6
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 9

3) $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & 2 \\ 1 & -b \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine ve $[A] + [B] = [C]$ olduğuna göre $a^2 - b^2 = ?$

- a) -15
- b) 25
- c) 20
- d) -12
- e) 15

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine göre $[A] \cdot [B] = ?$

- a) 22
- b) $\begin{bmatrix} 14 & 38 \\ 9 & 26 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 6 & 20 \\ 2 & 21 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 38 & 26 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

5) $\vec{u} = (3, 5, 7)$ vektörü kaç boyutlu bir vektördür?

- a) 5
- b) 4
- c) 3
- d) 2
- e) 1

6) $[0 \ 1 \ k \ 3] \times \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \\ k \end{bmatrix} = 31$ ise k aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 7
- b) 2
- c) 0
- d) 11
- e) 5

7) Bir ev hanımı pazardan 2 kg elma, 3 kg portakal almıştır. Elmanın kilosu 5 TL, portakalın kilosu 4 TL olduğuna göre, meyveler için ödenen toplam paranın hesaplanması vektörlerin çarpımı yardımı ile nasıl gösterilir?

- a) $[2 \ 3] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} [5 \ 4]$
- c) $[2 \ 3] [4 \ 5]$
- d) $[2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} x & -y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $x + y = ?$

- a) -5
- b) -2
- c) 16
- d) 8
- e) 7

9) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ise $A^3 = ?$

- a) $\begin{bmatrix} 27 & 13 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 37 & 9 \\ 18 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 37 \\ 18 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 37 & 9 \end{bmatrix}$

10) 3 boyutlu bir satır vektörü ile 3 boyutlu bir sütun vektörünün çarpımı ne olur?

- a) 3 boyutlu bir satır vektörü
- b) 3 boyutlu bir sütun vektörü
- c) 3×3 Boyutlu bir matris
- d) Skaler sayı
- e) 3×1 Boyutlu bir matris

Cevaplar:

1) c, 2) d, 3) e, 4) b, 5) c, 6) b, 7) a, 8) d, 9) b, 10) d

4. DETERMİNANT VE TERS MATRİS

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 4.1. Bir Matrisin Determinantı
- 4.2. Minör ve Kofaktör
- 4.3. Bir Matrisin Rankı
- 4.4. Bir Matrisin Tersi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** İki değişkenli fonksiyon ne demektir?
- 2)** Üç değişkenli fonksiyona bir örnek veriniz?
- 3)** Üç boyutlu uzayda iki değişkenli bir fonksiyon nasıl bir şekil oluşturur.

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Determinant	Matrislerin determinantını bulabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Bir matrisin rankı	Bir matrisin rankını belirleyebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Ter Matrisin bulunuşu	Bir matrisin tersini alabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

**Determinant
Matrisin Rankı
Minör ve Kofaktör
Ters Matris**

Giriş

Determinantlar **kare** matrisler için geçerlidir ve özel bir şekilde hesaplanır. Determinant, kare matrisleri bir reel sayıya eşleyen fonksiyondur. Determinant fonksiyonun kare matrisi eşlediği o sayıya matrisin determinanı denir. A matrisinin determinanı $\det A$ ya da $|A|$ şeklinde gösterilir. Mutlak değer ile karıştırılmamalıdır. Elemanları reel sayılar olan $n \times n$ tipindeki kare matrislerin kümesinden, reel sayılar kümesine tanımlanan fonksiyona determinant fonksiyonu denir.

4.1. Bir matrisin determinanı

Determinant denklem sistemlerinin matrisler yardımıyla çözümünde bir araç olarak kullanılırken, matrislere ilişkin birçok özelliğın saptanmasında da kullanılmaktadır. Matrisin elemanları herhangi bir denklem sisteminin katsayılarını temsil ediyor iken denklemlerin katsayılarına bağılı olarak çözümünün araştırılmasına araç olacaktır.

Öyleyse bir kare matrisin determinantının nasıl hesaplandığını görelim. Determinant hesabı için farklı yollar vardır. Boyutu kaç olursa olsun, birim matrisin (I) determinanı (bir) 1'dir.

4.1.1. Bir ve İki Boyutlu Matrislerin Determinanı

Eğer matrisimiz bir satır ve bir sütunluk bir matris ise determinant içindeki sayıya eşittir.

Örneğın, $A = [4]$ matrisinin determinanı 4 olur.

$$|A| = \text{Det } A = 4$$

Eğer matrisimiz iki satır ve iki sütundan oluşan, yani boyutu 2×2 matris ise; esas köşegen elemanları çarpımından diğer köşegen elemanlarının çarpımı çıkarılarak bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanı;}$$

$$|A| = \text{Det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

şeklinde önce asal köşegendeki elemanların daha sonra da ters köşegendeki elemanların çarpımının farkı alınarak hesaplanır. Diğer bir gösterimle;

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanı,}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (c \times b) \text{ olur.}$$

Örneğın aşağıdaki matrisin determinanı,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ ise } |A| = \text{Det } A = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 7 = 24 - 28 = -4 \text{ çıkar.}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \text{Det } A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \text{Det } A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - (-2) = 15 + 2 = 17$$

4.1.2. Üç Boyutlu Matrislerin Determinantı

Üç boyutlu matrislerin determinantı farklı yöntemler kullanılarak bulunabilir. Sadece üç boyutlu matrislerin determinantı için geliştirilen Sarrus kuralı ile determinant bulma yöntemi sıkça kullanılmaktadır. Bunun dışında minör (kofaktör) yardımı ile determinant hesabı, Elementer satır işlemleri kullanarak, matrisi indirgenmiş matris (üst üçgen matrise benzetme) kullanarak determinant hesabı gibi determinant alma yöntemleri bulunmaktadır.

1. Sarrus kuralı

$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ boyutundaki matrislerin determinantını bulmak için kullanılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ bu matrisin determinantı şöyle bulunur;}$$

Matrisin 3×3 olması durumunda kullanılabilir. İlk iki satır 4. ve 5. satır gibi yerleştirilip esas köşegene paralel 3 çarpım yapılır, toplanır. Daha sonra diğer olarak çizilip toplanma esasına dayanır.

İlk iki satır sırasıyla alta birer defa daha yazılır. Esas köşegen ve ona paralel üç çarpım yapılır. Esas köşegeni oluşturan a_{11}, a_{22}, a_{33} çarpılır; çarpım sağa yazılır. Köşegenin hemen altındaki a_{21}, a_{32}, a_{13} çarpılır; çarpım sağa yazılır. Aynı yaklaşımla a_{31}, a_{12}, a_{23} çarpılır; çarpım sağa yazılır. Sağa yazılan üç çarpımın toplamı T_1 olsun.

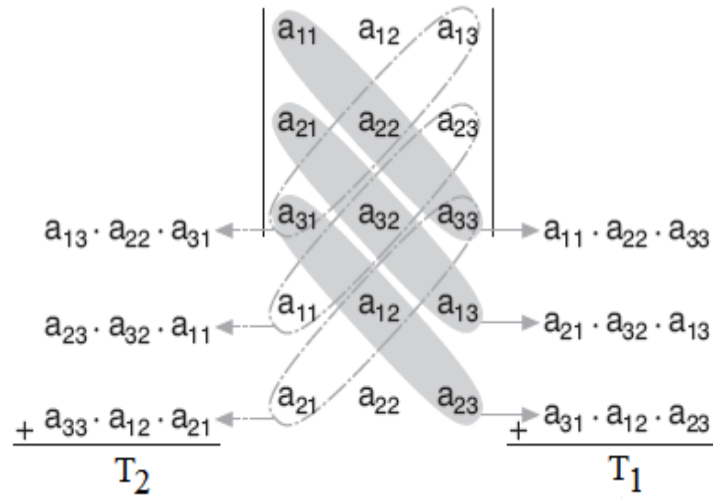
Esas köşegen ve ona paralel üç çarpım yapılır. Diğer köşegeni oluşturan a_{13}, a_{22}, a_{31} çarpılır; çarpım sola yazılır. Diğer köşegenin hemen altındaki a_{23}, a_{32}, a_{11} çarpılır; çarpım sola yazılır. Aynı yaklaşımla a_{33}, a_{12}, a_{21} çarpılır; çarpım sola yazılır. Sola yazılan üç çarpımın toplamı T_2 olsun.

$$T_2 = (a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) + (a_{23} \times a_{32} \times a_{11}) + (a_{33} \times a_{12} \times a_{21})$$

$$T_1 = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{21} \times a_{32} \times a_{13}) + (a_{31} \times a_{12} \times a_{23})$$

A matrisinin determinantı:

$$\det A = T_1 - T_2$$



farkı ile bulunur. Üç boyutlu matrisin determinanı, bir diğer ifade ile; Sarrus Yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi alınır.

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanı,}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(q \cdot z - y \cdot r) - b(p \cdot z - x \cdot r) + c(p \cdot y - q \cdot x)$$

4 veya daha fazla boyuta sahip kare matrislerin determinanı alınırken, Sarrus kuralı kullanılamaz.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplamak için, Önce, A matrisinin 1. ve 2. satırlarını sırasıyla 4. ve 5. satır olarak yazılır:

$$A = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \right\} - \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \right\} +$$

$|A| = \det(A) = (1.3.5 + 0.1.2 + 1.(-1).4) - (1.3.2 + 1.1.4 + 0.(-1).5) = 1$ olarak hesaplanır.

Aynı matrisin determinanı, sütunların sağı yazılması ile de bulunabilir. Bunun için önce 1. ve 2. sütunları, sırasıyla 4. ve 5. sütun olarak yazılır: Esas köşegene paralel üç çarpım yapılır, sonra diğer köşegene paralel üç çarpım yapılır ve toplanır. Daha sonra ilk toplamdan ikinci toplam çıkarılır ve determinant bulunur.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

-
+
+

$\det A = (1 \times 3 \times 5 + (-1) \times 4 \times 1 + 2 \times 0 \times 1) - (1 \times 3 \times 2 + 1 \times 4 \times 1 + 5 \times 0 \times (-1)) = 1$ bulunur.

Determinant Özellikleri

- B matrisi A matrisinin satırlarının yer değiştirmesi ile A' 'dan elde edilen bir matris ise $\det B = -\det A'$ 'dır.
- B matrisi k sabit sayısı ile A matrisinin bir satırının çarpılmasıyla A matrisinden elde edilen bir matris ise $\det B = k \cdot \det A'$ 'dır.
- Bir matrisin herhangi bir satırını k ile çarpıp diğer bir satıra ekleyince veya herhangi bir sütunu k ile çarpıp diğer bir sütuna ekleyince determinantın değeri değişmez.
- Bir A matrisinin iki satırı veya iki sütunu eşitse o zaman $\det A = 0$ 'dır.
- Eğer bir matrisin bir sütunu veya satırı 0 ise determinanı da 0 olur.
- Bir köşegen, alt üçgen ya da üst üçgen matrisin determinanı köşegen elemanlarının birbirleri ile çarpımına eşittir.

4.2. Minör ve Kofaktör

Minör ve kofaktör tanımı bütün $n \times n$ tipindeki matrisler için geçerlidir. Yani kare matrisler için hesaplanır. a_{ij} elemanına ait minör bir determinanttır. a_{ij} elemanına ait minör, a_{ij} elemanının bulunduğu i . satır ve j . sütun silindiğinde, geriye kalan matrisin determinantıdır. a_{ij} elemanına ait minör m_{ij} ve $A_{ij} = (a_{ij})$ matrisine ilişkin minör matrisi de $M_{ij} = (m_{ij})$ olarak gösterilir.

Örneğin $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisindeki bütün elemanlar için minörleri bulalım ve minör matrisini oluşturalım.

$a_{11} = 5$ elemanı için minör, 5'in bulunduğu 1. satır ve 1. sütun kapatıldığında geriye kalan elemana eşit olup 3'tür. ($m_{11} = 3$)

$a_{12} = 2$ elemanı için minör, 2'nin bulunduğu 1. satır ve 2. sütun kapatıldığında geriye kalan elemana eşit olup -1'dir. ($m_{12} = -1$)

$a_{21} = -1$ elemanı için minör, (-1)'nin bulunduğu 2. satır ve 1. sütun kapatıldığında geriye kalan elemana eşit olup 2'dir. ($m_{21} = 2$)

$a_{22} = 3$ elemanı için minör, 3'ün bulunduğu 2. satır ve 2. sütun kapatıldığında geriye kalan elemana eşit olup 5'dir. ($m_{22} = 5$). Dolayısıyla minör matrisi;

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Kofaktör ise, minör matrisinin işaretlenmiş halidir. a_{ij} elemanının kofaktörü;

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

formülü kullanılarak bulunur. a_{ij} elemanına ait kofaktör hesaplarırken, önce a_{ij} elemanına ait minör bulunur. a_{ij} elemanının i ve j indisleri elemanın bulunduğu satır ve sütunu ifade etmektedir. Bu indislerin toplamı çift olur ise kofaktör minöre eşit, tek olduğunda ise minörün ters işaretlisi olacaktır.

Daha önce minör matrisini elde ettiğimiz A matrisine ilişkin kofaktör matrisini oluşturmak istersek;

$a_{11} = 5$ elemanı için kofaktör, $c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = m_{11} = 3$

$a_{12} = 2$ elemanı için kofaktör, $c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot m_{12} = -m_{12} = -(-1) = 1$

$a_{21} = -1$ elemanı için kofaktör, $c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot m_{21} = -m_{21} = -(2) = -2$

$a_{22} = 3$ elemanı için kofaktör, $c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot m_{12} = m_{22} = (5) = 5$

çıkar, dolayısıyla kofaktör matrisi;

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

4.2.1. Üç boyutlu kare matrislerde minör ve kofaktör bulma

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ matrisine ilişkin minör ve kofaktörleri bulalım.

$a_{11} = 2$ elemanına ait minör; 2'nin bulunduğu satır ve sütun silindiğinde geriye kalan matrisin determinantı alınır.

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.1 - 5.2 = -10$$

$a_{12} = 1$ elemanına ait minör; 1'in bulunduğu satır ve sütun silindiğinde geriye kalan matrisin determinanı alınır.

$$m_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.1 - 3.2 = -7$$

$a_{13} = 3$ elemanına ait minör; 3'ün bulunduğu satır ve sütun silindiğinde geriye kalan matrisin determinanı alınır.

$$m_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1.5 - 3.0 = -5$$

Diğer elemanlar için benzer işlemler yapılarak minör matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -10 & -7 & -5 \\ -14 & -7 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Kofaktör matrisinin oluşturulması istenirse; bulunan minör matrise işaretleri konularak elde edilir. Her hangi bir eleman için kofaktör, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütun sayısı toplamı çift iken minöre, tek ise minörün ters işaretlisine eşittir. Dikkat edilecek olursa 3 boyutlu matrislerde kofaktör hesaplanırken 1. satırdaki minörler sırasıyla **+1, -1, +1** ve 2. sütundaki minörler **-1, +1, -1** ile yine 3. sütundaki minörler sırasıyla **+1, -1, +1** ile çarpılmaktadır. Bir elemanın kofaktörü onun işaretli minör elemanına eşittir. Dolayısıyla verilen matrise ilişkin kofaktör matrisi;

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 14 & -7 & -7 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

4.2.2. Minör Yardımı (Kofaktör Yardımı) ile Determinant Hesabı

Minör açılımı ile determinant hesabı A matrisinin herhangi bir satır veya sütunundaki elemanların kofaktörleriyle çarpımlarının toplamına eşittir.

Önceki örnekte verilen A matrisinin determinantının, minör (kofaktör) yardımı ile yapılması istenirse;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = |A| = a_{11} \cdot \text{kof}(a_{11}) + a_{12} \cdot \text{kof}(a_{12}) + a_{13} \cdot \text{kof}(a_{13})$$

$$\text{Det}(A) = |A| = (a_{11} \times c_{11}) + (a_{12} \times c_{12}) + (a_{13} \times c_{13})$$

$$|A| = [a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23})] +$$

$$[a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23})] +$$

$$[a_{13} \times (a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22})]$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times m_{12} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$c_{12} = (-1)^{2+2} \times m_{22} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$c_{13} = (-1)^{2+2} \times m_{32} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{Det}(A) = 2 \cdot (-10) + 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) = -28$$

4 ve daha fazla boyutlu matrislerin determinantları da minör (kofaktör) yardımıyla yani alt determinantlara geçilerek hesaplanabilir. Fakat oldukça fazla işlem gerektirmektedir. Burada minör açılımı ile 4 boyutlu matrisin determinantını hesaplamak yerine, matrisin satır ve sütunları arasında yapılan elementer satır ve sütun işlemleri (eliminasyon) ile elde edilen **üst üçgen** matrisin determinantı hesaplamak genellikle daha az işlem gerektirir.

4.3. Bir Matrisin Rankı

Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n} \neq 0$ matrisinin karesel alt matrisleri arasında, determinantı sıfırdan farklı olanların mertebesi en büyük olana A matrisinin rankı denir ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ ile gösterilir. Bir matristeki doğrusal bağımsız vektör sayısıdır. Bu konu bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak anlatılacaktır.

Örneğin $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin rankının bulunması istenirse;

A matrisinde iki satır vektörü üç tane sütun vektörü bulunmaktadır. Rank en fazla verilen matrisin satır veya sütun vektör sayılarının küçüğüne eşit olabilir. Dolayısıyla A matrisinin rankı en fazla 2 olabilir. Ancak, A matrisinin iki satır vektörü arasında matematiksel bir ilişki vardır. İkinci satır birinci satırın 2 katıdır. Dolayısıyla bu matriste bulunan vektörlerin bir tanesi doğrusal bağımsızdır. O nedenle A matrisinin rankı 2'dir. A matrisi kare matris olmadığı için determinantı alınamaz. Ancak A matrisi içerisinde 3 farklı 2×2 alt matris oluşturulabilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu iki boyutlu kare matrislerin determinantı alınırsa, hepsinin determinantı sıfır çıktığı, yani iki boyutlu oluşturulan kare matrislerin determinantlarının hepsi sıfır olduğu için, matrisin rankı 2 olamaz, 2 den küçük olur.

A matrisinin herhangi bir elemanı sıfırdan farklı olduğu için, rankı birdir. $r(A) = 1$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } \text{rank}(A) = r(A) \text{ kaçta eşittir?}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+3} \times (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -18 \neq 0$$

$$\text{rank}(A) = r(A) = 3 \text{ olur.}$$

4.4. Bir Matrisin Tersi

A karesel bir matris olmak üzere, $A \times B = B \times A = I$ olacak şekilde bir B matrisi varsa, B 'ye A 'nın çarpmaya göre tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Karesel olmayan matrislerin çarpmaya göre tersinden söz edilemez.

Gerçel sayılarda denklem çözerken; bölme işlemi yardımı ile bilinmeyenler yalnız bırakılıp çözülebilir.

$$3x = 5 \text{ ise } x = 5/3$$

Ancak matris işlemleri arasında bölme işlemi yoktur. Dolayısıyla birden fazla denklemden oluşan doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde, bilinmeyenleri bulabilmek için; matrisin tersini bulmaya ihtiyacımız vardır.

Aşağıda bir doğrusal denklem takımı verilmektedir. Bu denklem takımındaki x_1, x_2 bilinmeyenlerinin bulunması istenirse,

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 26 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Önce verilen denklem takımını matrislerle ifade edelim;

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 24 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad [A] \cdot [x] = [b]$$

Burada; A katsayılar matrisi; x , bilinmeyenler matrisi ve b , sağ taraf sabitleri matrisi olur.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 26 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot [x] = [b]$$

x çözüm vektörünü bulmak için (matrislerde bölme olmadığı için) her iki taraf A matrisinin tersi $[A]^{-1}$ ile çarpılır. Matrislerde ters matrisin bölme işlevini görür.

$$\begin{aligned} [A]^{-1} \cdot [A] \cdot [x] &= [A]^{-1} \cdot [b] \\ [A]^{-1} \cdot [A] &= [I] \text{ ve } [I] \cdot [x] = [x] \text{ olduğu için,} \\ [x] &= [A]^{-1} \cdot [b] \end{aligned}$$

$[x] = [A]^{-1} \cdot [b]$ formülü ile artık bilinmeyenler belirlenir. Yani A matrisinin tersi ile sağ taraf sabitleri (b) çarpılarak bilinmeyenler bulunur.

İşte burada gördüğümüz $[A]^{-1}$ matrisi, $[A]$ katsayılar matrisinin tersidir (inversi). Dolayısıyla bir matrisin tersinin nasıl bulunacağı bilinmelidir.

Sadece kare matrislerin tersinden bahsedilir. Bir matris kare matris değil ise, tersi alınamaz. Matrisin tersini bulmada birkaç yöntem bulunmaktadır. Genel olarak bir matrisin tersi aşağıdaki formülle verilir.

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A) = \frac{\text{Ek}(A)}{|A|}$$

Bu formülden de anlaşılacağı üzere, A matrisinin determinantı sıfır çıkar ise, $\frac{1}{|A|}$ tanımsız olacağından, A matrisinin tersi yoktur. Bu formülde yazan ek matris ($\text{Ek}(A)$), katsayılar matrisine ait kofaktör matrisinin transpozesine eşittir. $\text{Ek}(A)$, bir kare matrisin işaretli minör matrisinin (kofaktörünün) transpozesine eşittir.

$$\text{Ek}(A) = (C_{ij})^T$$

4.4.1. Ek Matris Yardımıyla Ters Matrisin Bulunması

Bir matrisin tersinin bulunabilmesi için aşağıdaki adımlar uygulanır.

- 1. Adım:** A matrisinin determinantı alınır, $|A|$ bulunur.
- 2. Adım:** A matrisine ilişkin minör matrisi oluşturulur (M_{ij}).
- 3. Adım:** Daha sonra kofaktör matrisi oluşturulur (C_{ij}).
- 4. Adım:** Ek matris bulunur $\text{Ek}(A)$.
- 5. Adım:** Ek matris, buluna determinant değerinin tersi ile çarpılarak ters matris elde edilir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ise A matrisinin tersini A^{-1} matrisini bulunuz.

Çözüm:

Önce A matrisinin determinantı bulunur.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7$$

Determinant sıfır çıkmadığına göre A matrisinin tersi vardır. Ters matrisi bulabilmek için Ek matrisin bulunması gerekir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur, bu durumda;}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$|A| = -3 \neq 0$$

çıktığı için matrisin tersi alınabilir.

2×2 boyutlu kare matrislerde ek matris şu şekilde oluşturulur. Minör ve kofaktör ve son olarak ek matris oluşturma adımlarının sonucunda, esas köşegen üzerindeki elemanlar yer değiştirir, diğer köşegendeki elemanlar ise işaret değiştirir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{-3} & -\frac{3}{-3} \\ -\frac{4}{-3} & -\frac{1}{-3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

4.4.2. Elementer Satır İşlemleri Yardımıyla Ters Matrisin Bulunuşu

Elementer satır işlemleri yardımı ile matrisin tersi alınırken, verilen matrisle aynı boyutta birim matris yan yana yazılır.

$$[A \quad : \quad I]$$

Sonra elementer satır işlemleri yardımı ile A matrisi I birim matrisine benzetilmeye çalışılır. Bu sırada A'ya yapılan tüm elementer satır işlemleri I birim matrise de uygulanır. A matrisi birim matris durumuna geldiğinde, sağda oluşan matris A matrisinin tersi olur.

$$[I \quad : \quad A^{-1}]$$

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini elementer satır işlemleri yardımı ile bulunuz.

Çözüm:

$$[A \quad : \quad I]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & : & 1 & 0 \\ 4 & -9 & : & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_2 \rightarrow S_2 + 4S_1 \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & : & 1 & 0 \\ 0 & 3 & : & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 \rightarrow -S_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & : & -1 & 0 \\ 0 & 3 & : & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 \rightarrow S_1 + S_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 3 & 1 \\ 0 & 3 & : & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 \rightarrow S_2/3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 3 & 1 \\ 0 & 1 & : & 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Burada da yukarıdaki ile aynı sonuç elde edilmiştir.

Bulduğumuz ters matrisin doğru olduğunu sınamak için A matrisi ile tersini yani A^{-1} matrisini çarptığımızda birim matris elde edilmelidir. Elde edilememişse, matrisin tersi alınırken işlem hatası yapılmıştır.

$$[A] \cdot [A^{-1}] = [I] \quad \rightarrow \quad A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 4 & -1 + 1 \\ 12 - 36/3 & 4 - 9/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Uygulama Soruları

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ise; } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 1.5 = 8 - 3 = 5$$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisine ait minörleri bulunuz ve minör matrisi oluşturunuz.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ise; minörleri, $m_{11} = 4$, $m_{12} = 1$, $m_{21} = 3$, $m_{22} = 2$

$$M = (m_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisine ait kofaktörleri bulunuz ve kofaktör matrisini oluşturunuz.

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = 1.4 = 4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot m_{12} = (-1).1 = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{1+1} \cdot m_{21} = (-1).3 = -3$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot m_{22} = 1.2 = 2$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisine ait Ek matrisini bulunuz.

$$\text{Ek}(A) = (c_{ij})^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

6) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını, rankını bulunuz ve tersini alınız.

$$|A| = 45$$

Determinant sıfırdan farklı olduğu için $r(A) = 3$ 'tür.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{45} & -\frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ \frac{4}{45} & \frac{19}{45} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde ilk kısmında bir matrisin determinantının bulunması, matrisin rankının belirlenmesi, minör ve kofaktör kavramları anlatılmıştır. Son kısımda ise bir matrisin tersinin nasıl alınacağı konusu üzerinde durulmuştur.

Bölüm Soruları

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $|A|$ kaçtır?

- a) -1
- b) 2
- c) 11
- d) 5
- e) -11

2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 20 \end{vmatrix}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 11
- b) 7
- c) 5
- d) 60
- e) -5

3) $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 5x + 3y = 8 \end{cases}$ denklem sistemine ilişkin katsayılar matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & : & 9 \\ 5 & 3 & : & 8 \end{bmatrix}$

4) $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi için A^T aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- a) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- c) 0
- d) $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ k & 4 & 6 \end{vmatrix} = 10$ Olması için k 'nın değeri kaç olmalıdır?

- a) 12
- b) 8
- c) 0
- d) -8
- e) 12

6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinde a_{32} elemanına ait minör aşağıdakilerden hangisidir?

- a) -9
- b) -7
- c) 5
- d) 7
- e) 10

7) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinde a_{12} elemanına ait kofaktör aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 11
- b) 7
- c) 6
- d) 11
- e) -22

8) Doğrusal denklem sistemleri için, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- a) $r(A) = r(A; b) < n$ ise denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.
- b) $r(A) = r(A; b) = n$ ise denklem sisteminin tek çözümü vardır.
- c) $r(A) \neq r(A; b)$ ise denklem sisteminin çözümü yoktur.
- d) Bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ise tek çözüm vardır.
- e) Homojen denklem sistemlerinin çözümü her durumda vardır.

9) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ise $A^{-1} + B^{-1}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

10) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

Cevaplar:

1) c, 2) b, 3) a, 4) e, 5) e, 6) d, 7) a, 8) d, 9) c, 10) a

5. DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 5.1. Doğrusal Denklem Sistemi
- 5.2. Matrisin Rankı
- 5.3. Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümleri
- 5.4. Homojen Denklem Sistemleri

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Doğrusal denklem sistemi ne demektir?
- 2)** Doğrusal denklem sistemleri hangi yöntemlerle çözülür?
- 3)** Homojen Denklem Sistemlerinin farkı nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Doğrusal denklem sistemi	Doğrusal denklem sistemini tanımlayabilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek
Denklem sistemlerinin çözümü olup olmadığının araştırılması	Verilen denklem sisteminin çözümü olup olmadığını incelemek	Okuyarak, Tekrar yapmak
Denklem sistemi çözüm yöntemleri	Denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerini öğrenmek	Okuyarak, Araştırarak
Homojen denklem sistemleri	Homojen denklem sistemini kavramak	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Doğrusal Denklem Sistemi Katsayılar matrisinin Rankı Genişletilmiş Matrisin Rankı Homojen Denklem Sistemi
--

Giriş

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \in R$ olmak üzere,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

biçiminde olan denklemlere doğrusal denklem denir. İşletme, ekonomi problemlerinin çoğunda, anlaşılması ve yorumlanması kolay olduğu için, doğrusal olmayan modeller bile yapılan hataların az olacağı tahmin edilebildiğinde doğrusal denklemlere dönüştürülür.

Örneğin, $2x + 5y = 10$ denklemi bir doğrusal denklemdir. Bu denklemde iki bilinmeyen bulunmaktadır. $3x - y + 5z = 12$ de yine bir doğrusal denklemdir ve üç bilinmeyen bulunmaktadır. Nasıl ki, iki değişkenli bir doğrusal denklem ($2x + 5y = 9$ gibi), kartezyen koordinat sisteminde bir doğru meydana getiriyor ise, üç değişkenli bir doğrusal denklem de ($3x - y + 5z = 12$ gibi) üç boyutlu uzayda bir düzlemi ifade eder.

5.1. Doğrusal Denklem Sistemi

Genel olarak n bilinmeyenli doğrusal denklem;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

biçiminde gösterilir.

Birden fazla doğrusal denklemin bir arada verilmesi durumunda, doğrusal denklem takımları veya doğrusal denklem sistemleri oluşur.

n bilinmeyenli m denklemden oluşan doğrusal denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Yukarıda verilmiş olan; n bilinmeyenli m denklemden oluşan doğrusal denklem sisteminin matrisle gösterimi;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

biçimindedir. Denklem sistemine ait katsayılar matrisi $A = [A]$ ile, bilinmeyenler vektörü $x = [x]$ ile ve sağ taraf sabitlerini $b = [b]$ ile gösterilirse; yukarıdaki eşitlik özetle;

$$[A] \cdot [x] = [b]$$

biçiminde yazılır.

$$A = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{Değişkenlere ait katsayılar matrisi}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{Değişkenler (Bilinmeyenler) Matrisi}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad \text{Sağ taraf sabitleri}$$

Örnek:

Doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Cevap:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 5x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5.3x + 5.4y &= 5.7 \\ (-3).5x + (-3).3y &= (-3).8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15x + 20y &= 35 \\ -15x - 9y &= -24 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ -15 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 11y &= 11 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bulunan bu değer denklemlerden birinde yerine konursa,

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 3x + 4 &= 7 \\ 3x &= 3 \end{aligned}$$

$x = 1$ olarak bulunur.

Bulunan $(x, y) = (1, 1)$ noktası denklem sisteminin çözüm noktasını oluşturur.

Örnek: Aşağıda verilen denklem sistemine ilişkin katsayılar, bilinmeyenler ve sağ taraf sabitleri matrisini yazınız.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$Ax = b \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5.2. Matrisin Rankı

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan indirgenmiş matrisin, (indirgenmiş matris; üst üçgen matrise benzetilmiş matris) sıfırdan farklı satır sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir. İndirgenmiş matris oluşturulurken elementer satır (veya sütun) işlemleri kullanılır. Bir diğer tanımla, bir matrisin içinden oluşturulabilen ve determinant değeri sıfır olmayan en yüksek boyutlu karesel matris ve alt matrislerinin boyutuna matrisin rankı denir.

Kare matrisler için bu tanım özel bir önem taşır. Çünkü bir kare matristen çıkartılabilecek en yüksek boyutlu (mertebeli) determinantın boyutu - eğer determinant sıfır değilse - matrisin boyutuna eşittir. Yani, genelde, kare matrislerin determinantın sıfır olmaması durumunda boyutu ile rankı eşittir. Diğer sözlerle $[a_{ij}]$ matrisinin determinanı için yazdığımız,

$$|a_{ij}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{kj} \neq 0$$

ise $[a_{ij}]$ matrisinin rankı n 'dir.

Eğer bir kare matrisin rankı boyutundan küçükse, yani matrisin determinanı sıfır çıkıyor ise, böyle matrislere tekil matris adı verilir. Yukarıdaki determinant özelliklerine bir göz atıldığında bir matrisin tekil olması için yeter ve gerek şartın 'herhangi iki satırının (sütununun) lineer bağımlılığı' olduğu hemen görülecektir.

Tekil olmayan bir kare matrisin rankı, matristeki elemanların yeri değiştirilmeden yazılan determinantının boyutuna ya da satır (sütun) sayısına eşittir.

Bir matrisin bazı satır ve sütunlarını silmek suretiyle elde edilen $r \times r$ boyutlu kare matrislerden hiç olmazsa birinin determinanı sıfırdan farklı, fakat $r \times r$ 'den daha yüksek boyutlu kare matrislerden her birinin determinanı sıfır ise r sayısına A matrisinin rankı denir.

Bir matrisin rankı, en fazla matrisin boyutlarının küçüğü kadar olabilir. Örneğin 2×4 boyutlu matrisin rankı en fazla 2 olabilir.

$$r(A) \leq \min(m, n)$$

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

A matrisi bir kare matris olduğu için, doğrudan A matrisinin determinantı alınır. $|A| = 5 \neq 0$ olduğundan dolayı, iki boyutlu kare matrisin determinantının sıfır olup olmadığı incelendiğinden verilen matrisin rankı 2 olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankını bulunuz.}$$

Çözüm:

A matrisi bir kare matris olduğu için, doğrudan A matrisinin determinantı alınır. $|A| = 0$ olduğundan dolayı, rank 2 de olamaz, 2'den küçük olur. Matrisin elemanlarından herhangi biri sıfırdan farklı ise rank 1 olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankını bulunuz.}$$

Çözüm:

A matrisi bir kare matris olduğu için, doğrudan A matrisinin determinantı alınır. $|A| = -6 \neq 0$ olduğundan dolayı, matrisin rankı 3 olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

Matris üç boyutlu kare matris olduğu için, rankı en fazla 3 olabilir. A matrisi üç boyutlu kare matris olduğu için, doğrudan A matrisinin determinantı alınır. $|A| = 0$ çıktığından dolayı, matrisin rankı üç olamaz. Acaba 2 mi yoksa 1 mi diye incelenir. Dolayısıyla A matrisinden oluşturulabilecek iki boyutlu karesel alt matrislerin determinantları incelenir. Bunlardan herhangi bir tanesinin determinantı sıfırdan farklı çıkar ise, A matrisinin rankı 2 olur.

A matrislerinden oluşturabilen determinantı sıfırdan farklı olan bir kare matris bulalım.

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı, $|A| = 4 \neq 0$ olduğu için, A matrisinin rankı 2 olur.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

Matrisin boyutu 3×4 olduğuna göre, matrisin rankı en fazla boyutlarından küçüğü olan 3 olabilir. $r(A) \leq \min(3, 4)$, $r(A) \leq 3$. Önce verilen A matrisinin 1. satırını -2 ile çarpıp 2. satırına ve yine 1. satırını 4 ile çarpıp 3. satırına ekleyelim;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matriste 2. satırı 3 ile çarpıp 3. satıra ekleyelim;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Böylece verilen A matrisi indirgenmiş matris durumuna gelmiştir. İndirgenmiş matriste sıfırdan farklı en az bir eleman içeren satır sayısı 3 olduğundan (üç tane doğrusal bağımsız satır vektörü bulunduğu) $r(A) = 3$ olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin rankını bulunuz.}$$

A matrisinin boyutu 3 olduğu için önce 3 boyutlu A matrisinin determinantını bulalım.

$$\det A = |A| = 0$$

olduğundan A matrisinin rankı 3'ten küçüktür.

Bu durumda A matrisinden elde edilecek 2×2 kare alt matrislerin determinantlarını incelememiz gerekir. Bunlardan herhangi birinin determinantı sıfırdan farklı ise diğer 2×2 boyutlu kare matrislerin determinantlarını bulmamıza gerek kalmaz.

2×2 kare alt matrislerden biri olan;

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 1.1 = 2 \neq 0$ olduğundan, A matrisinin rankı 2'dir.

$$r(A) = 2$$

5.3. Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Bir denklem sisteminin çözümü olup olmadığı katsayılar ve genişletilmiş (arttırılmış) matrisin rankları incelenerek belirlenir. Aşağıda 3 farklı denklem takımı verilmektedir. Her denklemde 2 bilinmeyen bulunmaktadır ($n = 2$).

1. Denklem Sistemi	2. Denklem Sistemi	3. Denklem Sistemi
$2x + 3y = 8$ $3x + y = 5$	$2x + 3y = 8$ $4x + 6y = 16$	$2x + 3y = 8$ $2x + 3y = 5$
$r(A) = 2, r(A; b) = 2$	$r(A) = 1, r(A; b) = 1$	$r(A) = 1, r(A; b) = 2$
$n = 2$	$n = 2$	$n = 2$
$r(A) = r(A; b) = n$	$r(A) = r(A; b) < n$	$r(A) \neq r(A; b)$
Tek Çözüm	Sonsuz Çözüm	Çözüm Yok

Bir denklem sisteminde,

- 1) $r(A) = r(A; b) = n$ ise denklem sisteminin tek çözümü vardır.
- 2) $r(A) = r(A; b) < n$ ise denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.
- 3) $r(A) \neq r(A; b)$ ise denklem sisteminin çözümü yoktur.

Örnek:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümü olup olmadığını inceleyiniz, varsa çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

gösteriminde, katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ve genişletilmiş matris

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & : & 8 \\ 3 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}$$

olur.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$(A|b) = (A; b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & : & 8 \\ 3 & 1 & : & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

A matrisinin determinanı, $|A| = -7 \neq 0$ olduğundan, $r(A) = 2$, $(A | b)$ matrisinin boyutu 2×3 olduğundan, genişletilmiş matrisin rankı en fazla boyutlarından küçüğü olan 2'ye eşit olabilir. Bu matristen oluşturulacak olan 2 boyutlu kare matrislerin determinantlarından en az biri sıfırdan farklı olduğunu belirler isek, genişletilmiş matrisin rankı 2 olur. $(A|b)$ matrisinin rankı da yine 2 dir. Çünkü genişletilmiş matris içerisinde oluşturulabilecek determinanı sıfır olmayan iki boyutlu bir matris oluşturulmak istenirse, zaten A matrisinin determinanı sıfırdan farklı olduğu için A matrisi seçilebilir.

Dolayısıyla $r(A) = r(A; b) = n = 2$ olduğundan, denklem sisteminin tek çözümü vardır.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = 1 \text{ ve } y = 2$$

Öyleyse denklem sistemleri şeklinde verilen bir problemin matris formunda nasıl yazıldığını görelim.

Ürünlerin makinelerde birim işlenme süreleri

	Makine 1	Makine 2	Makine 3
Ürün 1 (x_1 adet)	3	5	2
Ürün 2 (x_2 adet)	4	0	3
Ürün 3 (x_3 adet)	2	6	1
Kapasite (Saat)	30	40	35

Kapasite belirli olduğuna göre tüm kapasiteyi kullanarak üç üründen ne kadar üretilbilir?

Makine 1, 2 ve 3 için kapasite kullanımını ifade eden denklemler,

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 30$$

$$5x_1 + 0x_2 + 6x_3 = 40$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 35$$

Öyleyse

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{çözüm vektörü}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{katsayılar matrisi}$$

$$b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ Sağ taraf sabitleri (kapasiteler)}$$

olmak üzere yukarıda yazdığımız denklemin $A \cdot x = b$ şeklinde matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Bu denklem sistemi çözülecek, hangi üründen ne kadar üretilebileceği bulunur.

5.4. Homojen Denklem Sistemleri

Sağ taraf sabitleri sıfır değerlerinden oluşuyor ise bu şekildeki denklem sistemlerine homojen denklem sistemi denir. Homojen denklem sisteminde her zaman en az bir çözüm vardır. $(0, 0, 0)$ noktası her zaman bu denklem sistemini sağlar.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homojen denklem sistemlerinde sağ taraf sabitleri sıfır değerlerinden oluştuğu için, genişletilmiş matrisin rankı her zaman katsayılar matrisinin rankına eşit olacaktır. Bu nedenle,

$r(A) = r(A; b)$ olduğu için, her zaman çözüm var demektir.

Dolayısıyla sadece rank değeri, denklem sistemindeki bilinmeyen sayısı ile kıyaslanır. $r(A)$ ile n birbirine eşit ise tek çözüm vardır, ki bu çözüm sıfır çözümdür. $r(A) < n$ ise sonsuz çözüm vardır.

Örnek:

Aşağıda verilen homojen denklem sisteminin çözümü olup olmadığını inceleyiniz

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 5x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 4 - 15 = -11 \neq 0$ olduğundan,

$$r(A) = 2$$

$$(A; b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 5 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \text{ olacağına göre,}$$

$$r(A; b) = 2$$

$r(A) = n = 2$ olduğundan, tek çözüm var.

0 çözümde, $(x = 0, y = 0)$ 'dir.

Uygulama Soruları

1) 2 kg elma ile 3 kg portakal için ödenen miktar 16 TL, 1 kg elma ile 3 kg portakala ödenen miktar 11 TL ise, elma ve portakalın kg fiyatlarını bulmak için bir denklem takımı oluşturunuz.

Çözüm:

$$2x + 3y = 16$$

$$x + 3y = 11$$

1) 1. soruda oluşturulan modeli matris biçiminde gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \end{bmatrix}$$

2) İlk soruda oluşturulan doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$(x = 5, y = 2)$$

Elmanın kg'ı : 5 TL,

Portakalın kg'ı: 2 TL

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

A matrisinin boyutu 3×2 olduğuna göre rankı en fazla boyutlarından küçüğüne eşit olacağından, en fazla 2 olacaktır. $r(A) \leq 2$ olabilir.

A matrisi kare matris değildir, bu nedenle determinant hesaplanmaz. Ancak, A matrisi içerisinde oluşturulacak en büyük boyutlu kare matrisler 2 boyutlu olacaktır.

Bu oluşturulan 2 boyutlu kare matrislerden her hangi birinin determinantı sıfırdan farklı çıkar ise, işlem tamamlanmış olur ve rank 2'dir denir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler A matrisinin 2 boyutlu alt matrisleridir.

Bunlardan sadece birinin determinantına bakılırsa;

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 2.5 = -7 \neq 0$$

Bu nedenle A matrisinin rankı $r(A) = 2$ olur.

4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

A matrisinin boyutu 3×2 olduğuna göre rankı en fazla boyutlarından küçüğüne eşit olacağından, en fazla 2 olacaktır. $r(A) \leq 2$ olabilir.

A matrisi kare matris değildir, bu nedenle determinant hesaplanmaz. Ancak, A matrisi içerisinde oluşturulacak en büyük boyutlu kare matrisler 2 boyutlu olacaktır.

Bu oluşturulan 2 boyutlu kare matrislerden her hangi birinin determinanı sıfırdan farklı çıkar ise, işlem tamamlanmış olur ve rank 2'dir denir.

5) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm:

B matrisinin boyutu 3×2 olduğuna göre rankı en fazla boyutlarından küçüğüne eşit olacağından, en fazla 2 olacaktır. $r(A) \leq 2$ olabilir.

B matrisi kare matris değildir, bu nedenle determinant hesaplanmaz. Ancak, B matrisi içerisinde oluşturulacak en büyük boyutlu kare matrisler 2 boyutlu olacaktır.

Bu oluşturulan 2 boyutlu kare matrislerden her hangi birinin determinanı sıfırdan farklı çıkar ise, işlem tamamlanmış olur ve rank 2'dir denir.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Bu matrisler B matrisinin 2 boyutlu alt matrisleridir.

Bu alt matrislerin determinantları bulunursa;

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.2 = 0$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 3.2 = 0$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 3.4 = 0$$

Çıktığı için, B matrisinin rankı $r(A) < 2$ olur.

Acaba rank 1 mi diye incelersek;

B matrisinin elemanlarından herhangi biri sıfırdan farklı ise rank 1 olur.

Dolayısıyla bu matrisin rankı da 1'dir. $r(A) = 1$.

B matrisi dikkatle incelenirse, 2. satır, 1. satırın 2 katı; 3. satır, 1. satırın 3 katıdır. Yani aslında bir tane doğrusal bağımsız satır (vektör) vardır.

Bu nedenle $r(A) = 1$ olur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde doğrusal denklem sistemleri tanıtılmıştır. Doğrusal denklem sisteminin çözümü olup olmadığını inceleyebilmek için matris rankı tanımlanmıştır. Daha sonra denklem sistemi çözüm yöntemlerinde bahsedilmiş ve ardından homojen denklem sistemleri anlatılmıştır.

Bölüm Soruları

1) 2 bardak çay ile 4 kutu kolanın toplam tutarı 22 TL, 3 bardak çay ile 1 kutu kolanın toplam tutarı 13 TL olduğuna göre, çay ve kutu kolanın fiyatlarını bulmak için oluşturulacak denklem takımı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\begin{cases} 2\text{Ç} + 4K = 13 \\ 3\text{Ç} + K = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\text{Ç} + 4K = 22 \\ 3\text{Ç} + K = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4\text{Ç} + 2K = 22 \\ \text{Ç} + 3K = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4\text{Ç} + 2K = 13 \\ \text{Ç} + 3K = 22 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2\text{Ç} = 22 \\ 3K = 13 \end{cases}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Yukarıda verilen A matrisinin rankı kaçtır?

- a) Rankı bulunamaz
- b) 3
- c) 2
- d) 1
- e) 0

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$ denklem sisteminin çözümü hakkında aşağıdakilerden hangisi söylenir?

- a) Sonsuz çözümü vardır
- b) Tek Çözümü vardır
- c) Çözüm yoktur
- d) İki çözümü vardır
- e) Çözüm hakkında bir şey söylenemez

4) $\begin{bmatrix} 10 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ doğrusal denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre $k =$?

- a) 3
- b) 6
- c) 12
- d) 15
- e) 18

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözüm değerlerinin toplamı $(x + y + z)$ kaçtır?

- a) -1
- b) 0
- c) 3
- d) $2/3$
- e) $2/3$

6) Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- a) $r(A) = r(A; b) = n$ ise denklem sisteminin tek çözümü vardır.
- b) $r(A) = r(A; b) < n$ ise denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.
- c) $r(A) \neq r(A; b)$ ise denklem sisteminin çözümü yoktur.
- d) Bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla ise denklem sisteminin çözümü yoktur.
- e) Homojen denklem sistemlerinin çözümü kesinlikle vardır.

7) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir.

- a) Çözüm yoktur
- b) Sonsuz çözümü vardır
- c) Tek çözümü vardır
- d) İki çözümü vardır
- e) Çözüm hakkında bir şey söylenemez

8) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 5x + 3y = 8 \end{cases}$

Yukarıda verilen denklem sistemine ilişkin katsayılar matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & : & 7 \\ 5 & 3 & : & 8 \end{bmatrix}$

9) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

- a) (2, 0)
- b) (0, 2)

- c) (2, 2)
- d) (1, 1)
- e) (0, 0)

10) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

Yukarıda verilen A matrisinin rankını nedir?

- a) Rankı hesaplanamaz
- b) 3
- c) 2
- d) 1
- e) 0

Cevaplar:

1) b, 2) c, 3) a, 4) d, 5) c, 6) d, 7) b, 8) a, 9) e, 10) c

6. DOĞRUSAL DENKLEM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ (GAUSS VE GAUSS-JORDAN ELİMİNASYONU)

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 6.1. Gauss Eliminasyonu Yöntemi
- 6.2. Gauss - Jordan Eliminasyonu Yöntemi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Gauss Eliminasyonu bildiğiniz hangi yönteme benzemektedir?
- 2)** Gauss Eliminasyonu yöntemi ile Gauss – Jordan Eliminasyonu arasında ne fark vardır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Gauss Eliminasyonu Yöntemi ile Denklem Sistemi Çözümü	Verilen bir denklem sistemini Gauss Eliminasyonu Yöntemi kullanarak çözebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Gauss-Jordan Eliminasyonu Yöntemi ile Denklem Sistemi Çözümü	Verilen bir denklem sistemini Gauss - Jordan Eliminasyonu Yöntemi kullanarak çözebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Gauss Eliminasyonu Gauss – Jordan Eliminasyonu

Giriş

Yok etme yöntemi olarak da geçen Gauss Eliminasyonu yöntemi, denklem sistemindeki bilinmeyenlerin tek biri kalıncaya kadar, elementer satır (sütun) işlemleri ile yok edilmesi (katsayısının sıfırlanması) ve son denklemden bulduğumuz bilinmeyen değeri geriye doğru yerine koyarak bütün bilinmeyenlerin hesaplanmasına dayanır.

6.1. Gauss Eliminasyonu Yöntemi

Anlaşılabilirliği kolaylaştırmak açısından bilinmeyen sayısını üç alarak bir doğrusal denklem sistemini yeniden yazalım.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Bu denklemlerden birinciye a_{11} ile bölsek ve böylece elde ettiğimiz denklemi sırayla a_{21} , a_{31} ile çarparak sırasıyla 2. , 3. denklemlerden çıkartsak x_1 in katsayısı ilk denklemde 1 olurken diğer bütün denklemlerde sıfırlanacaktır. Yani sistemimizin yeni biçimi şöyle olacaktır. Bu işlemler yapılırken x_2 ve x_3 'ün katsayıları da değişecektir.

$$a_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 = B_1$$

$$A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = B_2$$

$$x_3 = B_3$$

Görüldüğü gibi x_3 hesaplanmıştır. x_2 Değerini bulmak için x_3 değerini önceki denklemde yerine koymak yeterlidir. Benzer şekilde geri doğru giderek bütün x_i değerleri hesaplanabilir.

Gauss Yöntemi ile verilen denklem sistemi aşağıdaki yapıya benzer bir duruma gelmiş olur.

$$Ax + By + Cz = D$$

$$Ey + Fz = G$$

$$Hz = K$$

Örnek olarak, bir süpermarketten 2 kg muz, 2 kg elma alan bir müşteri 16 TL, 4 kg muz, 5 kg elma alan diğer müşteri ise 35 TL ödediğine göre muz ve elmanın birim satış fiyatlarını bulmak için denklem takımını oluşturalım:

Muzun birim fiyatı x ile elmanın fiyatı ise y ile gösterilirse;

$$2x + 2y = 16$$

$$4x + 5y = 35$$

Oluşan bu denklem sistemini Gauss Eliminasyonu Yöntemi ile çözmek istersek;

Denklem Sistemi

$$2x + 2y = 16$$

$$4x + 5y = 35$$

Matris Gösterimi

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 35 \end{bmatrix}$$

(1.satır 2 ye bölünür)

$$\begin{aligned} \frac{2}{2}x + \frac{2}{2}y &= \frac{16}{2} \\ 4x + 5y &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{2} \\ 35 \end{bmatrix}$$

(1.satır -4 ile çarpılır ve 2. satırla toplanarak, 2.satır olarak yazılır.)

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ (-4x + 4x) + (-4y + 5y) &= -4.8 + 35 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bulunan y değeri bir üst denklemde yerine konursa,

$x + y = 8$ ise $x = 5$ ve $y = 3$ olarak bulunur. Buna göre Muzun kg fiyatı 5 TL, Elmanın ki ise 3 TL olarak bulunur.

Aynı işlemleri Gauss Yöntemi ile yapmak istersek;

Bu şekilde matrislerle gösterilen denklem sistemi için Genişletilmiş matrisi oluşturalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 8 \\ 4 & 5 & : & 35 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x + y &= 8 \\ 4x + 5y &= 35 \end{aligned}$$

Birinci satır 2 ye bölünür ve birinci satırı -2 ile çarpıp ikinci satırla toplayıp ikinci satırla toplanıp ikinci satır olarak yazılacak olursa;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 8 \\ 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x + y &= 8 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Olarak bulunur. Bulunan y değeri 1. Denklemde yerine konursa; $x = 5$ elde edilir.

Örnek:

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

İlk durumdaki genişletilmiş matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Elementer satır işlemleri uygulanmaya başlanır;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \quad a_{11} \text{ elemanı 1'e eşit olduğu için; 1. Satır değiştirilmez}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & 11 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \quad [-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & 11 \\ 0 & 2 & 7 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \quad [-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & 11 \\ 0 & 0 & -7 & \vdots & -14 \end{bmatrix} \quad [-2R_2 + R_3 \rightarrow R_3]$$

İndirgenmiş Matris oluşturuldu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 7 & \vdots & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \quad \left[-\frac{1}{7}R_3 \rightarrow R_3 \right]$$

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_3 &= -2 & x_1 &= 4 \\ x_2 + 7x_3 &= 11 & x_2 &= -3 \\ x_3 &= 2 & x_3 &= 2\end{aligned}$$

Örnek:

Aşağıdaki denklem sistemini Gauss Yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{aligned}x - 3y &= 11 \\ 2x + y &= 1\end{aligned}$$

Çözüm:

Önce genişletilmiş matris yazılır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & : & 11 \\ 2 & 1 & : & 1 \end{array} \right] \quad \begin{aligned} x - 3y &= 11 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

Katsayılar matrisi birim matrise benzetilmeye çalışılır. Benzetme sırasında elementer satır (sütun) işlemlerinden faydalanılır.

$$-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & : & 11 \\ 0 & 7 & : & -21 \end{array} \right]$$

$$\frac{R_2}{7} \rightarrow R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & : & 11 \\ 0 & 1 & : & -3 \end{array} \right]$$

$y = -3$ olarak bulunur. 1.denklemde y yerine konarak x elde edilir.

$$\begin{aligned}x - 3y &= 11 \\ x - 3 \cdot (-3) &= 11 \\ x &= 11 - 9 = 2\end{aligned}$$

6.2. Gauss - Jordan Eliminasyonu Yöntemi

Gauss Jordan Eliminasyonu Yöntemi, Gauss Eliminasyon Yöntemi ile indirgenmiş birim oluşana kadar bütün işlemler benzerdir. İndirgenmiş matris elde edildikten sonra elementer satır işlemleri sürdürülerek katsayılar matrisi birim matris durumuna getirilir. Birim matris elde edildikten sonra denklem sistemindeki bütün bilinmeyenler bulunmuş olur.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & 7 & : & 11 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{array} \right] \quad [3R_3 + R_1 \rightarrow R_1]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & : & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{array} \right] \quad [-7R_3 + R_2 \rightarrow R_2]$$

Elementer satır işlemleri sonucu herhangi bir satırda aşağıdaki gibi bir durum oluşursa, tek çözüm olmaz. Sonsuz çözüm veya çözümsüzlük durumu ile karşılaşılır.

$$\begin{aligned}[0 & 0 & 0 & : & c] & c \neq 0 \text{ çıkar ise denklem sisteminin çözümü yoktur.} \\ [0 & 0 & 0 & : & c] & c = 0 \text{ çıkar ise denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.}\end{aligned}$$

Örnek:

Gauss-Jordan Eliminasyonu Yöntemi ile aşağıdaki doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$x - y + z = 1$$

$$2x + 3z = 5$$

$$x + y + z = 3$$

Çözüm:

$$x - y + z = 1$$

$$2x + 3z = 5$$

$$x + y + z = 3$$

Katsayılar matrisi; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Gauss-Jordan yönteminde amaç Genişletilmiş matriste katsayılar matrisini elementer satır işlemleri yardımı ile birim matrise benzetmek. Bu süreçte yapılacak elementer satır işlemlerinin aynısı sağ taraf sabitlerine de uygulanır.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordanda işlem sırası:

$$I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.\text{işlem} & 9.\text{işlem} & 8.\text{işlem} \\ 2.\text{işlem} & 4.\text{işlem} & 7.\text{işlem} \\ 3.\text{işlem} & 5.\text{işlem} & 6.\text{işlem} \end{pmatrix}$$

Matris formda genişletilmiş matris yazılırsa;

$$(A; b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 2 & 0 & 3 & : & 5 \\ 1 & 1 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

a_{11} elemanı 1 olduğu için ilk satır aynı kalır. İlk elemanın 1 olmaması durumunda satır yer değişimi veya ilk satırın bir sabitle çarpılarak 1 yapılması (elementer satır işlemleri yardımı ile) gerekirdi. Sonra aşağıdaki elementer satır işlemleri yapılır.

$$-2.R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

Bu işlemler sonucu genişletilmiş matris aşağıdaki gibi olur.

$$(A; b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Sonra aşağıdaki elementer satır işlemleri yapılır.

$$\begin{aligned} (1/2)R_2 &\rightarrow R_2 \\ -R_2 + R_3 &\rightarrow R_3 \end{aligned}$$

Bu işlemler sonucu genişletilmiş matris aşağıdaki gibi olur.

$$(A; b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Sonra aşağıdaki elementer satır işlemleri yapılır.

$$-1 \cdot R_3 \rightarrow R_3$$

Bu işlemler sonucu genişletilmiş matris aşağıdaki gibi olur.

$$(A; b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aslında şu anda z bilinmeyeni bulunmuş oldu. Ancak Jordan yönteminde tam birim matris elde edilir. Bu nedenle soldaki matrisi birim matris formuna getirene kadar elementer satır işlemlerine devam edilir. Aşağıdaki elementer satır işlemleri yapılır.

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot R_3 + R_2 &\rightarrow R_2 \\ -1 \cdot R_3 + R_1 &\rightarrow R_1 \end{aligned}$$

Bu işlemler sonucu genişletilmiş matris aşağıdaki gibi olur.

$$(A; b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Şu anda y bilinmeyeni bulunmuş oldu. Ancak işlemlere devam edilir.

$$R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

Bu işlemler sonucu genişletilmiş matris aşağıdaki gibi olur.

$$(A; b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A; b) = (I \quad \vdots \quad x)$$

Katsayılar matrisi birim matris durumuna getirilmiş oldu artık x bilinmeyeni de bulunmuş oldu.

Bu sonuca göre doğrusal denklem sisteminin çözümü;

$$x = 1, y = 1, z = 1$$

gibi olur. Bu değerlerden başka hiçbir değer kümesi bu doğrusal denklem takımının üç denklemini de sağlamaz.

Uygulamalar

1) Aşağıda verilen denklem sistemini Gauss Eliminasyon yöntemi kullanarak çözünüz.

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5\end{aligned}$$

Çözüm: İlk olarak denklem sistemine ilişkin katsayılar matrisi ve sağ taraf sabitlerinin bir araya getirilmesi ile genişletilmiş matris $(A; b)$ oluşturulur.

$$(A; b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

Daha sonra elementer satır işlemleri yardımı ile Genişletilmiş matris içerisindeki katsayılar matrisi üst üçgen matris haline getirilmeye çalışılır.

1.Adım: a_{11} elemanı birim matriste 1 olduğu için, elimizdeki genişletilmiş matriste de 1 olduğu için ilk satıra işlem yapılmaz. 1.satır -3 ile çarpılarak 2. satırla ve 1.satır -2 ile çarpılarak 3. satırla toplanır.

$$(A; b)_{1.Adım} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & -6 \\ 0 & 8 & -7 & 1 \end{array} \right]$$

2.Adım: a_{22} elemanı 1 olmalıdır. Bu sebeple bu satır $(1/5)$ ile çarpılır.

$$(A; b)_{2.Adım} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11/5 & -6/5 \\ 0 & 8 & -7 & 1 \end{array} \right]$$

3.Adım: a_{22} elemanı altında bulunan değer sıfır olmalıdır. Bu sebeple 2. satır -8 ile çarpılır 3. satırla toplanır.

$$(A; b)_{3.Adım} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 53/5 & 53/5 \end{array} \right]$$

4.Adım: Bu durumda katsayılar matrisi üst üçgen durumuna gelmiştir. a_{33} elemanını 1 yapabilmek için 3. satır $(5/53)$ ile çarpılır.

$$(A; b)_{4.Adım} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Gauss eliminasyonu yöntemi bu işlemle bilinmeyenlerden birini x_3 bulmuştur.

Bu genişletilmiş matris için denklemler yeniden yazılırsa;

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_2 - \left(\frac{11}{5}\right) \cdot x_3 = -\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$x_3 = 1$$

$x_3 = 1$ değeri bir üst denklemde yerine konursa;

$$x_2 - \left(\frac{11}{5}\right) \cdot 1 = -\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$x_2 = \left(\frac{11}{5}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{5}{5}\right) = 1$$

$x_2 = 1$ Bulunur, x_2 ve x_3 değerleri ilk denklemde yerine konursa;

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2$$

$$x_1 = 1$$

Şu halde bilinmeyenler bulunmuş durumdadır. Çözüm değerleri aşağıdadır.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

Uygulama Soruları

2) Aşağıda verilen denklem sistemini Gauss-Jordan Eliminasyon yöntemi kullanarak çözünüz.

$$\begin{aligned}2x - y &= -4 \\ x + 3y + 2z &= 7 \\ 2y - z &= 3\end{aligned}$$

$$(x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1)$$

Çözüm: İlk olarak denklem sistemine ilişkin katsayılar matrisi ve sağ taraf sabitlerinin bir araya getirilmesi ile genişletilmiş matris oluşturulur.

$$(A; b) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & : & -4 \\ 1 & 3 & 2 & : & 7 \\ 0 & 2 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

Daha sonra elementer satır işlemleri yardımı ile genişletilmiş matris içerisindeki katsayılar matrisi birim matris haline getirilmeye çalışılır.

1.Adım: a_{11} elemanı birim matriste 1 olduğu için, genişletilmiş matriste bulunan 1. satır ile 2. satır yer değiştirilir.

$$(A; b)_{1.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & : & 7 \\ 2 & -1 & 0 & : & -4 \\ 0 & 2 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

2.Adım: a_{11} elemanı altında bulunan değerleri sıfır yapabilmek için, 1.satır -2 ile çarpılarak 2. satırla toplanır.

$$(A; b)_{2.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & : & 7 \\ 0 & -7 & -4 & : & -18 \\ 0 & 2 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

3.Adım: a_{22} elemanı 1 olmalıdır. Bu sebeple bu satır $(-1/7)$ ile çarpılır.

$$(A; b)_{3.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 4/7 & : & 18/7 \\ 0 & 2 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

4.Adım: a_{22} elemanı altında bulunan değer sıfır olmalıdır. Bu sebeple 2. satır -2 ile çarpılır 3. satırla toplanır.

$$(A; b)_{4.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 4/7 & : & 18/7 \\ 0 & 0 & -15/7 & : & -15/7 \end{bmatrix}$$

5.Adım: Bu durumda katsayılar matrisi üst üçgen durumuna gelmiştir. a_{33} elemanını 1 yapabilmek için 3. satır $(-7/15)$ ile çarpılır.

$$(A; b)_{5.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 4/7 & : & 18/7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

6.Adım: Bundan sonraki adım esas köşegen üstündeki elemanları da sıfırlamaktır. Bu nedenle 3. satır $(-4/7)$ ile çarpılır, 2. satırla toplanır. Aynı şekilde 3. satır -2 ile çarpılır 1. satır ile toplanır.

$$(A; b)_{6.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 5 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

7.Adım: a_{22} elemanını sıfırlamak için, 2. satır -3 ile çarpılır 1. satırla toplanır.

$$(A; b)_{7.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$$

Elde edilen çözüm değerleri:

$$(x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1)$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde modeli oluşturulan bir denklem sisteminin Gauss Eliminasyonu Yöntemi ile çözümünü bulunması işlenmiştir. İkinci kışında ise Gauss – Jordan Eliminasyonu Yöntemi tanıtılmış, Gauss Eliminasyonu Yönteminden farklılığı ortaya konmuş, Gauss – Jordan Eliminasyonu Yöntemi kullanarak örnek bir denklem sisteminin çözümü elde edilmiştir.

Bölüm Soruları

1) 2 kg elma ile 3 kg portakala 16 TL, 1 kg elma ile 3 kg portakala 11 TL ödenmiş ise, elma ve portakalın birim fiyatlarını bulmak için oluşturulacak denklem takımı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x + 3y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x = 16 \\ 3y = 11 \end{cases}$

2) $(A; b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right]$

Yukarıda verilen genişletilmiş matriste a_{21} elemanını sıfırlamak için hangi elementer satır işlemi yapılmalıdır?

- a) İkinci satırdan 2 sayısı çıkartılır.
- b) Birinci satır (-2) ile çarpılır, ikinci satırla toplanır.
- c) İkinci satır 0 ile çarpılır.
- d) Üçüncü satırla ikinci satır çarpılır.
- e) Birinci satır 2 ile çarpılır, ikinci satırla toplanır.

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 14 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Yukarıda verilen katsayılar matrisini birim matrise benzetebilmek için ($a_{11} = 1$ yapabilmek için) hangi işlem yapılmalıdır?

- a) Birinci satır $(-1/4)$ ile çarpılır.
- b) Birinci satır 2 ile çarpılır.
- c) Birinci satır 4 ile çarpılır
- d) Birinci satır $(1/4)$ ile çarpılır
- e) Birinci satır $-1/2$ ile çarpılır ve ardından ikinci satırla toplanır.

$$x - 2y + 3z = 0$$

4) $3x - y - 2z = -1$

$$x + 4y - 8z = 1$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümü için Gauss Eliminasyonu uygulanırsa, y 'nin alacağı değer kaç olur?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) -2

e) -1

5) $(A; b)_{4.\text{Adım}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 4/7 & \vdots & 18/7 \\ 0 & 0 & -5/4 & \vdots & -5/4 \end{bmatrix}$ Matrisinde a_{33} elemanını 1 yapabilmek için

3.satır hangi sayı ile çarpılmalıdır?

a) $-5/4$

b) $4/5$

c) $5/4$

d) $-4/5$

e) 1

6) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ Denklem sistemine Gauss-Jordan Eliminasyonu Yöntemi uygulanırsa, en son adımda (çözümün bittiği adım) genişletilmiş matris aşağıdakilerden hangisi olur?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & \vdots & 14 \\ 3 & -1 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 3 & -1 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

7) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$

Yukarıda verilen denklem sistemine Gauss-Jordan Eliminasyonu Yöntemi uygulanması sonucu elde edilen çözüm aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(0, 5)$

b) $(2, -1)$

c) $(2, 1)$

d) $(-2, 1)$

e) $(1, 3)$

8) Aşağıdakilerden hangisi denklem sistemi çözüm yöntemlerinden değildir?

a) Gauss Eliminasyonu Yöntemi

b) Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

c) Ters Matris Yardımı ile Denklem Sistemi Çözümü

d) Cramer Yöntemi

e) Matris Çarpımı Yöntemi

9) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ 6x + 4y - z = 5 \end{cases}$

Yukarıda verilen denklem sisteminin Gauss-Jordan Eliminasyonu Yöntemi ile çözülmesi istendiğinde ilk adım ne olur?

- a) Birinci satır $(-1/5)$ ile çarpılır.
- b) Birinci satır 5 ile çarpılır
- c) Birinci satır $(3/5)$ ile çarpılır.
- d) Birinci satır $(1/5)$ ile çarpılır
- e) Birinci satır $(-3/5)$ ile çarpılır ve ardından ikinci satırla toplanır.

$$x + y - z = 2$$

10) $x - y + z = 0$

$$x + y + z = 5$$

Yukarıda verilen denklem sistemi Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi ile çözüldüğünde, çözüm aşamaları tamamlandığında genişletilmiş matrisin 3. satırı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $[1 \ 0 \ 0 \ : \ 1]$
- b) $[0 \ 1 \ 0 \ : \ 2]$
- c) $[0 \ 0 \ 1 \ : \ 3/2]$
- d) $[0 \ 0 \ 1 \ : \ 3]$
- e) $[1 \ 2 \ 3 \ : \ 6]$

Cevaplar:

1) b, 2) b, 3) d, 4) b, 5) d, 6) e, 7) c, 8) e, 9) d, 10) c

7. TERS MATRİS VE CRAMER YÖNTEMLERİ İLE DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 7.1. Ters Matris Yöntemi ile Denklem Çözümü
- 7.2. Cramer Yöntemi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Ters matris yöntemi aşamaları nelerdir?
- 2)** Cramer yönteminin adımları nelerdir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Ters Matris Yardımı ile Denklem Sistemi Çözümü	Verilen bir denklem sistemini Ters Matris Yardımı ile çözebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Cramer Yöntemi ile Denklem Sistemi Çözümü	Verilen bir denklem sistemini Cramer Yöntemi kullanarak çözebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Ters Matris Yöntemi Cramer Yöntemi

Giriş

Doğrusal Denklem Sistemlerinin çözümünde çok sayıda yöntem bulunmaktadır. Bunlardan Gauss Eliminasyonu (Yok etme) ve Gauss-Jordan Eliminasyonu Yöntemleri önceki bölümde anlatılmıştır. Bu bölümde ise ters matrisin bulunması yardımı ile denklem sistemlerinin çözümü ve Cramer yöntemi ile denklem sisteminin çözümü anlatılmaktadır.

7.1. Ters Matris Yöntemi ile Denklem Çözümü

Ters matris yardımı ile çözüm en sık kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir. Nedeni ise zaten denklem sistemlerinin çözümü olup olmadığının araştırılmasında katsayılar matrisinin bulunması gereğinden, determinant değeri elde edilmiş olur. Bu adımdan sonra ek matrisin de bulunarak matrisin tersi alınması kolaylaşmış olmaktadır.

Bir denklem sisteminde katsayılar matrisi A ise;

Denklem sistemi

$$A \cdot x = b$$

biçiminde verilmektedir.

Bu ifadenin her iki tarafı A matrisinin tersi ile çarpılırsa;

$$[A] \cdot [x] = [b]$$

$$[A]^{-1} \cdot [A] \cdot [x] = [A]^{-1} \cdot [b]$$

$$[A]^{-1} \cdot [A] = [I] \quad \text{olduğundan,}$$

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [b]$$

olur. Bu durumda sol tarafta A matrisinin tersi ile çarpılması sonucu birim matris elde edilir. Dolayısıyla x bilinmeyenler matrisi; A matrisinin tersi ile sağ taraf sabitleri b ile çarpılması sonucu elde edildiği görülür.

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [b]$$

Bu formülden de anlaşılacağı üzere, bir denklem sisteminin katsayılar matrisinin tersi (A^{-1}) mevcut ise çözüm elde edilir. Katsayılar matrisinin tersi determinantın sıfır çıkması durumunda bulunur. Örnek olarak;

$$2x + 3y = 13$$

$$3x + 2y = 12$$

olarak verilen bir denklem sistemi için katsayılar matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olur. Bu katsayılar matrisinin tersi ise;

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Ek } A) = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/-5 & -3/-5 \\ -3/-5 & 2/-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

Bulunan bu matris sağ taraf sabitleri olan $b = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpılırsa;

$$x = A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{-26 + 36}{5} \\ \frac{39 - 24}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/5 \\ 15/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bilinmeyenler yani x matrisi bulunmuş olur. $x = 2$ ve $y = 3$ çözümüne ulaşılır.

$$\begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 3 \end{pmatrix}$$

7.1.1. Ters Matris Yöntemi İle Denklem Sistemi Çözümünün Adımları

Ters matris yöntemi kullanılarak denklem sistemlerinin çözümü aşağıdaki adımlar uygulanarak yapılır.

1. Adım: Denklem sistemine ilişkin katsayılar matrisi, bilinmeyenler matrisi ve sağ taraf sabitleri matrisi yazılır.

2. Adım: Katsayılar matrisinin determinantını alınır $|A|$ bulunur

3. Adım: Minör matrisi oluşturulur (M_{ij})

4. Adım: Kofaktör matrisi oluşturulur (C_{ij})

5. Adım: Ek matris bulunur Ek (A)

6. Adım: Ters matris bulunur $(A)^{-1}$

7. Adım: $x = A^{-1} \cdot b$ sonucu bilinmeyen x 'leri bulunur.

Örnek:

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_3 &= -7 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9
\end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü, ters matris yöntemi kullanarak bulunuz.

Çözüm:

Denklem Sistemini matrislerle ifade etmek istersek;

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot [x] = [b]$$

Denklem sistemine ilişkin, katsayılar matrisi, Bilinmeyenler matrisi ve Sağ taraf sabitleri;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir.

x bilinmeyenler matrisini bulabilmek için A matrisinin tersini alıp sağ taraf sabitleri b ile çarpılması gerekir.

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [b]$$

Katsayılar matrisinin tersini bulabilmek için ilk adım; katsayılar matrisinin determinantını bulmaktır.

$$|A| = -2$$

Minör matrisi oluşturulur.

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Kofaktör matrisi oluşturulmalıdır.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 4 \\ -6 & 8 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ek A matrisi bulunmalıdır.

$$\text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -7 & 8 & -5 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

A matrisinin tersi artık yazılabilir.

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 7 & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Çarpım sonucu, çözüm değerleri;

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [b]$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 7 & -4 & \frac{5}{2} \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ olarak bulunur.

$(x = 1, y = 2, z = 3)$

7.2. Cramer Yöntemi

Cramer Yöntemi ise, denklem sistemlerinin çözümünde öğrencilerin determinantı bilmeleri durumunda en çok tercih ettikleri yöntemlerden biridir. Cramer Yöntemi, kolay bir matematiğe sahiptir.

İki bilinmeyenli bir doğrusal denklem sistemi üzerinde açıklamasını yaparak Cramer yöntemi ile denklem çözülecektir. Çözeceğimiz sistem şöyle olsun.

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Bu iki denklemden eskiden beri bildiğimiz yok etme yöntemiyle, örneğin x_1 'i yok edelim ve x_2 'yi hesaplayalım. Bu amaçla ilk denklemi $-a_{21}$ ve ikinci denklemi a_{11} ile çarpıp iki denklemin toplamını alacağız.

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})x_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$$

Bu ifadeyi bir determinant açılımının sonucu olarak yorumlarsak, hemen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

sonucuna ulaşırız. Görüldüğü gibi x_2 'nin katsayısı doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantıdır. Sağ taraftaki determinant ise 'katsayılar determinantında x_2 'nin katsayılarının bulunduğu sütuna b_i değerleri yerleştirilerek' elde edilmiştir. Benzer işlemleri x_1 için yapsak bu defa,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{12} \end{vmatrix}$$

benzer sonucunu elde ederiz. Bu ifadelerin sol tarafları aynıdır ve denklemin katsayılar determinantıdır. Bu determinantın değerini $|A|$ ile ve sağ taraftaki determinantların değerlerini de, sırasıyla, Δ_2 ($|A_2|$) ve Δ_1 ($|A_1|$) ile gösterirsek bu basit sistemimizin çözümünü:

$|A| \neq 0$ olduğu durumda;

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

biçimine getirebiliriz. Böylece denklem sistemindeki bilinmeyenleri (x_1, x_2) Cramer Yöntemi kullanarak bulmuş oluruz.

Örnek:

$2x + 3y = 13$
 $3x + 2y = 12$ denkleminin çözümünü Cramer Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

Yukarıda tanımladığımız determinantları kurup hesaplarsak:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 13 \cdot 2 - 12 \cdot 3 = 26 - 36 = -10$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 2.12 - 3.13 = 24 - 39 = -15$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{-3} = 3$$

$$(x, y) = (2, 3)$$

bulunur.

Bu sayı çiftinden başka hiçbir nokta bu denklem sistemini sağlamaz.

Örnek:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

denklem takımındaki bilinmeyenleri Cramer Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

Yukarıda tanımladığımız determinantları kurup hesaplarsak:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 1.1 = -3$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 7.(-1) - (-1).1 = -6$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 1.7 = -9$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$(x, y) = (2, 3)$ bulunur. Bu sayı çiftinden başka hiçbir nokta bu denklem sistemini sağlamaz.

Örnek:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -1 \\ 5x + y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümünü Cramer Yöntemi yardımı ile bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Delta = |A| = 40$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 60$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -20$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

noktası bu denklem sistemindeki bütün eşitlikleri sağlayan tek noktadır.

Örnek:

$$\begin{aligned} 2x + 1y + 1z &= 3 \\ 1x - 1y - 1z &= 0 \\ 1x + 2y + 1z &= 0 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümünü Cramer Yöntemi yardımı ile bulunuz.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \text{Det } A = D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

x 'i bulabilmek için;

$$D_x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

y 'yi bulabilmek için;

$$D_y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -6$$

z 'yi bulabilmek için;

$$D_z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 9$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{9}{3} = 3$$

Uygulama Soruları

1) Aşağıdaki denklem sistemini ters matris yöntemi ile çözünüz.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$$

Çözüm:

Önce verilen denklem sistemi matrisle ifade edilir ve ardından katsayılar matrisi yazılır;

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisinin determinanı alınır.

$|A| = 53 \neq 0$, dolayısıyla katsayılar matrisinin tersi alınabilir.

Daha sonra minör, kofaktör ve ek matris adımları uygulanarak Ek matris ve ardından A^{-1} bulunur.

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{53} & \frac{10}{53} & \frac{7}{53} \\ \frac{1}{53} & \frac{7}{53} & \frac{11}{53} \\ \frac{14}{53} & \frac{8}{53} & \frac{5}{53} \end{bmatrix}$$

Son adımda da bulunan ters matris sağ taraf sabitleri ile çarpılır ve bilinmeyenler elde edilir. Çözüm vektörü oluşturulur.

$$A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{9}{53} & \frac{10}{53} & \frac{7}{53} \\ \frac{1}{53} & \frac{7}{53} & \frac{11}{53} \\ \frac{14}{53} & \frac{8}{53} & \frac{5}{53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Aşağıdaki denklem sisteminin çözümünü Cramer yöntemi ile bulunuz.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$$

Çözüm:

Cramer Yönteminde, verilen denklem sistemi 3 boyutlu olduğundan, katsayılar matrisinin ve x_1, x_2, x_3 bilinmeyenlerini hesaplayabilmek için 3 farklı determinant hesaplanması gerekir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$|A| = \Delta = 53$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 53$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 53$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{53}{53} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{53}{53} = 1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{53}{53} = 1$$

(1, 1, 1) noktası bu denklem sistemindeki bütün eşitlikleri sağlayan tek noktadır.

3) Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini ters matris yöntemi ile çözünüz.

$$2a - 5b = -1$$

$$3a - 2b = 15$$

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Önce katsayılar matrisinin determinantı alınır.

$$|A| = 11 \neq 0 \text{ çıktığı için matrisin tersi alınabilir.}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Son adımda da sağ taraf sabitleri ile çarpım yapılır.

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

4) Aşağıdaki doğrusal denklem sisteminin çözümü olup olmadığını inceleyiniz.

$$2a - 5b = -1$$

$$4a - 10b = -2$$

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

Önce katsayılar matrisinin determinantı alınır.

$|A| = 2 \cdot (-10) - 4 \cdot (-5) = 0$ çıktığı için matrisin tersi alınamaz. Ranklar incelenmelidir.

$r(A) = 1; r(A; b) = 1$ olduğu için çözüm vardır. ($n = 2$)

$r(A) = r(A; b) < n$

$r(A) = r(A; b) < 2$, sonsuz çözüm vardır.

5) Aşağıdaki doğrusal denklem sisteminin çözümü olup olmadığını inceleyiniz.

$$a - b = 1$$

$$a - b = 0$$

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Önce katsayılar matrisinin determinantı alınır.

$|A| = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 0$ çıktığı için $r(A) = 1$ olur.

Genişletilmiş matrisin rankı incelenir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & : & 1 \\ 1 & -1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Genişletilmiş matris içerisinde determinantı sıfır olmayacağı görülen bir alt matris oluşturulur. (2. ve 3 sütun elemanlarından oluşturuldu)

$A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0$ olduğundan genişletilmiş matrisin rankı 2 çıkar.

$r(A) \neq r(A; b)$ olduğundan dolayı denklem sisteminin çözümü yoktur.

Verilen denklem sistemi incelenirse, eğer $a - b = 1$ ise, $a - b = 0$ olamaz, yine benzer şekilde $a - b = 0$ ise $a - b = 1$ olamaz. Çözümün olmadığı basit denklem sistemlerinde doğrudan anlaşılabilir. Ancak çok sayıda bilinmeyen olan doğrusal denklem sistemlerinin çözümünün olup olmadığı katsayılar ve genişletilmiş matrislerin ranklarına (doğrusal bağımsız satır (vektör) sayısı) bakılarak karar verilir.

6) Aşağıda verilen denklem sisteminin çözümünü Cramer Yöntemi ile bulunuz.

$$\begin{aligned} 2x - 3(y + 1) &= -3 \\ 2y &= 3x - 5 \end{aligned}$$

Çözüm:

$$Ax + By = C$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ -3x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

Önce D , D_x ve D_y bulunur.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 0 = -10$$

Cramer kuralı kullanılarak;

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{-5} = 3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$$

elde edilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde modeli oluşturulan bir denklem sisteminin ters matris yöntemi ile çözümünü bulunması işlenmiştir. İkinci kışında ise Cramer yöntemi tanıtılmış, Cramer yöntemi kullanarak örnek bir denklem sisteminin çözümü elde edilmiştir.

Bölüm Soruları

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\ \mathbf{1)} \quad x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1\end{aligned}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin Cramer Yöntemi ile çözülmesi istenirse; y 'in bulunabilmesi için Δ ve Δ_2 determinantları kaç olur?

- a) $\Delta = 4$ ve $\Delta_2 = 2$
- b) $\Delta = 4$ ve $\Delta_2 = 4$
- c) $\Delta = 2$ ve $\Delta_2 = 4$
- d) $\Delta = 1$ ve $\Delta_2 = 1$
- e) $\Delta = 0$ ve $\Delta_2 = 0$

$$\mathbf{2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $(x, y) = ?$

- a) $(-3, -2)$
- b) $(-3, 2)$
- c) -3
- d) 2
- e) $(2, -3)$

3) Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- a) Determinantı sıfırdan farklı olan kare matrislerin tersi vardır.
- b) Determinant sadece kare matrisler için geçerlidir.
- c) Bir matrisle tersinin çarpımı birim matris olur.
- d) Birim matrisle bir matrisin çarpımı o matrisi değiştirmez.
- e) Her matrisin mutlak bir de tersi vardır.

$$\mathbf{4)} \begin{aligned}2x + 4y &= 2 \\ 2x + 4y &= 0\end{aligned}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $(2, 0)$
- b) $(0, 2)$
- c) Çözüm yok
- d) $(2, 2)$
- e) $(1, 1)$

5) Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- a) $A \cdot A^{-1} = I$
- b) $A^{-1} \cdot A = I$
- c) $I \cdot A = A$
- d) $I \cdot x = x$
- e) $A^{-1} \cdot A = A$

6) Ters matris yöntemi ile denklem sistemi çözülürken aşağıdaki işlemlerden hangisine gerek duyulmaz?

- a) Önce katsayılar matrisinin determinantı bulunur.
- b) Katsayılar matrisine ilişkin ek matris bulunur.
- c) $(1/\text{Det } A)$ ile ek matris çarpılır ve katsayılar matrisinin tersi bulunur.
- d) Katsayılar matrisi ile sağ taraf sabitleri çarpılır.
- e) Bulunan ters matris ile sağ taraf sabitleri çarpılır.

7) $x + 2y = 5$ ve $2x + 3y = 8$
doğrularının kesişim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $(0, 1)$
- b) $(-1, 1)$
- c) $(1, 1)$
- d) $(1, 1/2)$
- e) $(1, 2)$

8)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümünü bulabilmek için Cramer Yöntemi kullanılacak olursa Δ_2 değerinin değeri aşağıdaki işlemlerin hangisi ile bulunur?

- a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$
- b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$
- c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$
- d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$
- e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

9)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözümünü bulabilmek için Cramer Yöntemi kullanılacak olursa Δ_1 değerinin değeri kaç olur?

- a) -1
- b) 1
- c) 2
- d) -2
- e) 3

10) Arz ve talep fonksiyonları sırasıyla $q = -8 + 4p$ ve $q = 20 - 3p$ denklemleri ile verilen bir malın pazar denge noktası (q, p) çifti aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $q = 2, p = 4$
- b) $q = 8, p = 2$
- c) $q = 4, p = 8$
- d) $q = 4, p = 4$
- e) $q = 8, p = 4$

Cevaplar:

1) a, 2) b, 3) e, 4) c, 5) e, 6) d, 7) e, 8) b, 9) a, 10) e

8. GİRDİ ÇIKTI (INPUT-OUTPUT) ANALİZİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

8.1. Girdi – Çıktı Analizi

8.2. Girdi-Çıktı Analizinin Varsayımları

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Girdi – Çıktı Analizi nedir?
- 2)** Girdi – Çıktı Analizi Ne Zaman kullanılır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Girdi Çıktı Analizi Aşamaları	Girdi Çıktı Analizini modellemek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Girdi Çıktı Analizi Varsayımları	Varsayımları bilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek

Anahtar Kavramlar

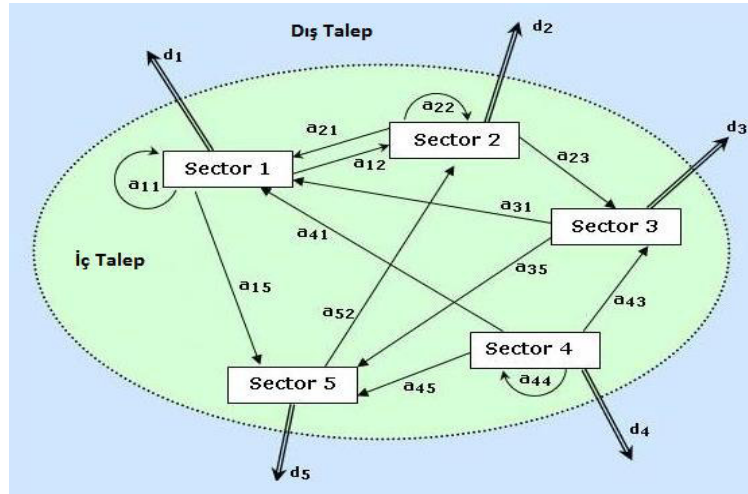
Girdi - Çıktı Analizi

Giriş

Doğrusal denklem sistemleri sosyal bilimlerle ilgili birçok problemin matematiksel modellenmesinde kullanılabilmektedir. En önemli ekonomi problemlerinden bir tanesi girdi çıktı analizidir. Girdi çıktı analizi doğrusal denklem sistemlerinin önemli bir uygulamasıdır. Girdi-çıkı analizi, ekonominin sektörleri ya da endüstrileri arasındaki üretim ilişkilerini inceleyen ve bu ilişkileri iç tutarlılığı olan bir çerçevede sunan deneysel bir analiz yöntemidir. Girdi-Çıkı Analizi, bir ekonomideki endüstrilerin dış taleplerle birlikte birbirlerinin iç taleplerini de karşılayacak kadar üretim yapmalarını sağlayacak denge koşullarını belirlemek için yapılır.

8.1. Girdi – Çıktı Analizi

Endüstri kuruluşları üretimlerini gerçekleştirebilmek için kendi endüstrisinden ve diğer endüstrilerden birtakım girdilere gereksinim duyarlar. Bu girdiler hammadde, mamuller, yarı mamul, malzeme, araç, gereç ve donanım cinsinden olabilir. Bir endüstri kendisinden ve diğer endüstrilerden sağladığı bu girdileri çıktı olarak üretilip, kendisi de dahil olmak üzere başka endüstrilerin girdisi olarak satarlar. Örneğin enerji sektörü, enerji üretebilmek için makine metal sanayiinden bir miktar girdi kullanmaktadır. Daha fazla enerji üretebilmek için makine metal sanayiinden sağlayacağı girdi miktarı belirli bir dönemde artacaktır.



Tekstil sektörünü düşünürsek, kendi içerisinde ve diğer birçok sektörden mamul, yarı mamul malzeme ve teçhizatı girdi olarak satın alıp çıktılar üretir. Tekstil sektöründeki genişleme veya daralma, girdisi olan diğer bütün sektörleri sağladığı girdi oranlarında etkileyecektir. Tekstil sektöründe ortaya çıkan bir kriz, örneğin iplik, aksesuar ve giyim vs. sektörlerini sağladıkları girdi oranında etkileyecektir.

Bu açıdan ekonominin değişik sektörleri ya da endüstrileri arasındaki karşılıklı bağımlılık ilişkilerinin incelenmesi ve bunların tutarlı bir çerçeve içinde sunulması zorunlu hale gelmektedir. Sektörler arası ilişkilerin deneysel olarak incelenmesi ilk kez Wassily W. Leontief'in Girdi-Çıktı Analizi (Input - Output Analysis-1936) adlı eseriyle başlamıştır.

Wassily W. Leontief tarafından ortaya konulan girdi-çıktı modeli, nihai talebin karşılanabilmesi için bir ekonomide yer alan n tane sektörün her birinin ne kadar üretim yapması gerektiğini belirlemek için kullanılmaktadır. Sektörlerin bazıları, kendi aralarında girdi alışverişi yaparlar. Örneğin tekstil sektörü mobilya, otomobil, giyim, hazır giyim vs. gibi çok sayıda sektöre (endüstriye) girdi sağlar. Aşağıda matris işlemlerini kullanarak bu girdi çıktı modeli anlatılmaktadır.

Bir sektörün çıktısı, diğer sektörler için ara girdi olarak verilen veya son kullanıcıya sunulan üretimlerin toplamı, girdisi ise diğer sektörlerden aldığı ara ürünler, işgücü, sermaye ve

doğal kaynaklar gibi temel faktörlerin toplamı olarak algılanmaktadır. Leontief girdi-çıkıtı modeli ekonomideki tüm üretim ve talep ilişkilerini sayısal olarak, makroekonomik düzeyde yansıtmaktadır.

Girdi-çıkıtı analizi, bir ekonomideki endüstrilerin son (dış) taleplerle birlikte birbirlerinin (iç) taleplerini de karşılayacak kadar üretim yapmalarını sağlayacak denge koşullarını belirlemek için yapılır.

8.2. Girdi-Çıkıtı Analizinin Varsayımları

1. Her bir sektör yalnızca bir tür mal üretmektedir.
2. Her bir sektörün çıktısını elde edebilmek için, girdiler sabit bir oranda kullanılmaktadır.
3. Her bir sektör ölçeğe göre sabit getiriyle çalışmaktadır.

8.2.1. Girdi Katsayıları Matrisi

Girdi katsayıları matrisi, belirli bir ürünün bir birimlik üretimi için, diğer sektörlerden ne kadar girdi alması gerektiğini tanımlar.

a_{ij} ; j . sektörde bir birim çıktı üretebilmek için gerekli olan i . girdi miktarını göstermektedir.

Girdi-çıkıtı matrisinin her sütunu, belirli bir sektörün bir birim üretim için ne kadar girdilere gereksinimi olduğunu gösterir.

Örneğin a_{23} ; üçüncü sektörün bir birim üretim yapabilmek için ikinci sektörden ne kadar girdi alacağını gösterir.

Şimdi her bir sektör için toplam arz ve toplam talebi eşitleyerek denklem sistemimizi oluşturalım.

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1 \\x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2 \\&\vdots \\x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + d_n\end{aligned}$$

olur. Burada n tane sektör birbirlerinin çıktılarını girdi olarak kullanmaktadırlar. Ayrıca bir sektör kendi çıktısını da yine girdi olarak kullanabilmektedir. d_i ' ler ise sektör dışı nihai talebi (bağımsız talep) gösterir.

Diğer bir ifade ile; yukarıda tanımlanan A katsayılar matrisine **teknoloji matrisi**, x matrisine çıktı matrisi ve d matrisine de **dış talep (bağımsız talep) matrisi** denir. ($I -$

$A)x = d$ matris denkleminde girdi-çıktı matris denkleminin ya da kısaca girdi-çıktı denkleminin denir.

Bu denklem sisteminden aşağıdaki matrisleri yazabiliriz.

$$\text{Çıktı Matrisi; } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\text{Teknoloji Matrisi; } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\text{Dış Talep Matrisi; } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Bu teknoloji matrisindeki j 'inci sütun, j 'inci sektörün çıktısından diğer sektörlerin ne kadar kullandıklarını gösterir. Bu nedenle herhangi bir sütundaki katsayıların toplamı 1' den büyük olamaz.

Yukarıdaki denklem sistemini matris biçiminde yeniden yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem sistemi dikkatle incelenirse; yeni durumda;

$$x = Ax + d$$

biçimine gelir. Sol taraf birim matrisle çarpılırsa herhangi bir değişim olmaz ve denklem matris gösterimi ile aşağıdaki hali alır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Bu matris gösteriminde yine denklem gösterimine dönülürse;

$$I.x = A.x + d$$

$$(I - A)x = d$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafını $(I - A)$ matrisinin tersi ile çarpıldığında;

$$(I - A)^{-1}(I - A).x = (I - A)^{-1}.d$$

$$(I - A)^{-1}(I - A) = I$$

$$I.x = (I - A)^{-1}.d$$

$$x = (I - A)^{-1}.d$$

elde edilir. Bu sayede çıktı matrisi sektörlerlere olan toplam talep (toplam girdi veya toplam çıktı miktarı) x bulunur.

Bu denklemin anlamı şudur. Büyük ekonomilerde A matrisi belirli bir dönemde örneğin 5 yıllık planlama dönemlerinde sabit kalır. Dolayısıyla bir anlamda $(I - A)^{-1}$ matrisi sabittir. Öyleyse dış talepte (bağımsız talepte) gerçekleşen bir değişim, toplam girdi veya çıktı miktarlarını değiştirecektir.

$$\Delta d = d_{\text{yeni}} - d_{\text{mevcut}}$$

$$\Delta x = (I - A)^{-1}.\Delta d$$

$$\Delta x = d + \Delta d$$

$$x + \Delta x = (I - A)^{-1}.(d + \Delta d)$$

Örneğin, iki sektörlü bir ekonomi sisteminde üretim tutarları aşağıdaki gibi olsun;

Üretici	A	B	Bağımsız Talep	Toplam Üretim
A	160	180	60	400
B	200	90	70	360

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad ; \quad a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} \quad ; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} \quad ; \quad a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} \quad ; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2}$$

$$a_{11} = \frac{160}{400} = \frac{2}{5} \quad ; \quad a_{12} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_{22} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$$

Girdi katsayılar matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/2 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/2 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 15/4 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Determinant } (I - A) = |(I - A)^{-1}| = \frac{1}{5}$$

Bağımsız talep, 60 ve 70 olduğuna göre; sektörlere olan toplam talep;

$$x_{\text{mevcut}} = (I - A)^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} 15/4 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 360 \end{bmatrix}$$

Bağımsız talep yeni durumda 70 ve 50 olmuş ise; bu durumda sektörlere olan toplam talep;

$$x_{\text{yeni}} = (I - A)^{-1} \cdot d_2 = \begin{bmatrix} 15/4 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 387,5 \\ 325 \end{bmatrix}$$

Sektörlere olan toplam talep azalmıştır. Bu bir anlamda sektörlerin daraldığını gösterir.

$$\Delta x = x_{\text{yeni}} - x_{\text{mevcut}} = \begin{bmatrix} 387,5 \\ 325 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 400 \\ 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,5 \\ -35 \end{bmatrix}$$

Benzer sonuç aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\Delta x = (I - A)^{-1} \cdot \Delta d$$

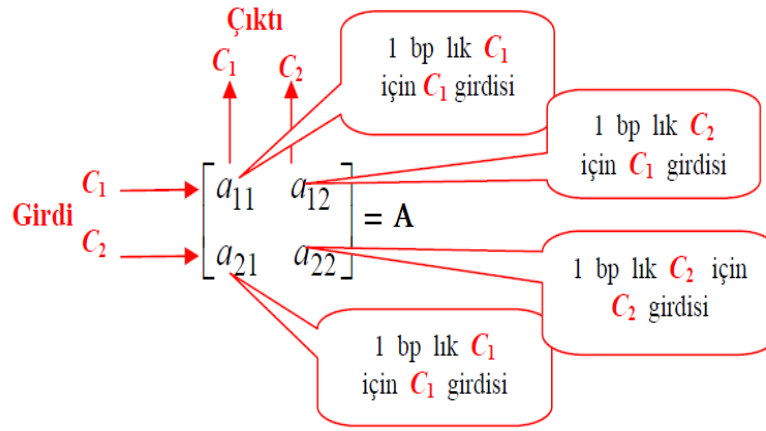
$$\Delta d = d_{\text{yeni}} - d_{\text{mevcut}} = \begin{bmatrix} 70 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = (I - A)^{-1} \cdot \Delta d = \begin{bmatrix} 15/4 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,5 \\ -35 \end{bmatrix}$$

$$x_{\text{yeni}} = x_{\text{mevcut}} + \Delta x = \begin{bmatrix} 400 \\ 360 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12.5 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 387.5 \\ 325 \end{bmatrix}$$

Burada dikkat edilmesi gereken husus, sektörler arası birim farklılıklarını ortadan kaldırmak ve benzer hale getirmek için, girdi ve çıktı miktarları parasal cinsten ifade edilir. Örneğin kimi sektör boru üretir, metre ile satar, kimi sektör boru üretir, kg bazında satar. Dolayısıyla bu üretimleri veya bu üretimleri üretebilmek için sağladıkları girdileri parasal cinsten göstermek girdi çıktı analizinde önem arz etmektedir.

C_1 ve C_2 gibi iki endüstri kolundan oluşan bir ekonomi modeli için girdi-çıkıtı matrisinin neleri ifade ettiği aşağıdaki şekilde açık olarak görülmektedir.



Örnek:

A , B ve C gibi üç sektöre sahip bir sistemde, üretim tutarları aşağıdaki tabloda verilmektedir.

	Tüketici			Bağımsız Talep	Toplam Üretim
Üretici	A	B	C		
A	90	150	225	75	540
B	135	150	300	15	600
C	270	200	300	130	900

Girdi Matrisi:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 540 \\ 600 \\ 900 \end{bmatrix} ; d_{\text{mevcut}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 15 \\ 130 \end{bmatrix} ; d_{\text{yeni}} = \begin{bmatrix} d_{y1} \\ d_{y2} \\ d_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}/x_1 & x_{12}/x_2 & x_{13}/x_3 \\ x_{21}/x_1 & x_{22}/x_2 & x_{23}/x_3 \\ x_{31}/x_1 & x_{32}/x_2 & x_{33}/x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 90/540 & 150/600 & 225/900 \\ 135/540 & 150/600 & 300/900 \\ 270/540 & 200/600 & 300/900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/3 \\ -1/2 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{336}{109} & \frac{216}{109} & \frac{234}{109} \\ \frac{288}{109} & \frac{372}{109} & \frac{294}{109} \\ \frac{396}{109} & \frac{348}{109} & \frac{486}{109} \end{bmatrix}$$

$$\Delta d = d_{\text{yeni}} - d_{\text{mevcut}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 75 \\ 15 \\ 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -5 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = (I - A)^{-1} \cdot \Delta d = \begin{bmatrix} \frac{336}{109} & \frac{216}{109} & \frac{234}{109} \\ \frac{288}{109} & \frac{372}{109} & \frac{294}{109} \\ \frac{396}{109} & \frac{300}{109} & \frac{486}{109} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 \\ -5 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$x_{\text{yeni}} = x_{\text{mevcut}} + \Delta x = \begin{bmatrix} 540 \\ 600 \\ 900 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{16500}{109} \\ -\frac{17880}{109} \\ -\frac{26220}{109} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{16500}{109} \\ -\frac{17880}{109} \\ -\frac{25980}{109} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 540 \\ 600 \\ 900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 388,63 \\ 435,96 \\ 661,65 \end{bmatrix}$$

Toplam Çıktı (=Toplam Girdi, Üretime olan toplam talep) miktarları elde edilmiş olur.

Örnek:

Basit olarak elektrik ve su endüstrilerinden oluşan iki endüstrisi olan bir ekonomi düşünelim. Çıktı birimini TL olarak alalım. Elektrik şirketi, su ve elektrik kullanarak elektrik; su şirketi de yine su ve elektrik kullanarak su üretiyor olsun,

Elektrik şirketi 1 TL' lik elektrik üretmek için 0,30 TL' lik elektrik ve 0,10 TL' lik su,
Su şirketi 1 TL' lik su üretmek için 0,20 TL' lik elektrik ve 0,40 TL' lik su,
Dış talep, 12.000 TL' lik elektrik, 8.000 TL' lik su olsun.

Elektrik şirketinin iç ve dış talebi karşılayabilmesi için üretmesi gereken elektrik miktarı x_1 TL , su şirketinin iç ve dış talebi karşılayabilmesi için üretmesi gereken su miktarı x_2 TL olsun. Buna göre denge koşullarını belirleyen denklem sistemi yazabiliriz.

$$x_1 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 12000$$

$$x_2 = 0,1x_1 + 0,4x_2 + 8000$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12000 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

$$x = Ax + d$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x ; \text{ Çıktı matrisi}$$

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} = A ; \text{ Teknoloji matrisi}$$

$$\begin{bmatrix} 12000 \\ 8000 \end{bmatrix} = d ; \text{ Nihai talep, Bağımsız talep veya Dış talep matrisi}$$

$$x = (I - A)^{-1} \cdot d$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$\det(I - A) = |I - A| = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,7 \cdot 0,6 - (-0,1) \cdot (-0,2) = 0,4$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,25 & 1,75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.25 & 1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12000 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22000 \\ 17000 \end{bmatrix}$$

Elektrik üretiminin olan toplam talep (toplam girdi veya çıktı miktarı) $x_1 = 22000 \text{ TL}$

Su üretiminin olan toplam talep (toplam girdi veya çıktı miktarı) $x_2 = 17000 \text{ TL}$

Uygulamalar

Girdi Çıktı matrisi A 'nın nasıl bulunduğu:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{x_{11}}{x_1}$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{x_{21}}{x_1}$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{x_{31}}{x_1}$$

$$a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{x_{12}}{x_2}$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{x_{22}}{x_2}$$

$$a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{x_{32}}{x_2}$$

$$a_{31} = \frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{31}}{x_1}$$

$$a_{13} = \frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{13}}{x_3}$$

$$a_{23} = \frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{23}}{x_3}$$

$$a_{33} = \frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{33}}{x_3}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}/x_1 & x_{12}/x_2 & x_{13}/x_3 \\ x_{21}/x_1 & x_{22}/x_2 & x_{23}/x_3 \\ x_{31}/x_1 & x_{32}/x_2 & x_{33}/x_3 \end{bmatrix}$$

Uygulama Soruları

1) Tarım (T) , Enerji (E) ve İmalat (İ) gibi üç sektörlerinden oluşan bir ekonomide,
 1 TL'lik tarımsal üretim için 0,2 TL'lik tarım, 0,4 TL'lik enerji girdisi;
 1 TL'lik enerji üretimi için 0,2 TL'lik enerji, 0,4 TL'lik imalat girdisi;
 1 TL'lik imalat için 0,1 TL'lik tarım, 0,1 TL'lik enerji ve 0,3 TL'lik imalat girdisi gerekmektedir. Dış talep, tarım için 20.000 TL'lik, enerji için 10.000 TL'lik ve imalat için 30.000 TL'lidir. Her sektörün gerçekleştirmesi gereken çıktı ne olmalıdır?

Çözüm:

x_1 ; tarım sektörü çıktısı,
 x_2 ; enerji sektörü çıktısı,
 x_3 ; imalat sektörü çıktısı.

$x_1 = 0,2x_1 + 0x_2 + 0,1x_3 + 20$ tarım üretimi için tarım, enerji üretimi için tarım, imalat için tarım
 $x_2 = 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 + 10$ tarım üretimi için enerji, enerji üretimi için enerji, imalat için enerji
 $x_3 = 0x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + 30$ tarım üretimi için imalat, enerji üretimi için imalat, imalat için imalat.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Girdi-çıkı matris denklemi: $x = Ax + d$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \text{teknoloji matrisi,}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}; \text{çıkı matrisi,}$$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}; \text{dış talep matrisi.}$$

$$x = Ax + d$$

$$x = (I - A)^{-1} \cdot d$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & -0,1 \\ -0,4 & 0,8 & -0,1 \\ 0 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$\det(I - A) = 0,4$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 1.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 & 1.6 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} \cdot d$$

$$\begin{bmatrix} 1.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 1.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 37 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 37 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Benzer sonuçlar Cramer Yöntemi yardımı ile de bulunabilir.

$$x_1 = \det(I - A) = \begin{vmatrix} 20 & 0 & -0,1 \\ 10 & 0,8 & -0,1 \\ 30 & -0,4 & 0,7 \end{vmatrix} = \frac{13,2}{0,4} = 33$$

$$x_2 = \det \begin{bmatrix} 0,8 & 20 & -0,1 \\ -0,4 & 10 & -0,1 \\ 0 & 30 & 0,7 \end{bmatrix} = \frac{14,8}{0,4} = 37$$

$$x_3 = \det \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 20 \\ -0,4 & 0,8 & 10 \\ 0 & -0,4 & 30 \end{bmatrix} = \frac{25,6}{0,4} = 64$$

2) Aşağıda verilen girdi çıktı matrisine göre A ve B sektörlerine ilişkin toplam çıktıyı belirleyiniz.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,5 \\ -0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{40}{9} & \frac{50}{9} \\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} \frac{40}{9} & \frac{50}{9} \\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 90 \end{bmatrix}$$

3) İki-endüstrili bir ekonomide, aşağıda verilen A ve d için x i bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Çözüm:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.4 \\ 0.6 & 1.6 \end{bmatrix}$$

$$x = (I - A)^{-1} \cdot d = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.4 \\ 0.6 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

Toplam Çıktılar, sektörlere Göre:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde büyük ekonomilerde sektörler arası ilişkilerin modellenmesinin yapıldığı Girdi – Çıktı analizi gerçekleştirilmiştir. Girdi çıktı analizinin varsayımları ve Girdi Çıktı Analizi Uygulama aşamaları ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Bölüm Soruları

1) W. Leontief'in geliştirmiş olduğu modelde a_{ij} ; j . sektörde bir birim çıktı üretebilmek için gerekli olan i . girdi miktarını göstermektedir. a_{ij} 'nin hesaplanmasında hangi formül kullanılır?

a) $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ b) $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}$ c) $a_{ij} = \frac{x_i}{x_{ij}}$ d) $a_{ij} = \frac{x_j}{x_{ij}}$ e) $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{ij}}$

2) 2. Sektörde 500 TL tutarında çıktı üretebilmek için 3. Sektörden kullanılan girdi miktarı 200 TL ise a_{23} değeri nedir?

a) $a_{23} = \frac{500}{200}$ b) $a_{23} = \frac{200}{500}$ c) $a_{23} = \frac{400}{500}$ d) $a_{23} = \frac{500}{400}$ e) $a_{32} = 5$

3) A ve B gibi iki sektörlü bir ekonomi sisteminde parasal cinsten girdi tutarları aşağıdaki gibi ise; A sektörüne olan toplam talep ne kadardır? ($X_A = ?$)

Üretici	A	B	Bağımsız Talep (d)
A	160	180	160
B	200	100	100

a) 340 b) 290 c) 500 d) 360 e) 760

4) A ve B gibi iki sektörlü bir ekonomi sisteminde parasal cinsten girdi tutarları aşağıdaki gibi ise; B sektörüne olan toplam talep ne kadardır? ($X_B = ?$)

Üretici	A	B	Bağımsız Talep (d)
A	160	180	160
B	200	100	100

a) 340 b) 400 c) 450 d) 500 e) 900

5) A ve B gibi iki sektörü bulunan bir ekonomi sisteminde girdi tutarları ve bağımsız talep tutarları aşağıdaki gibi ise; $X_{12} = ?$

Üretici	A	B	Bağımsız Talep (d)	Toplam Üretim
A	150	200	150	500
B	200	100	100	400

a) 3/80 b) 2/5 c) 1 d) 1/4 e) 1/2

6) 1 gr maya üretmek için 0,1 gr mayaya ve 0,01 gr asite, 1 gr asit üretmek için 0,05 gr mayaya ve 0,02 gr aside gereksinim vardır. 34,5 gr maya ve 56,8 gr asit dış talebi olduğuna göre iç ve dış talebin tam olarak karşılanması için yaklaşık olarak ne kadar maya ve asit üretilmelidir?

- a) $\begin{bmatrix} 85 \\ 80 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 39 \\ 60 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 50 \\ 75 \end{bmatrix}$

7) Varsayalım ki belirli bir ekonomi için girdi-çıkı matrisi (teknolojik matris) (A) ile nihai mal tüketim (dış talep) vektörü (d) aşağıdaki şekilde tanımlanmış olursa, bu ülkede her bir sektörün üretmesi gereken mal miktarı şıklardan hangisinde verilmektedir?

$$\text{Teknolojik Matris} = A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \text{Dış talep} = d = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- a) $\begin{bmatrix} 75 \\ 140 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 70 \\ 145 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 25 \\ 37,5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 70 \\ 150 \end{bmatrix}$

8) K ve L gibi iki endüstrisi bulunan bir ekonomi için hesaplanan girdi çıktı matrisi (teknolojik matris) $A = \begin{bmatrix} a_{11} = 0,4 & a_{12} = 0,1 \\ a_{21} = 0,2 & a_{22} = 0,3 \end{bmatrix}$ ve endüstrilere olan toplam talepler $\begin{bmatrix} K = X_1 \\ L = X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $X_{11} = ?$

- a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

9) İki sektörlü bir ekonomi için hesaplanan $(I - A)^{-1}$ matrisi ve sektörlerle olan bağımsız (dış) talepler aşağıda verilmektedir.

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,3 & 2,8 \\ 2,5 & 3,4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Sektörlerin toplam çıktıları aşağıdaki şıklardan hangisinde verilmektedir?

- a) $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149 \\ 227 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227 \\ 149 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 152 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152 \\ 110 \end{bmatrix}$

10) İki endüstrili bir sistemde bağımsız talep (dış talep) $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$ iken sonraki durumda $\begin{bmatrix} d_{1\text{yeni}} \\ d_{2\text{yeni}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}$ olmuş ise $(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,25 \\ 0,5 & 1,75 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, endüstrilerin toplam üretimleri (toplam çıktıları) nasıl değişir?

- a) X_1 ve X_2 değişmez
- b) X_1 ve X_2 azalır
- c) X_1 artar ve X_2 azalır
- d) X_1 azalır ve X_2 artar
- e) X_1 ve X_2 artar

Cevaplar:

1) a, 2) b, 3) c, 4) b, 5) e, 6) b, 7) c, 8) d, 9) a, 10) e

9. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE GRAFİK YÖNTEM

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 9.1. Doğrusal programlama Tekniği Varsayımları
- 9.2. Doğrusal Programlama Probleminin Matematiksel Modeli
- 9.3. Doğrusal Programlama Probleminin Grafik Yöntemle Çözümü

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Doğrusal programlama ile matematiksel model nasıl kurulur?
- 2)** Doğrusal Programlama hangi tür problemlerin modellenmesi için uygundur?
- 3)** Doğrusal Programlama modeli hangi kısımlara sahiptir?
- 4)** Grafik Yöntemle çözüm hangi problemler için uygun olur?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Doğrusal Programlama ile Modelleme	Verilen Bir İşletme Problemini Doğrusal Programlama İle Modelleyebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Araştırarak
Doğrusal Programlama Matematiksel Model Kısımları	Doğrusal Programlama Modeli Kısımlarını Öğrenmek	Okuyarak, Araştırarak
Doğrusal Programlama Çözüm Yöntemi: Grafik Yöntem	Grafik Yöntem İle Doğrusal Modelin Optimum Çözümünü Bulmak	Okuyarak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Doğrusal Programlama Matematiksel Model Amaç Fonksiyonu Kısıtlar Negatif Olmama Koşulu
--

Giriş

Doğrusal Programlama (DP) Lineer Programlama (LP) adı ile de anılır. Doğrusal Programlama problemi, doğrusal sınırlayıcı koşullar (kısıtlar) adı verilen eşitlik ve eşitsizlikler grubu ile birlikte amaç denklemi adı verilen bir doğrusal fonksiyonun değerini optimize etmeyi (en iyileme) (maksimize ya da minimize etme) gerektiren matematiksel modeldir. Doğrusal Programlama belli bir amacı gerçekleştirmek için sınırlı kaynakların etkin kullanımını ve çeşitli seçenekler arasında en uygun dağılımını sağlayan matematiksel bir tekniktir. Daha basit bir anlatım ile Doğrusal Programlama Modeli, eldeki kaynaklar doğrultusunda işletmenin karını maksimum yapacak üretim değerlerinin elde edilmesini veya işletme maliyetlerini minimum yapacak üretim değerlerinin elde edilmesini sağlayan modelin oluşturulması, çözümü ve elde edilen sonuçlarla işletme içi kararların alınabilmesini sağlamaktadır.

DP deterministik bir araçtır, yani model parametreleri belirgin olarak kabul edilir. Bu teknik, modelin parametrelerindeki kesikli ya da sürekli değişimlerin “durağan” (statik) optimum çözümünün duyarlılığını test etmede karar vericiye imkan veren, ileri optimal ve parametrik analizleri sağlayarak eksiklikleri giderir.

Bir işletmenin en büyük sorunu, elinde kaynak (kısıt) ve imkânları, çeşitli amaç ve kullanımlara en uygun olabilecek şekilde tüketebilmektir. İşletmedeki çalışan personel ve uzmanlar, kullanılan makinalar, malzeme, hammadde, yer, zaman vb. kriterlerin her biri işletmenin elinde bulundurduğu kaynak ve imkânları sembolize edebilmektedir. İşletmelerin bu kaynakları kullanırken en büyük amaçları; kaynakların mümkün olan en iyi şekilde dağılımını sağlayarak karlılığı maksimum seviyeye çekebilmektir. İşletmeler bu kar maksimizasyonunu, elde bulunan imkân ve kısıtlar ile üretilecek ürün türlerinin belirlenmesi; bu ürünlerden ne kadar üretileceği bilgisinin doğru hesaplanarak; kısıt ve imkânların mümkün olan en az maliyetli şekilde dağıtımını gerçekleştirilmesi ile sağlamaktadır.

Doğrusal Programlama kavramında bulunan “Doğrusal” kelimesi ile anlatılmak istenen düşünce, girdiyi oluşturan değişkenler ile çıktı değeri arasında doğrusal bir ilişki olmasıdır. Programlama sözcüğü ile anlatılmak istenen ise elde bulunan kısıt ve imkânlar ile mümkün olan en uygun dağılım sonucu en yüksek karı elde edilen durumu bulmaya çalışmaktır.

9.1. Doğrusal programlama Tekniği Varsayımları

- Amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcı şartlar doğru tanımlanmalıdır. Amacın kâr Maksimizasyonu mu yoksa maliyet minimizasyonu mu olduğu açıkça belirtilmelidir.
- Değişkenler kantitatif olmalıdır. Doğrusal programlama kalitatif (rakamla ifade edilemeyen) değişkenler için kullanılmaz.
- Değişkenler kendi aralarında ilişkili olmalıdır.
- Kullanılacak kaynaklar sınırlı olmalıdır.
- Değişkenler arasında kurulan bağıntılar doğrusal olmalıdır.
- Değişkenler arasında alternatif seçim olanağı olmalıdır.
- Doğrusal programlamanın uygulanacağı işletme problemi kısa dönemli olmalıdır.
- Bağımlı değişkenlerin sıfır ya da pozitif olması gerekir.

Doğrusal programlamanın teorik yapısında üç etkeni göz önüne almamız gerekir. Bunlar; amaç fonksiyonu, kısıtlayıcı koşullar ve pozitiflik koşuludur.

9.2. Doğrusal Programlama Probleminin Matematiksel Modeli

Doğru matematiksel modelin kurulması (formülasyonu), ilgili karar probleminin çözümündeki en önemli aşamalardan biridir ve bir anlamda "sanat" olarak da görülebilir. Şekil 1 model kurulma sürecini bir akış şeması halinde ifade etmektedir. İlk aşamada ilgili karar ortamının çok iyi anlaşılması, bu ortamı etkileyecek tüm faktörlerin belirlenmesi gerekir. İkinci aşamada, karar değişkenlerinin açıkça tanımlanması ile kastedilen her kararın ayrı ayrı ölçülebilir (sayısallaştırılmış) bir şekilde ifadesi ve bunlara açık birimler verilmesidir. En son aşamada karar değişkenleri ile kısıtlar ve amaç arasındaki ilişkilerin matematiksel olarak ifadeleri yapılmalıdır. Doğrusal Programlama Problemi (DPP) matematiksel olarak modellenirken, üç önemli kısma sahiptir.

- Amaç fonksiyonu
- Kısıtlar (koşullar)
- Negatif olmama koşulu

9.2.1. Amaç Fonksiyonu

Amaç fonksiyonu, doğrusal programlama kapsamına giren problemdeki kısıtların kullanılmasıyla oluşan faydanın maksimize edilmesi veya yine kısıtların kullanılmasıyla oluşan zararın minimize edilmesi olarak tanımlanabilir. Matematiksel ifadesi ile aşağıdaki şekildedir:

$$Z_{maks/min} = \sum_{i=1}^n C_i \cdot X_i$$

$Z_{maks/min}$ = Maksimum düzeyde karlılığı veya minimum düzeyde zararı/maliyeti sembolize eder.

X_i ; Karar değişkenleri,

C_j ; Birim kar veya birim maliyelerdir.

Örnek olarak A ve B gibi iki ürünün birim karları sırası ile 3 ve 2 TL ise; bu iki ürünün üretilip satılması sonucu, $Z = 3X_1 + 2X_2$ kadar kar elde edilir. Bu amaç fonksiyonunu büyütebilmek için, fonksiyonda bulunan X_1 ve X_2 değişkenlerinin değerlerini büyütmek gerekir. Yani bir anlamda üretimi arttırmak gerekir. Ancak, üretim sonsuza kadar artmaz. İşletmenin her kaynak için kapasiteleri yani işletmenin çeşitli sınırlayıcı koşulları (kısıtları) bulunmaktadır. Bir işletmenin; sahip olduğu alan, işgücü, makine sayısı, hammadde... gibi birçok kısıtı vardır. Bu kısıtlar altında, Z değerini (amaç fonksiyonunu) en iyi düzeye ulaştırmaktır.

9.2.2. Kısıtlar(Koşullar)

Modeli oluşturulan işletmenin elindeki kısıtların belirli bir sınırı olduğunu (kapasite), bu sınırın elindeki kısıt miktarlarına ait maksimum stok olarak düşünüldüğü sınırlayıcı niteliğe sahip ifadedir.

$$\begin{aligned} a_{ij}X_i &\leq b_j ; \\ i &= 1, 2, 3, \dots, m ; \\ j &= 1, 2, 3, \dots, n ; \end{aligned}$$

Şeklindeki koşullandırmalar doğrultusunda matematiksel gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1j}X_j + \dots + a_{1n}X_n &\leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2j}X_j + \dots + a_{2n}X_n &\leq b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mj}X_j + \dots + a_{mn}X_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Yukarıdaki matematiksel gösterim de " b_m " ile gösterilen değerler doğrusal programlama modelinin oluşturulduğu işletmenin kısıtlarına ait maksimum stok oranını göstermektedir. " a_{ij} " ile ifade edilen değerlerin ise alternatif üretim teknikleri olduğu varsayılmaktadır. Daha da açık bir anlatım ile " a_{ij} " bir birim j ürünü üretebilmek için kısıtlardan gerekli olan miktarları göstermektedir. Aşağıda eşitlik ve eşitsizlik kısıtlarına örnekler verilmektedir.

Önceki örneğe kısıtlar için de genişletecek olur isek;

A ve B ürünlerinin üretildiği bir atölyede, 1 birim A ürünü üretebilmek için 4 işçilik saati, 1 birim B ürünü üretebilmek için 5 işçilik saati harcanıyor olsun. Eğer bu atölyenin işçilik kapasitesi haftalık 96 saat ise, birinci kısıtımız;

$$4X_1 + 5X_2 \leq 96 \quad (\text{İşçilik Kısıtı})$$

Benzer şekilde; A ve B ürünleri için harcanan hammadde miktarları sırası ile 20 kg ve 10 kg ve atölyede toplam haftalık 500 kg hammaddesi bulunmakta ise, ikinci kısıtımız;

$$20X_1 + 10X_2 \leq 500 \quad (\text{Hammadde Kısıtı})$$

Doğrusal Programlama modelinin kısıtları aşağıdaki gibi oluşmuştur.

$$4X_1 + 5X_2 \leq 96 \quad (\text{İşçilik Kısıtı})$$

$$20X_1 + 10X_2 \leq 500 \quad (\text{Hammadde Kısıtı})$$

A ürününün üretim miktarı: x

B ürününün üretim miktarı: y

İle gösterilirse kısıtlar;

$$4x + 5y \leq 96 \quad (\text{İşçilik Kısıtı})$$

$$20x + 10y \leq 500 \quad (\text{Hammadde Kısıtı})$$

biçiminde yazılır.

Örnek:

$2x + 3y = 6$ kısıtı grafik düzlemde nasıl gösterilir?

Cevap:

Doğrusal denklem sistemlerinden hatırlandığı gibi, $2x + 3y = 6$ denklemi iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde bir doğruyu gösterir.

Doğrunun grafiği aşağıdaki gibidir.

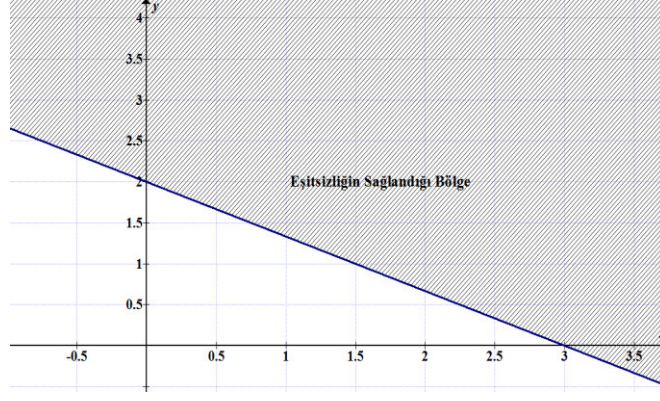


Örnek:

$2x + 3y \geq 6$ kısıtı grafik düzlemde nasıl gösterilir?

Cevap:

$2x + 3y \geq 6$ eşitsizliğini sağlayan noktalar, iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde bir doğrunun üst tarafında kalan noktaların kümesi olup, bu bölge aşağıdaki gibi gösterilir. Eşitlik de sağlayacağı için doğru da bu çözüm alanına dahildir.

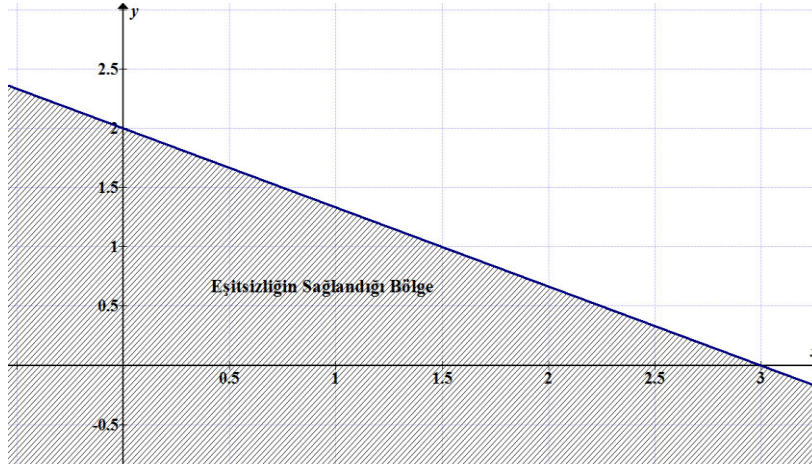


Örnek:

$2x + 3y \leq 6$ kısıtı grafik düzlemde nasıl gösterilir?

Cevap:

$2x + 3y \leq 6$ eşitsizliğini sağlayan noktalar, iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde bir doğrunun alt tarafında kalan noktaların kümesi olup, bu bölge aşağıdaki gibi gösterilir. Eşitlik de sağlayacağı için doğru da bu çözüm alanına dahildir.



9.2.3. Negatif Olmama Koşulu

Bu ifade, doğrusal programlama varsayımlarında da geçen “karar değişkenlerinin sıfır ya da pozitif olması gerekir” ifadesinin matematiksel gösterimidir. “ X_j ” şeklinde ifade edilen tüm birimlerin karar değişkeni olarak ele alındığı bir doğrusal programlama modelinde pozitiflik koşulu aşağıdaki şekilde ifade edilecektir:

$$X_j \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

A ve B gibi farklı iki ürünün üretimlerinin ne kadar olması gerektiğini belirlemek isteyen bir atölye düşünelim. A ve B ürünlerinin birim karları sırasıyla 2 ve 5 TL dir. A ürününün her birimi için 3 saat işçilik ve 4 ton hammadde, B ürününün her birimi için 5 saat işçilik ve 7 ton hammadde kullanılmaktadır. Atölyenin haftalık işçilik kapasitesi 300 saat, o hafta için deposunda tuttuğu hammadde stoku 350 ton olduğuna göre, o hafta bu iki ürünün

Üretimlerinden (ki bu ürünlerin hepsinin satıldığı varsayılıyor) elde edeceği karı maksimize etmek (en büyüklemek) için hangi üründen ne kadar üretim yapmalıdır.

Z ; Amaç Fonksiyonu

x ve y ; üretim miktarları

C_j ; birim karlar

b_i ; kapasiteler

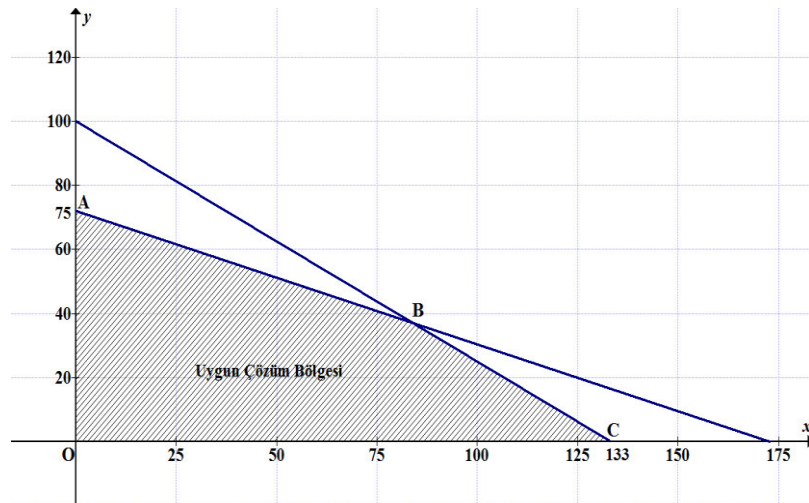
$$Z_{maks} = 2x + 5y \quad \text{Amaç Fonksiyonu,}$$

$$3x + 4y \leq 300 \quad (\text{İşçilik kısıtı})$$

$$5x + 12y \leq 360 \quad (\text{Hammadde kısıtı})$$

$$x, y \geq 0 \quad (\text{üretimin negatif olamayacağı koşulu})$$

Yukarıda verilen kısıtlar doğrultusunda uygun çözüm bölgesi bulunursa;

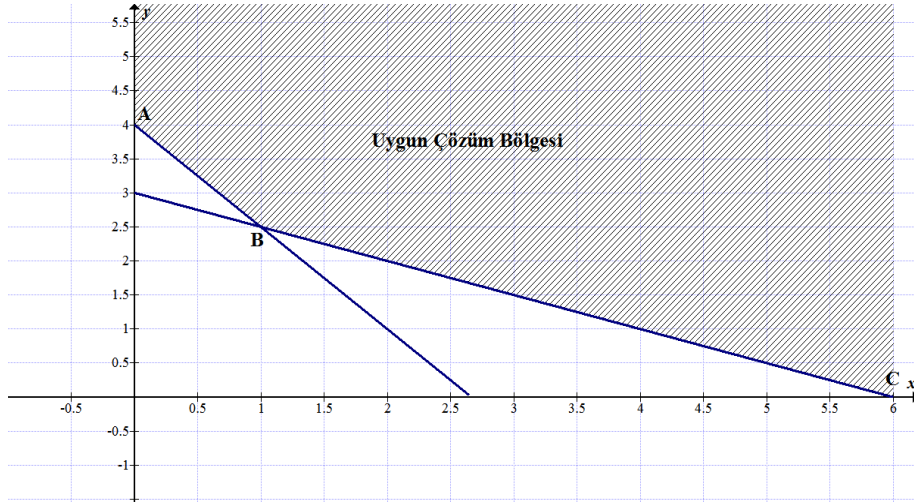


Kısıtlar aşağıdaki gibi olursa;

$$3x + 4y \geq 300$$

$$5x + 12y \geq 360$$

$$x, y \geq 0$$



9.3. Doğrusal Programlama Probleminin Grafik Yöntemle Çözümü

Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan çok sayıda yöntem bulunmaktadır. Ancak bu yöntemler matematiksel modelde bulunan değişken ve kısıt sayısına göre değişkenlik gösterir. İki veya üç değişkenin bulunması durumunda grafik yöntemle doğrusal programlama probleminin çözümü, kolay ve anlaşılır olduğu için sıkça kullanılmaktadır.

Grafik Yöntem, oluşturulan doğrusal programlama modelinin içerdiği sınırlayıcı denklemlerin koordinat düzlemi üzerinde grafiklerinin çizilmesi ve kısıtların maksimum değerleri doğrultusunda ortak bir çözüm noktası bulunmasını içerir. Yöntem üç ve daha az değişkenden oluşan doğrusal programlama modelleri için uygundur. Temelde iki önemli aşaması söz konusudur:

- Model içerisinde ifade edilen kısıtların sağlandığı uygun çözüm alanının bulunması;
- Çözüm alanı içerisindeki bütün noktalardan en ideal olanının belirlenmesi.

Örnek:

$$Z_{\text{maks}} = 5X_1 + 4X_2$$

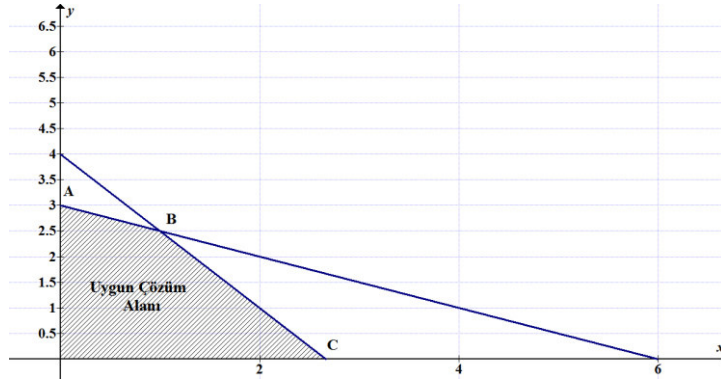
$$6X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$$

Doğrusal programlama modelinin grafik yöntemi ile çözümü aşağıdaki şekilde olacaktır:

X_1 yatay eksen, X_2 ise dikey eksen üzerinde gösterilmektedir. $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ negatif olmama kısıtları uyarınca çözüm alanı koordinat sisteminin 1. bölgesinde olmaktadır. Kalan iki kısıt bu koordinat sisteminde göstermenin yolu, eşitsizlikleri eşitlikmiş gibi düşünerek bunların doğrularını çizmektir. Daha sonra her eşitsizliğe ait doğruların altında ya da üstünde kalan bölge söz konusu eşitsizliğin işaretine göre seçilmektedir. Buna göre örnek modelin grafiği aşağıdaki şekilde olacaktır.



Şekil 12 Örnek 1'e Ait Grafik Çözüm

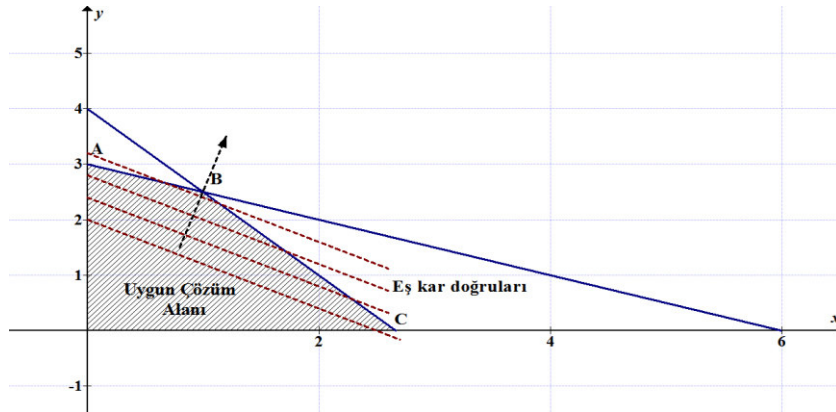
Taralı alanının sınırları üzerindeki herhangi bir nokta tüm kısıtları sağlayan çözüm noktasıdır. Optimum çözümün belirlenmesi için,

$Z_{\text{maks}} = 5X_1 + 4X_2$ biçimindeki kâr fonksiyonunun artış yönünün bulunması gerekmektedir. Pratikte Z ye rastgele iki rakam verilerek (10 ve 15) Z_{maks} ' in artış yönü belirlenmektedir.

Önce $5X_1 + 4X_2 = 10$ sonra $5X_1 + 4X_2 = 15$ doğruları çizilir.

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$; $X_1 + 2X_2 \leq 6$ doğrularının kesişim noktası olduğundan iki denklemin çözülmesiyle $X_1 = 3$ ve $X_2 = 1,5$ bulunur.

Amaç fonksiyonu ise $Z_{\text{maks}} = 5.3 + 4.1,5 = 21$ olarak hesaplanır.



Örnek:

$$Z_{\text{maks}} = 3.X_1 + 2.X_2$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 15$$

$$X_1 + X_2 \leq 7$$

$$2X_1 + X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Yukarıda verilmekte olan doğrusal programlama probleminin (maksimizasyon problemi) grafik yöntemle optimum çözümü bulunmuştur.

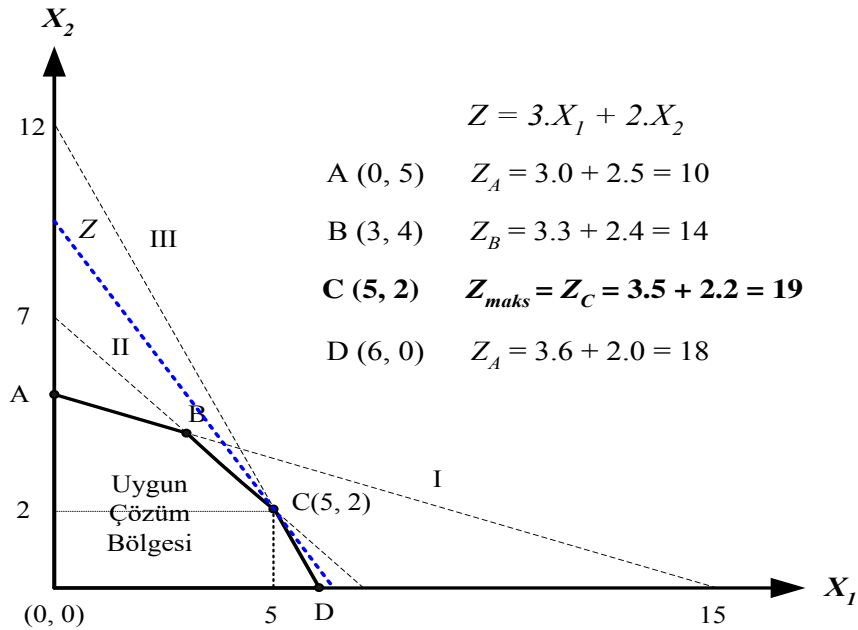
Şekil incelendiğinde, birinci kısıtla ilgili olarak çizilen 1 doğrusunun eğimi $m_1 = -1/3$, ikinci kısıtla ilgili olarak çizilen 2 doğrusunun eğimi $m_2 = -1$, üçüncü kısıtla ilgili olarak çizilen 3 doğrusunun eğimi ise $m_3 = -2$ dir. Amaç fonksiyonunun eğimi ise $m_1 = -c_1/c_2 = -3/2$ 'ye eşittir. Dolayısıyla eğimleri mutlak değer olarak düşündüğümüzde, amaç fonksiyonunun eğimi, 1 ve 2 doğrularının eğiminden büyük, 3 doğrusunun eğiminden küçüktür. Dolayısıyla Z kar doğrusu C noktasından uygun bölgeyi terk edecektir. Böylece C noktasında karar değişkenlerinin aldığı değerler Z fonksiyonunu maksimum kılar. Karar değişkenlerinin C noktasındaki değerleri 2 ve 3 doğruları kesiştirilerek bulunabilir.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 7 \\ 2X_1 + X_2 &= 12 \\ X_1 &= 5, X_2 = 2 \text{ (C noktası)} \end{aligned}$$

değerleri çıkmakta ve kârımız;

$$Z_{\text{maks}} = 3.X_1 + 2.X_2 = 3.5 + 2.2 = 19$$

olmaktadır.



Şekil 13. Örnek Modelin Grafik Çözümü

Örnek:

MEYVEPAZARI Meyvecilik A.Ş. Avrupa ülkelerine elma ve armut ihraç etmektedir. Kasalarda stoklanan bu ürünlerin birim stoklama maliyetleri sırasıyla 7 TL ve 9 TL'dir. Bir kasa elma 5m² ve bir kasa armut da 10m² alan kaplamaktadır. Firmanın depolama kapasitesi ise 1000m²'dir. Elma ve armuda olan talep değişkenliğinden dolayı firma bu iki

meyvenin her birinden en az 50'şer kasa güven stoku bulundurmak zorundadır. Firmanın toplam stoklama maliyetini minimize eden doğrusal programlama modelini kurunuz.

Karar değişkenleri:

X_1 ; elma stoğu

X_2 ; armut stoğu

Amaç fonksiyonu:

$Z_{\min}$; Toplam stoklama maliyeti

$$Z_{\min} = 7X_1 + 9X_2$$

Kısıtlar:

1. Kısıt depolama alanı

$$5X_1 + 10X_2 \leq 1000$$

2. Kısıt elma stoğuna ilişkin kısıt

$$X_1 \geq 50$$

3. Kısıt armut stoğuna ilişkin kısıt

$$X_2 \geq 50$$

Negatif olmama koşulu

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Örnek:

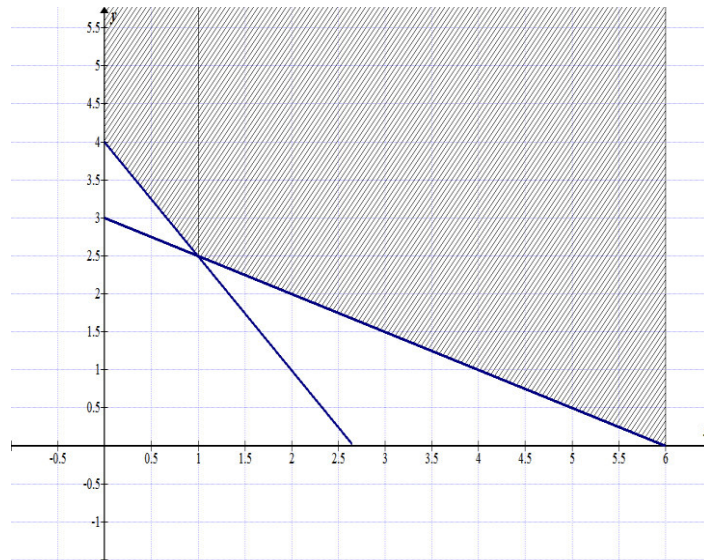
$$Z_{\min} = 5X_1 + 4X_2$$

$$6X_1 + 4X_2 \geq 24$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 6$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$$

Doğrusal programlama modelinin grafik yöntemi ile çözümü aşağıdaki şekilde olacaktır:



Olursuz Problem: Tüm kısıtları sağlayan bir karar değişkeni kümesinin bulunamaması durumudur. Gereksiz kısıtlar tanımlanması veya kısıtların parametrelerinin yanlış hesaplanması, girilmesi kolaylıkla bu duruma yol açabilir.

Uygulamalar

--

Uygulama Soruları

1) Bir şirket A, B ve C ürünlerini üreterek, üretebildiği miktarlarda da satmaktadır. Şirket A ürününü 10 TL'ye, B ürününü 13 TL'ye ve C ürününü de 20 TL'ye satmaktadır. A ürününün bir biriminin üretilmesi için 1 saatlik işçiliğe, B ürününün bir biriminin üretilmesi için ise, 2 saatlik işçiliğe ve bir birim C'nin üretilmesi için ise 3 saatlik işçilik gereksinim vardır. Bu işlemler için kullanılabilir toplam işçilik süresi 70 saattir. Bu şirketin gelirini maksimize edecek olan lineer programlama modelini kurunuz.

Çözüm:

Amaç fonksiyonu:

$$Z_{\text{maks}} = 10x_1 + 13x_2 + 20x_3$$

Kısıtlar:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 70$$

Negatif olmama koşulu:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ağıda verilen doğrusal programlama probleminin grafik çözüm alanını ve optimum sonucunu bulunuz.

$$\begin{aligned} Z_{\text{min}} &= 5x + 6y \\ 3x + y &\geq 5 \quad (1. \text{ Kısıt}) \\ x + 2y &\geq 12 \quad (2. \text{ Kısıt}) \\ 3x + 2y &\geq 24 \quad (3. \text{ Kısıt}) \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Çözüm:

Optimum Çözüm:

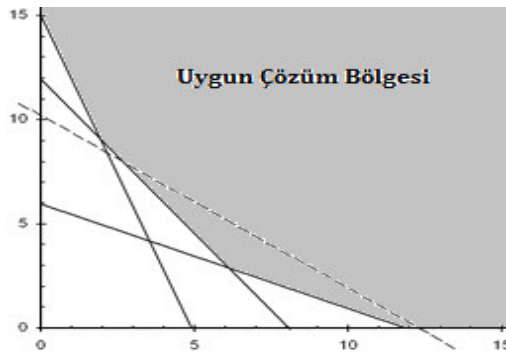
$$x = 6, y = 3, Z = 48$$

$S_1 = 6$ (Birinci kısıtın kullanılmayan kısmı),

$S_2 = 0$ (İkinci kısıtın kullanılmayan kısmı),

$S_3 = 0$ (Üçüncü kısıtın kullanılmayan kısmı)

Uygun Çözüm Bölgesi (Grafik Çözümü)



Optimum Çözüm Değerleri

$$x = 6, y = 3, Z = 48$$

3) Aşağıdaki problemin grafik yöntem çözümü nedir?

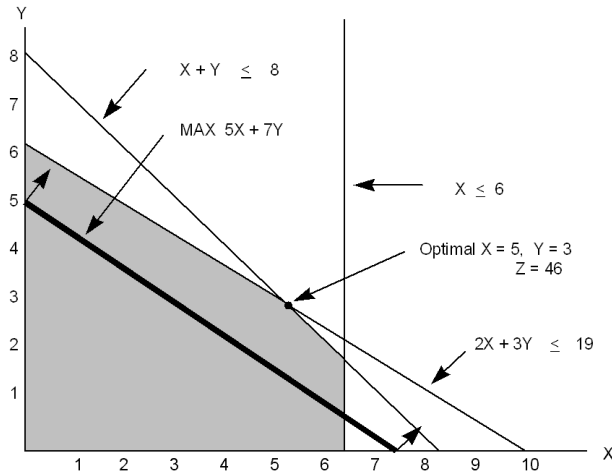
$$\text{maks } Z = 5X + 7Y$$

$$X \leq 6$$

$$2X + 3Y \leq 19$$

$$X + Y \leq 8$$

$$X, Y \geq 0$$



Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

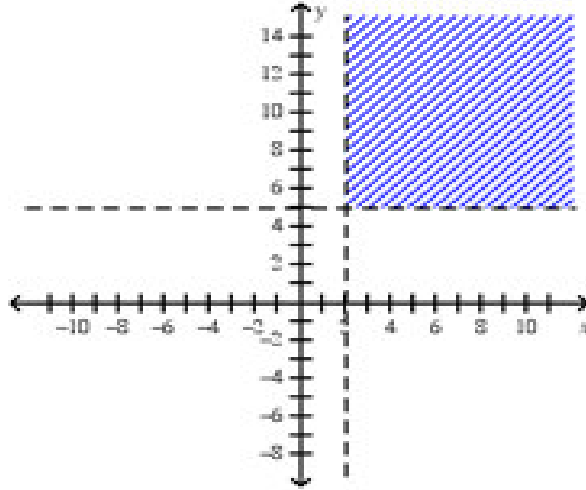
Bu bölümde Doğrusal Programlama kullanarak işletme problemlerinin modellenmesi, modelin kısımları, varsayımları anlatılmıştır. Ardından Doğrusal Programlama Matematiksel Modelinin Grafik Yöntemle çözümü açıklanmıştır.

Bölüm Soruları

1) Bir doğrusal programlama probleminin matematiksel modelinde aşağıdakilerden hangisi bulunmaz?

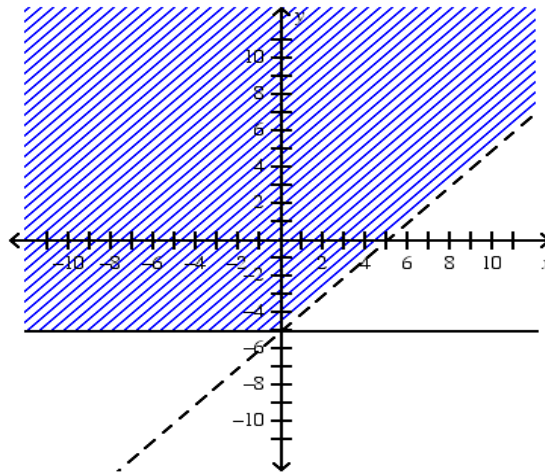
- a) Amaç fonksiyonu b) Kısıtlar c) Negatif olmama koşulu
d) Sağ taraf Sabitleri e) Maksimum kar

2) Aşağıdaki grafikte gösterilmiş olan taralı alan hangi eşitsizlik sistemine aittir?



- a) $x > 2$
 $y > 0$ b) $x < 2$
 $y < 5$ c) $x > 2$
 $y > 5$ d) $x > 5$
 $y > 2$ e) $x > 5$
 $y > 5$

3) Aşağıdaki grafikte gösterilmiş olan taralı alan hangi eşitsizlik sistemine aittir?



- a) $x - y > -5$
 $y > -5$ b) $x < y$
 $y > -5$ c) $x > y$
 $y > -5$

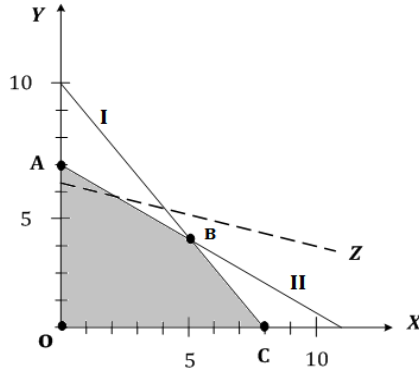
$$d) \begin{cases} x - y < 5 \\ y > -5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y < 5 \\ y > -5 \end{cases}$$

4) Aşağıdakilerden hangisi doğrusal programlamanın varsayımlarından birisi değildir?

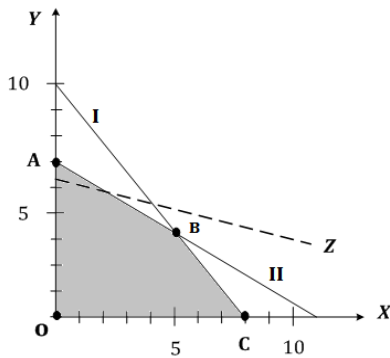
- a) Değişkenler kantitatif olmalıdır.
- b) Değişkenler kendi aralarında ilişkili olmalıdır.
- c) Değişkenler arasında kurulan bağıntılar doğrusal olmalıdır.
- d) Bağımlı değişkenler negatif veya 0 olabilir.
- e) Kullanılacak kaynaklar sınırlı olmalıdır.

5) Aşağıda bir maksimizasyon doğrusal programlama probleminin grafik çözümü görülmektedir. Z amaç fonksiyonuna ilişkin eş kar doğrusu kesikli çizilmiştir. Bu grafiğe göre optimal çözüm hangi noktadır?



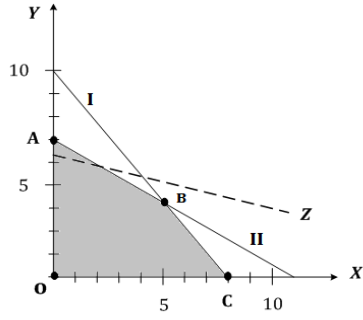
- a) O noktası
- b) A noktası
- c) B noktası
- d) C noktası
- e) B ve C Noktaları

6) Aşağıdaki Grafik Yöntemle bulunan optimal çözüm olan A noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?



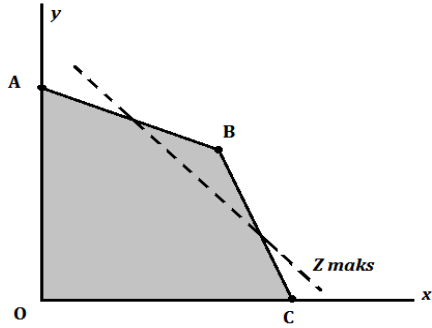
- a) (0, 7)
- b) (7, 0)
- c) (8, 0)
- d) (0, 8)
- e) (7, 7)

7) Birinci kısıta ilişkin doğrunun (I) eğimi kaçtır?



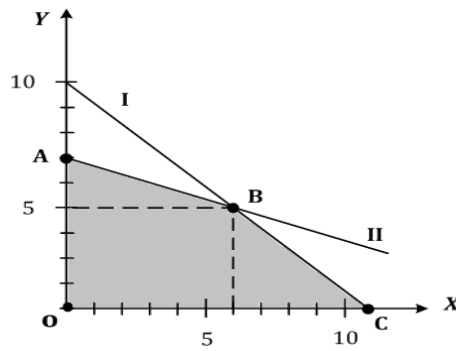
- a) $-4/5$ b) $5/4$ c) $-5/4$ d) $4/5$ e) $-7/11$

8) Aşağıda verilen grafikte koyu işaretli OABC bölgesi doğrusal programlamada hangi isimle adlandırılır?



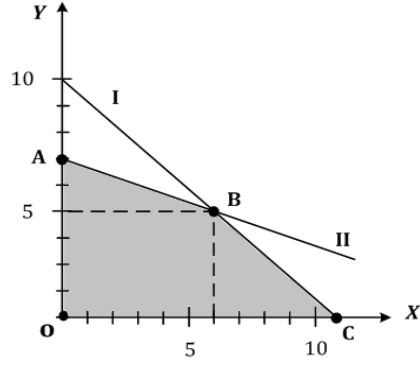
- a) Optimal çözüm bölgesi
b) Uygun olmayan çözüm bölgesi
c) Sonsuz çözüm bölgesi
d) Kesin çözüm bölgesi
e) Uygun çözüm bölgesi

9) Aşağıda verilen grafikte gri alan bir doğrusal programlama probleminin uygun çözüm bölgesini gösterdiğine göre, $Z_{maks} = 3x + 4y$ amaç fonksiyonu B noktası için hangi değeri alır?



- a) 35 b) 38 c) 42 d) 51 e) 60

10) Aşağıda verilen grafikte gri alan bir doğrusal programlama probleminin uygun çözüm bölgesini gösterdiğine göre, $Z_{\text{maks}} = 3x + 4y$ amaç fonksiyonu A noktası için hangi değeri alır?



a) 21

b) 24

c) 28

d) 35

e) 40

Cevaplar:

1) e, 2) c, 3) d, 4) d, 5) b, 6) a, 7) c, 8) e, 9) b, 10) c

10. SİMPLEKS YÖNTEM (MAKSİMİZASYON PROBLEMİ)

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

10.1. Simpleks Yöntem

10.2. Simpleks Yöntemle Çözüm Aşamaları

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Simpleks yöntem çözüm aşamalarını araştırınız.
- 2)** Simpleks yöntemin temelinde bulunan temel çözümleri inceleyiniz.

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Simpleks Yöntemde temel çözümler	Temel çözümleri bilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Simpleks Yöntem Varsayımları	Varsayımları bilmek	Okuyarak, tekrar yaparak
Simpleks Yöntem Aşamaları	Simpleks Yöntem Aşamaları	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Simpleks Yöntem Maksimizasyon Problemi

Giriş

Büyük M Metodu (Big M) olarak da bilinen Simpleks Yöntem, George Bernard Dantzig tarafından 1947 yılında geliştirilen Simpleks Yöntemi Doğrusal Programlama probleminin optimum çözümünü bulmak için uygulanması gereken kural ya da izlenmesi gereken sistematik süreçtir. Simpleks bir yinelemeli hesaplama yöntemidir. Simpleks Yöntemde, doğrusal denklemler sistemi için mümkün (olanaklı) temel çözümler aramaktadır, çözümlerin en uygun çözümler olup olmadığını test etmektedir.

Simpleks tek bir noktada en iyi çözüm, birden fazla uç noktada en iyi çözüm, sınırsız çözüm ve uygun çözüm alanı boş gibi karşılaştırılabilir tüm durumlara da cevap vermektedir.

Grafik yöntemden de hatırlanacağı üzere, Simpleks uygun bölgenin sınırları üzerinde uç noktaları ziyaret ederek hangi noktada en uygun çözümün olduğunu araştırmaktadır. Simpleks metot bu uç noktasından başlayarak optimuma daha yakın bir ikincisine, oradan bir üçüncüsüne atlayarak uygun değer uç noktasına ulaşılmasını sağlamaktadır. Her atlayışta amaç fonksiyonu optimuma biraz daha yaklaşmakta veya değerini muhafaza etmektedir. Simpleks uygun bir başlangıç noktası olarak amaç fonksiyonunu iyileştiren yönde uygun bölgenin köşe noktalarını kontrol ederek en iyi çözümü veren noktayı bulmaya çalışmaktadır. Simpleks metodu uygun değer sonuca ulaşılan kadar veya en uygun değer bağımsız olduğundan emin olana kadar çözümleri geliştirmek için kullanılmaktadır.

10.1. Simpleks Yöntem

Simpleks yöntemin ilk adımı olarak yapılması gereken iş, verilen kısıtları eşitlik haline dönüştürmektir. Bu dönüştürme sırasında verilen kısıt $a_{ij}X_i \leq b_j$ biçiminde ise, yani eşitsizlik $\leq$ ise, bu durumda sol taraf daha küçük veya en fazla eşit olduğu için s_{n+1} gibi bir değişken eklenir. Bu değişken eklenerek eşitsizlik eşitlik durumuna getirilmiş olur. Eklenen bu değişkene aylak (slack variable) değişken denir. Üretimde aylak değişken atıl (kullanılmayan) kapasiteyi gösterir. Bir kısıtın sağ tarafı kapasiteyi gösterir. Eğer kapasite tam kullanılmış ise, eklenen aylak değişkenin değeri sıfır demektir. Ancak kapasite tam kullanılmamış ise eklenen aylak değişkenin değeri sıfırdan büyük olur.

Eğer verilen kısıt $a_{ij}X_i \geq b_j$ biçiminde bir eşitsizlik ise bu defa eşitliği sağlamak amacı ile sol taraftan bir s_{n+1} gibi bir değişken çıkarılır. Bu değişkene artık değişken denir. Artık değişken de aylak değişken gibi sol taraf sağ tarafa eşit olduğunda sıfır, sol taraf sağ taraftan büyük olduğunda ise sıfırdan büyük (pozitif) olur. Eşitlik bu şekilde sağlanmış olur.

Eğer verilen kısıt eşitlik şeklinde ise, bu durumda Simpleks yöntem algoritmasının bir gereği olan temel çözüm oluşturabilmek için bir u_{n+1} gibi yapay değişken eklenir. Yapay değişkenin üretimde bir anlamı yoktur. Sadece Simpleks algoritmanın yürütülebilmesi amacı ile matematiksel olarak gerekli olan bir değişken olarak kabul edilir.

Aşağıda verilen doğrusal programlama problemini Simpleks yöntemle bulmak istersek;

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= 3X_1 + 2X_2 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 30 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 18 \\ X_1 &\geq 0 ; X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu problemde iki tane kısıt bulunmaktadır. Bu kısıtların ikisi de $\leq$ biçiminde verilmiştir. Sol taraf sağ taraf kıyasla ya küçük ya da en fazla eşittir. Eşitliği sağlamak amacı ile her iki kısıta gerekli aylak değişkenler eklenerek, kısıtlar eşitlik haline getirilir.

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 + S_1 &= 30 & (2X_1 + 3X_2 + 1.S_1 + 0.S_2 &= 30) \\ 2X_1 + X_2 + S_2 &= 18 & (2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 1.S_2 &= 18) \end{aligned}$$

Kısıtların Matrisle gösterim biçimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Verilen doğrusal programlama modelinde buluna kısıtlar, eşitlik haline getirildiği zaman dört değişkenli iki denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü araştırılırsa,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$(A; b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(A; b) = 2$$

$\text{rank}(A) = 2$ ve $\text{rank}(A; b) = 2$ eşit olduklarından ve değişken sayısı da 4 olduğundan, sistemin sonsuz çözümü olur. Eğer değişkenlerden iki tanesine sıfır değeri verilirse, geriye kalan değişkenlerin değerleri bulunabilir. İşte bir denklem sisteminde $n - m$ tane değişkene sıfır değerinin atanması ile bulunan çözümlere temel çözüm (basic solutions) denir. Sıfır değerinin atandığı değişkenler temelde olmayan değişkenler, diğer değişkenlere ise temel değişken denir.

Örneğin $2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$ biçiminde bir denklemde üç değişken bulunmaktadır. Üç bilinmeyenli bir denklem sonsuz çözüme sahip demektir. Örneğin X_1 ve X_2 değişkenleri 1 olur ise $S_1 = 25$ çıkar. Benzer şekilde $X_1 = 1$ ve $X_2 = 2$ olduğunda, $S_1 = 22$ çıkar. İşte bu örnekten de anlaşıldığı gibi X_1 ve X_2 'ye sonsuz tane farklı değer atanabilir, dolayısıyla denklemin sonsuz çözümü olur. İşte bu örnekteki üç değişkenden iki tanesine sıfır değeri atanırsa, yani X_1 ve X_2 sıfır değerine eşitse (yani A ve B ürününden henüz üretilmedi ise), $S_1 = 30$ olur. Zaten henüz üretim başlamadığında, kapasiteler kullanılmadığından S_1 o kısıta ait toplam kapasiteyi gösterir.

10.1.1. Temel Çözümler (Basic Solutions)

Benzer şekilde, $X_1 = 0$ ve $S_1 = 0$ olur ise, $X_2 = 10$; $X_2 = 0$ ve $S_1 = 0$ olur ise, $X_1 = 15$ olur. Buradan da anlaşıldığı gibi bu eşitlik için 3 tane temel çözüm bulunmaktadır.

1. Çözüm ($X_1 = 0$ ve $X_2 = 0$ olsun)
2. Çözüm ($X_1 = 0$ ve $S_1 = 0$ olsun)
3. Çözüm ($X_2 = 0$ ve $S_1 = 0$ olsun)

n değişkenli m tane eşitlik için, temel çözüm sayısı;

$$C \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

formülü ile hesaplanır. Örneğin 4 değişkenli (bilinmeyenli) 2 denklem verilmişse;

$$C \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!2!} = 6$$

tane temel çözüm bulunur. Şimdi iki denklemi birlikte düşünelim:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 + 1.X_3 + 0.X_4 &= 30 \\ 2X_1 + X_2 + 0.X_3 + 1.X_4 &= 18 \end{aligned}$$

Temel değişkenler (Basic); S_1 ve S_2

Temel olmayan değişkenler (Nonbasic); X_1 ve X_2

$$B.X_B + N.X_N = b$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, X_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_B = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \text{ ve } b = \begin{bmatrix} 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Bu durumda 4'ün 2'li kombinasyonu kadar temel çözüm elde edilir. Değişkenlerden ikisine sıfır değeri atanarak diğer değişkenlerin aldığı değerler bulunur. Aşağıda 6 farklı temel çözümün ne olduğu gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} (X_1, X_2, S_1, S_2)_1 &= (0, 0, S_1, S_2) \\ (X_1, X_2, S_1, S_2)_2 &= (0, X_2, 0, S_2) \\ (X_1, X_2, S_1, S_2)_3 &= (0, X_2, S_1, 0) \\ (X_1, X_2, S_1, S_2)_4 &= (X_1, 0, 0, S_2) \\ (X_1, X_2, S_1, S_2)_5 &= (X_1, 0, S_1, 0) \\ (X_1, X_2, S_1, S_2)_6 &= (X_1, X_2, 0, 0) \end{aligned}$$

10.2. Simpleks Yöntemle Çözüm Aşamaları

Yukarıda matematiksel modeli verilmiş olan doğrusal programlama problemini Simpleks Yöntem ile çözümleyelim.

$$\begin{aligned} Z_{\text{maks}} &= 3X_1 + 2X_2 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 30 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 18 \\ X_1 &\geq 0 ; X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

10.2.1. Modelin Standart Hale Getirilmesi ve Temel Değişkenlerin Belirlenmesi

Çözümün birinci adımında model öncelikle standart hale getirilir. Bu amaç fonksiyonuna her bir kısıt denklemi için bir tane olmak üzere 0 katsayılı " S_i " aylak değişkenleri eklenir. Bu değerlerden her biri kısıt denklemlerine de eklenir. Kısıt denklemleri eşitsizlik yerine eşittir olarak ele alınır.

Tablonun hazırlanmasına geçmeden önce temel değişkenler seçilmelidir. Her eşitlikte bir aylak değişken olması ve eşitliklerin sağ taraflarının pozitif olması bulunan temel çözümün uygun (feasible) olacağını belirtir. Değişken sayısı 4, eşitlik sayısı 2

olduğundan 2 tane değişkeni temel olmayan değişken olarak seçip onlara sıfır değeri atanır. Temel değişkenleri seçerken eşitliklerde katsayısı 1 olanları seçmek kolaylık sağlayacaktır. Bu durumda X_1 ve X_2 sıfır kabul edilerek temel çözüm oluşturulur. Verilen doğrusal programlama modelinde bulunan kısıtlar eşitlik durumuna getirildiğinde problemin standart hali aşağıdaki gibi olur. Standart form oluşturulduğunda, Simpleks Yöntemin ilk tablosu oluşmuş olur.

$$\begin{aligned} Z_{\text{maks}} &= 3.X_1 + 2.X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \\ 2X_1 + 3X_2 + 1.S_1 + 0.S_2 &= 30 \\ 2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 1.S_2 &= 18 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Simpleks metodu her adımda en çok kazanç sağlayacak değişkenin temel değişkenler grubuna katılmasını ve en az getiri sağlayanın temel değişken grubundan ayrılması esasına göre çalışmaktadır.

Tablo 10.1 Birinci Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	3	2	0	0	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	30	2	3	1	0	30/2=15
0	S_2	18	2	1	0	1	18/2=9 ←
Z_j		0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$			-3	-2	0	0	

↑

Bu tabloda C_b amaç fonksiyonunda bulunan temel değişkenlerin katsayılarını, C_j amaç fonksiyonu katsayılarını, Çözüm ise sağ ilk tabloda sağ taraf sabitlerini, optimal tabloda problemin çözümünü, X ve S 'ler ise problemin değişkenlerini, Z amaç fonksiyonunun her aşamada aldığı değeri, $Z_j - C_j$ ise indeks satırını oluşturur. Tablo oluşturulduktan sonra sıra temel değişkenlere girmesi gereken değişkeni seçmeye gelmektedir. Bu işlemi yaparken Z amaç fonksiyonundaki katsayısı en büyük olan değişkeni temel değişken grubuna almak amaçlanır. Bunun için tabloda $Z_j - C_j$ satırına bakılarak katsayısı negatif olan bir değişken aranır. Eğer birden çok negatif katsayılı değişken varsa içlerinden en küçük katsayılı olanı giriş değişkeni olarak seçilir.

Temele girecek değişken belirlendikten sonra, sıra temel değişkenlerden çıkacak değişkeni belirlemeye gelir. Bunu yapmak için de ayrıldığında en az değer azalışına sebep olacak değişken aranır. Tabloyu kullanarak bunu yapmak için çözüm sütunundaki değerleri, giren değişken sütunundaki değerlere bölerek, negatif olmayanlar arasından en

küçük olanı seçilir. Bu bölme işleminde giren değişkenin sütunundaki negatif ve sıfır değerler işleme katılmaz.

10.2.2.Anahtar Sütun Seçimi

Maksimizasyon probleminde, $Z_j - C_j$ satırındaki negatif sayıların en küçüğünün bulunduğu sütun anahtar sütundur. Anahtar sütun seçimi ile temele sokulacak olan değişken belirlenir. Bir başka ifade ile karı en yüksek olan ürün üretime sokulur. Benzer şekilde, minimizasyon problemlerinde $Z_j - C_j$ satırında bulunan pozitif sayıların en büyüğünün bulunduğu sütun anahtar sütun olarak seçilir.

10.2.3.Anahtar Satır Seçimi

Anahtar satır belirlenirken, çözüm değerleri seçilen anahtar satır değerlerine karşılıklı olarak bölünür. Çıkan sayılardan negatif olmayanlar arasından en küçük olanının bulunduğu satır anahtar satır olarak belirlenir.

Simpleks algoritması gereği temele yazılan değişkenlerin sağında ve temel değişkenlerin altında 1, diğer hücre değerleri 0 olur. Yani birim matris oluşur. Tablo 10.1 incelenirse, görülür ki, S_1 ve S_2 temel değişkenlerin sağında ve yine aynı değişkenlerin altında birim matris oluşmuştur. Diğer hücrelerde ise X_1 ve X_2 temel olmayan değişkenlerin katsayıları bulunur.

Anahtar sütun seçimi ile temele sokulacak değişken belirlenip, anahtar satır seçimi ile temelden çıkacak olan değişken belirlendikten sonra sonraki tabloda yine yeni temel değişkenlerin sağında ve yine aynı değişkenlerin altında birim matris oluşumunu sağlamak amacı ile aşağıdaki elementer satır işlemleri yapılarak bir sonraki tablo oluşturulur. Bu aşamada S_2 temele girer, X_1 temel değişkenler arasından çıkarılır.

Anahtar satır ile anahtar sütunun kesişiminde bulunan sayıya **anahtar sayı** denir. Anahtar sayı bir sonraki Simpleks Tablonun oluşturulmasında önemlidir. Temele giren X_1 yeni oluşacak tabloda temel değişkenler arasında, S_2 ise temel olmaktan çıkarılır. Yeni temel değişkenlerin katsayıları birim matris oluşturmamaktadır. Temel değişkenlerin katsayılarını birim matris yapmak amacı ile; Seçilen anahtar satır anahtar sayıya bölünür. Böylece anahtar sayının bulunduğu hücredeki sayı sonraki tabloda 1 olur. Aynı sütunda bulunan diğer elemanlar ise sıfırlanır. Bu işlem için elementer satır işlemlerinden yararlanılır. 2. Denklemden zaten X_2 'nin katsayısı 1 olduğundan, satır doğrudan yazılır. İkinci satır belirlenmiş olur. İlk satır için aşağıdaki elementer satır işlemi yapılır.

$$(2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 1.S_2)/2 = 18/2$$

$$X_1 + (1/2).X_2 + 0.S_1 + (1/2).S_2 = 9 \text{ (İkinci satır yazıldı)}$$

$$-2X_1 - X_2 - 0.S_1 - 1.S_2 = -18$$

$$2X_1 + 3X_2 + 1.S_1 + 0.S_2 = 30$$

$$0.X_1 + 2.X_2 + 1.S_1 - 1.S_2 = 12 \quad (\text{İkinci satır } -2 \text{ ile çarpılıp birinci satır ile toplandı, birinci satır olarak yazıldı})$$

Oluşan yeni Simpleks Tablo aşağıdaki gibi olur.

Tablo 10.2 İkinci Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	3	2	0	0	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	12	0	2	1	-1	12/2=6 ←
3	X_1	9	1	0,5	0	0,5	9/0,5=18
Z_j		27	3	1,5	0	1,5	
$Z_j - C_j$			0	-0,5	0	1,5	

↑

2. tabloda $Z_j - C_j$ satırı incelendiğinde, henüz negatif sayı bulunan hücre olduğundan, benzer işlemler bir kez daha yapılır. Yani anahtar sütun ve anahtar satır işlemleri tekrarlanır. Bir sonraki tabloda, X_2 temele girecek, S_1 değişkeni temel olmaktan çıkacaktır. Anahtar sayı ise seçilen yeni anahtar sütun ile yeni anahtar satır kesişiminde bulunan 2 olacaktır.

Tekrar anahtar sayının bulunduğu satır, anahtar sayıya bölünür. Bu şekilde, temele yeni giren

X_2 'nin sağında ve aynı değişkenin altında 1 oluşur. Sonraki tablonun ilk satırı belirlenmiş olur. X_2 'nin altında bulunan diğer katsayının sıfırlanması için, birinci satır $(-1/4)$ ile çarpılır, ikinci satırla toplanır ve ikinci satıra yazılır. Bu işlemlerle yeni temel değişkenlerin altında birim matris sağlanmış olur.

Tablo 10.3 Optimal Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	3	2	0	0
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2
2	X_2	6	0	1	0,5	-0,5
3	X_1	6	1	0	-0,25	0,75
Z_j		30	3	2	0,25	1,25

$Z_j - C_j$		0	0	0,25	1,25
-------------	--	---	---	------	------

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi, $Z_j - C_j$ satırında negatif sayı bulunan hücre kalmadığından, işlemlere son verilir. Optimal çözüm elde edilmiş olur.

$$X_1 = 6 \text{ (A ürününden 6 tane üretilecek)}$$

$$X_2 = 6 \text{ (B ürününden 6 tane üretilecek)}$$

$$S_1 = 0 \text{ (Birinci kapasite tam kullanılmış olacaktır, atıl kapasite sıfır)}$$

$$S_2 = 0 \text{ (İkinci kapasite tam kullanılmış olacaktır, atıl kapasite sıfır)}$$

Bu durumda, atölyede üretimden (satıştan) elde edilen kar maksimum olacaktır.

$$Z_j = Z_{\text{maks}} = 30$$

Örnek:

$$Z_{\text{maks}} = 50X_1 + 80X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 32$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 84$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Tablo 10.4 Başlangıç Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	50	80	0	0	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	32	1	2	1	0	32/2=16
0	S_2	84	3	4	0	1	84/4=21 ←
Z_j		0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$			-50	-80	0	0	

↑

Tablo 10.5 İkinci Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	50	80	0	0	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	
80	X_2	16	1/2	1	1/2	0	16/0,5=32

0	S_2	20	1	0	-2	1	20/1=20	←
Z_j		1280	40	80	40	0		
$Z_j - C_j$			-10	0	40	0		

↑

Tablo 10.6 Optimal Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	50	80	0	0
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2
80	X_2	6	0	1	3/2	-1/2
50	X_1	20	1	0	-2	1
Z_j		1480	50	80	20	10
$Z_j - C_j$			0	0	20	10

Verilen kısıtlar için grafik yöntemle bulunan köşe nokta çözümleri ise benzer şekilde aşağıdaki gibi olur.

$$P(0,0) = 0,$$

$$P(0,16) = 50.(0) + 80.(16) = 1280,$$

$$P(28,0) = 50(28) + 80(0) = 1400,$$

$$P(20,6) = 50(20) + 80(6) = 1000 + 480 = 1480.$$

$$\text{Böylece, Maks } Z = \text{Maks } P(x,y) = P(20,6) = 1480.$$

Uygulamalar

--

Uygulama Soruları

1) Aşağıda verilen doğrusal probleminin optimum tablosunu simpleks yöntemle elde ediniz. Sadece optimal tabloyu yazınız.

$$Z_{enb} = 6X_1 + 8X_2$$

$$3X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Çözüm:

			6	8	0	0
C _j	Temel Değişken	Değer	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂
6	X ₁	4/5	1	0	2/5	-1/5
8	X ₂	8/5	0	1	-1/5	3/5
	Z _j	88/5	6	8	4/5	18/5
	C _j -Z _j		0	0	-4/5	-18/5

2) Doğrusal Programlama modelini Simpleks Yöntem ile çözümleyelim.

$$Z_{\max} = 4X_1 + X_2 + 3X_3 + 5X_4$$

$$3X_1 + X_2 + X_3 + 6X_4 \leq 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 12$$

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 8X_4 \leq 30$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Çözüm:

Çözümün birinci adımında soru öncelikle standart hale getirilir. Bu Amaç Fonksiyonuna her bir kısıt denklemini için bir tane olmak üzere 0 katsayılı “S_i” aylak değişkenleri eklenir. Bu değerlerden her biri kısıt denklemlerine de eklenir. Kısıt denklemleri eşitsizlik yerine eşittir olarak ele alınır.

$$Z_{\max} = 4X_1 + X_2 + 3X_3 + 5X_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$3X_1 + X_2 + X_3 + 6X_4 + S_1 = 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + S_2 = 12$$

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 8X_4 + S_3 = 30$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Tablo 10.7 Örnek problemin başlangıç tablosu

Amaç Katsayısı	Temel	C _j	4	1	3	5	0	0	0
		Çözüm	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	S ₁	S ₂	S ₃
0	S ₁	20*	3	1	1	6**	1	0	0
0	S ₂	12	1	1	1	1	0	1	0
0	S ₃	30	2	1	4	8	0	0	1

Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		-4	-1	-3	-5*	0	0	0

C_j satırına yazılan değerler amaç fonksiyonuna bağlı değişkenlerin katsayıları iken; S_1 , S_2 ve S_3 bulunduğu satırlarda yer alan sayılar ise her bir aylak değişkenin, yer aldığı denklemdeki kısıtların katsayılarını içermektedir. Z_j satırın, henüz sorunun ilk Simpleks tablosu olduğu ve üretime başlanmadığı ve kapasitelerin boş kabul edildiğini ifade etmektedir. Tablo oluşturulup $Z_j - C_j$ satırı hesaplandıktan sonra anahtar sütun tespiti yapılır. Bu satırdaki sonuçlar içinde en küçük negatif değer 5'tir. Bu değer bulduğu sütun anahtar sütun olarak alınır. Soru maksimizasyon sorusu olduğu için en büyük pozitif değer alınmıştır. Eğer minimizasyon sorusu söz konusu olsaydı sonuçlar içerisindeki en büyük pozitif değer bulduğu sütun anahtar sütun olarak tanımlanacaktır. Anahtar sütun üzerindeki " $Z_j - C_j$ " değeri (5) sütunda, kısıt denklemlerine ait katsayıların tümüne bölünür ve en küçük değer bulduğu hücredeki eleman (6) anahtar eleman; bulunduğu satır da anahtar satır seçilir.

İkinci aşamanın ilk adımında, oluşturulacak tabloda anahtar satır olarak tespit edilen "Temel" sütunundaki S_1 yerine; anahtar sütun olarak tespit edilen " X_4 " yazılır. İlk tabloda anahtar satır üzerindeki tüm değerler, anahtar elemana bölünür; elde edilen sonuçlar ikinci tabloda X_4 satırındaki değerler olarak yazılır.

Tablo 10.8 Örnek problemin ikinci tablosu

Amaç Katsayısı	Temel	C_j	4	1	3	5	0	0	0
		X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3
5	X_4	20/6	1/2	1/6	1/6	1	1/6	0	0
0	S_2	26/3	1/2	5/6	5/6	0	-1/6	1	0
0	S_3	10/3*	-2	-1/3	8/3**	0	-4/3	0	1
Z_j		50/3	5/2	5/6	5/6	5	5/6	0	0
$Z_j - C_j$			-3/2	-1/6	-13/6*	0	5/6	0	0

İkinci aşamanın ilk adımı ile sarı ile gösterilen satır yazılmıştır. S_2 ve S_3 satırlarına ait X_i kısıtlarının katsayıları; birinci tabloda bu satırlarda bulunan katsayı değerlerinin, ikinci tablonun ilk adımında (sarı renkli satır) belirlenen katsayılardan aynı hizadakilerin birbirlerinden çıkarılması ile elde edilmiştir. Her "Temel" satır için katsayılar belirlendiğinde Z_j satırı ve $Z_j - C_j$ satırı tekrar hesaplanarak, birinci tabloda olduğu gibi sırasıyla anahtar sütun; anahtar eleman ve satır belirlenir. Önceki adımlarda yapılan tüm işlemler optimum Simpleks tablo elde edilinceye (optimum çözüm bulununcaya) kadar sürdürülür.

Bu süreç $Z_j - C_j$ satırındaki tüm değerler 0 veya pozitif olana kadar devam edilir. Bu koşul maksimizasyon problemi için geçerlidir. Minimizasyon problemlerinde ise $Z_j - C_j$ satırı 0 ve negatif değerler elde edilene kadar Simpleks tablosu oluşturulmaya devam edilir. Bazı kaynaklarda $Z_j - C_j$ yerine $C_j - Z_j$ biçiminde görülebilir.

Örnek soru 4. Simpleks Tablosu (aşağıda) yapıldığında $Z_j - C_j$ satır değerleri 0 ve daha küçük olduğu için çözüme ulaşıldığı kabul edilir.

Tablo 10.7 Örnek problemin optimum tablosu

Amaç Katsayısı	Temel	C_j	4	1	3	5	0	0	0	0
		Çözüm	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3
4	X_4	5	1	3/10	0	8/5	2/5	0	0	-1/10
0	S_2	2	0	3/5	0	-9/5	-1/5	1	0	-1/5
3	X_3	5	0	5/10	1	12/10	- 2/10	0	1	3/10
Z_j		35	5	3/2	3	10	1	0		1/2
$Z_j - C_j$		0	1	1/2	0	5	1	0		1/2

Buna göre; $X_4 = 5$, $X_3 = 5$, $S_2 = 2$ birim üretilerek amaç fonksiyonu (Z_{maks}) en büyük değeri olan 35 birime ulaşacaktır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, Doğrusal Programlama modelinin Simpleks Yöntemle Çözümü, varsayımları, çözüm aşamaları gösterilmiştir. Örnek olarak bir model maksimizasyon problemi Simpleks Yöntem aşamaları kullanılarak çözülmüştür.

Bölüm Soruları

1) Sandalye ve koltuk imalatı yapan bir mobilyacı üretim için tahta ve boya kullanmaktadır. Bir sandalye üretimi için 3 m³ tahta ve 1 kg boya kullanılırken, 1 koltuk için ise 4 m³ tahta ve 1 kg boya gerekmektedir. Çeşitli nedenlerden dolayı mobilyacının sağlayabildiği tahta miktarı günlük 92 m³ ve boya miktarı da 20 kg ile sınırlıdır. Ürettiği sandalyelerin her biri mobilyacıya 300 TL, koltukların her biri ise 400 TL kar bırakmaktadır. Bu bilgiler ışığında mobilyacının amacı mümkün olan en yüksek karı sağlayacak üretim bileşimini seçmektir. Buna göre soruya ait doğrusal programlama modelinin amaç fonksiyonu hangisidir?

a) $Z_{\max} = 275X_1 + 300X_2$

b) $Z_{\max} = 92X_1 + 20X_2$

c) $Z_{\max} = 300X_1 + 400X_2$

d) $Z_{\max} = 92X_1 + 300X_2$

e) $Z_{\max} = 300X_1 + 20X_2$

2) SUHA işletmesi A ve B markalarında iki tip buzdolabı üretmektedir. Her bir A marka buzdolabının üretimi için 5 entegre ve 3 dijital ekran ve B marka buzdolabı için de 2 entegre ve 4 dijital ekran kullanılmaktadır. Kullanılabilir entegre miktarı 1200 adet ve dijital ekran ise 800 adettir. Üretilen her bir A buzdolabının net karı 500 TL ve her bir B buzdolabının net karı 300 TL'dir. Buna göre kar maksimizasyonu problemine ilişkin doğrusal programlama modeli aşağıdakilerden hangisidir?

a) $Z_{\max} = 500X_1 + 300X_2$
 $5X_1 + 2X_2 \leq 1200$
 $3X_1 + 4X_2 \leq 800$
 $X_1; X_2 \geq 0$

b) $Z_{\max} = 500X_1 + 300X_2$
 $5X_1 + 3X_2 \leq 1200$
 $2X_1 + 4X_2 \leq 800$
 $X_1; X_2 \geq 0$

c) $Z_{\max} = 1200X_1 + 800X_2$
 $5X_1 + 3X_2 \leq 1200$
 $2X_1 + 4X_2 \leq 800$
 $X_1; X_2 \geq 0$

d) $Z_{\max} = 1200X_1 + 800X_2$
 $5X_1 + 3X_2 \leq 1200$
 $2X_1 + 4X_2 \leq 800$
 $X_1; X_2 \geq 0$

e) $Z_{\max} = 1200X_1 + 800X_2$
 $5X_1 + 3X_2 \leq 600$
 $2X_1 + 4X_2 \leq 400$
 $X_1; X_2 \geq 0$

3) Maksimizasyon problemi için optimallik koşulu ne zaman gerçekleşir?

a) $Z_j \leq 0$ olduğunda

b) $Z_j \geq 0$ olduğunda

c) $Z_j - C_j \leq 0$ olduğunda

d) $Z_j - C_j \geq 0$ olduğunda

e) $Z_j - C_j = 0$ olduğunda

4) Küçük eşittir ($a_{ij}X_j \leq b_i$) biçiminde verilen bir kısıtı eşitlik durumuna getirmek için eklenen değişkene ne ad verilir?

- a) Artık değişken
- b) Aylak değişken
- c) Yapay değişken
- d) Eşitlik değişkeni
- e) Sanal Değişken

5) Büyük eşittir biçiminde ($a_{ij}X_j \geq b_i$) verilen bir kısıtı eşitlik biçimine dönüştürmede bir değişken çıkarılır. Bu değişkene hangi ad verilir?

- a) Yapay değişken
- b) Aylak değişken
- c) Artık değişken
- d) Eşitlik değişkeni
- e) Sanal Değişken

6) Eşitlik biçiminde ($a_{ij}X_j = b_i$) verilen bir kısıtı kanonik formdan standart forma geçirirken Simpleks algoritmasını yürütebilmek amacı ile +1 katsayılı bir değişken eklenir. Bu değişkenin adı nedir?

- a) Yapay değişken
- b) Aylak değişken
- c) Artık değişken
- d) Eşitlik değişkeni
- e) Sanal Değişken

7) $3x + 4y + 2z \leq 48$ şeklinde verilen bir kısıtı eşitlik haline getirmek için aşağıdakilerden hangisi yapılmalıdır?

- a) Eşitsizliğin sol tarafına yapay değişken (u_{n+1}) eklenir.
- b) Eşitsizliğin sol tarafına dual değişken (y_{n+1}) eklenir.
- c) Eşitsizliğin sol tarafından yapay değişken (u_{n+1}) çıkarılır.
- d) Eşitsizliğin sol tarafından artık değişken (s_{n+1}) çıkarılır.
- e) Eşitsizliğin sol tarafına aylak değişken (s_{n+1}) eklenir.

8) $30x + 20y + 15z \geq 60$ kısıtı hangisinde doğru değişken eklenerek veya çıkarılarak simpleks algoritmasına uygun eşitlik haline getirilmiştir?

- a) $30x + 20y + 15z = 60$

- b) $30x + 20y + 15z - s = 60$
- c) $30x + 20y + 15z - s + u = 60$
- d) $30x + 20y + 15z + s = 60$
- e) $30x + 20y + 15z + u = 60$

9) En büyükleme (Maksimizasyon) amaçlı bir doğrusal programlama probleminde temele girecek (çözüme girecek) değişken nasıl belirlenir?

- a) $Z_j - C_j$ satırında bulunan negatif elamanlardan mutlak değerce en büyük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- b) $Z_j - C_j$ satırında bulunan pozitif değerlerden en büyük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- c) $Z_j - C_j$ satırında bulunan pozitif değerlerden en küçük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- d) $Z_j - C_j$ satırında bulunan negatif olan değerlerden mutlak değerce en küçük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- e) Hangi değişkenin seçileceği bilinmez.

10) Aşağıda verilen doğrusal programlama modelinin başlangıç uygun çözümünde bulunan temel (basic) değişken ikilisi hangisinde doğru verilmiştir?

$$\begin{aligned}
 Z_{max} &= 40X_1 + 50X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \\
 X_1 + 2X_2 + 1.S_1 + 0.S_2 &= 40 \\
 4X_1 + 3X_2 + 0.S_1 + 1.S_2 &= 120 \\
 X_1, X_2, S_1, S_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) (X_1, X_2)
- b) (X_1, S_1)
- c) (X_2, S_1)
- d) (X_2, S_2)
- e) (S_1, S_2)

Cevaplar:

- 1) c, 2) a, 3) d, 4) b, 5) c, 6) a, 7) e, 8) c, 9) a, 10) e

11. SİMPLEKS YÖNTEM (MİNİMİZASYON PROBLEMİ)

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

11.1. Minimizasyon Probleminin Simpleks Yöntemle Çözümü

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Simpleks yöntem çözüm aşamalarını araştırınız.
 - 2)** Simpleks yöntemin temelinde bulunan temel çözümleri inceleyiniz.
-
- 1) Simpleks yöntem çözüm aşamalarını araştırınız.
 - 2) Minimizasyon problemi çözüm aşamalarının farkı nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Simpleks Yöntemde minimizasyon problemi çözmek	Simpleks Yöntem kullanarak minimizasyon problemini çözebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Simpleks Yöntem Aşamaları	Simpleks Yöntem Aşamaları	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Simpleks Yöntem Minimizasyon Problemi
--

Giriş

Doğrusal Programlama modelinde bulunan kısıtlar " $\leq$ " yerine " $\geq$ " olduğunda, standart formata geçirildiğinde, kısıtlara eklenecek değişkenlerin katsayıları " -1 " olur ve eşitliklerin sağ tarafının pozitif olması şartı sebebiyle temel değişkenlerin seçiminde eklenen değişkenler kullanılamaz. Bu durumda bu problemin Simpleks Yöntemle çözümü, sisteme yeni yapay değişkenler eklenerek oluşturulabilir. Yapay değişkenlerin çözüme etki etmemesi için, çözümde bu değişkenlerin 0 olmasının sağlanması gerekmektedir. Bunu yapmak için amaç fonksiyonuna " M " olarak göstereceğimiz çok büyük bir katsayı ile eklenir ve optimum çözümde sistemin bu değişkenleri 0 yapması sağlanır.

11.1. Minimizasyon Probleminin Simpleks Yöntemle Çözümü

Doğrusal Programlama modelinde bulunan kısıtlar “ $\leq$ ” yerine “ $\geq$ ” olduğunda, standart formata geçirildiğinde, kısıtlara eklenecek değişkenlerin katsayıları “ -1 ” olur ve eşitliklerin sağ tarafının pozitif olması şartı sebebiyle temel değişkenlerin seçiminde eklenen değişkenler kullanılamaz. Bu durumda bu problemin Simpleks Yöntemle çözümü, sisteme yeni yapay değişkenler eklenerek oluşturulabilir. Yapay değişkenlerin çözüme etki etmemesi için, çözümde bu değişkenlerin 0 olmasının sağlanması gerekmektedir. Bunu yapmak için amaç fonksiyonuna “ M ” olarak göstereceğimiz çok büyük bir katsayı ile eklenir ve optimum çözümde sistemin bu değişkenleri 0 yapması sağlanır. Aşağıdaki örnek üzerinde bütün adımlar anlatılacaktır.

11.1.1. Doğrusal Programlama Modelinin Kanonik Formdan Standart Forma Dönüşümü

1. “ $\leq$ ” biçiminde verilmiş ise; model standart forma geçirilirken, verilen kısıtın sol tarafına S_1 gibi bir aylak değişken (slack variable) eklenir. Bu eklenen değişken verilen kısıt için kullanılmayan atıl kapasiteyi göstermektedir.

Örnek: Kanonik biçimde verilmiş olan doğrusal programlama modelinin herhangi bir kısıtı aşağıdaki gibi “ $\leq$ ” biçiminde verilmiş ise; bu kısıtı eşitlik halinde yazabilmek için (standart formda yazma) verilen kısıta bir aylak değişken (S_1) eklenir.

$$X_1 + 2X_2 \leq 5 \text{ (Kanonik form) (Hammadde kısıtı)}$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 5 \text{ (Standart form) (Hammadde kısıtı)}$$

S_1 : Aylak değişken, kullanılmayan (atıl) hammadde miktarını gösterir.

2. “ $\geq$ ” biçiminde verilmiş ise; model standart forma geçirilirken, verilen kısıtın sol tarafına $S_1, S_2, S_3 \dots$ gibi bir aylak değişken çıkarılır, $u_1, u_2, u_3 \dots$ gibi bir yapay değişken eklenir. Bu eklenen değişkenin birincisi büyük olan kısmı azaltıp eşitlik haline getirmek için, ikinci eklenen yapay değişken ise Simpleks altyapısı algoritmayı yürütebilmek içindir.

Örnek: Kanonik biçimde verilmiş olan doğrusal programlama modelinin herhangi bir kısıtı aşağıdaki gibi “ $\geq$ ” biçiminde verilmiş ise; bu kısıtı eşitlik halinde yazabilmek için (standart formda yazma) verilen kısıttan ($S_1, S_2, S_3 \dots$) gibi bir artık değişken çıkarılarak eşitlik haline getirilmiş olur. Ancak eklenen değişkenin katsayısı -1 olduğundan (Simpleks yöntem gereği eklenen değişkenlerin $+1$ katsayılı olması gereğinden) ikinci bir değişken daha eklenir. Bu da üretimde anlamı olmayan yapay bir değişkendir. (u_1)

$$3X_1 + 4X_2 \geq 12 \text{ (Kanonik form)}$$

$$3X_1 + 4X_2 - S_1 + u_1 = 12 \text{ (Standart form)}$$

S_1 : Artık değişken, eşitliği sağlamak amacı ile çıkarıldı, yani (-1) katsayı ile standart forma getirildi. u_1 değişkeni ise yapay bir değişken olarak eklendi.

3. “=” biçiminde verilmiş ise; model standart forma geçirilirken, verilen kısıtın sol tarafına $u_1, u_2, u_3 \dots$ gibi bir yapay değişken eklenir. Bu değişken Simpleks yöntem gereği eklenen (birim matris oluşturabilmek için, değişkenlerin $+1$ katsayılı olması gereğinden) eklenir. Bu da üretimde anlamı olmayan yapay bir değişkendir.

Örnek: Kanonik biçimde verilmiş olan doğrusal programlama modelinin herhangi bir kısıtı aşağıdaki gibi “=” biçiminde verilmiş ise; bu kısıtı doğrudan eşitlik olduğu için sadece (Simpleks yöntem gereği eklenen değişkenlerin $+1$ katsayılı olması gereğinden) bir değişken daha eklenir. Bu da üretimde anlamı olmayan yapay bir değişkendir. ($u_1, u_2, u_3 \dots$)

$$5X_1 + 2X_2 = 15 \text{ (Kanonik form)}$$

$$5X_1 + 2X_2 + u_1 = 15 \text{ (Standart form)}$$

u_1 : Eklenen bu değişken ise yapay bir değişkendir. Sadece Simpleks algoritmasını matematiksel olarak yürütebilmek için eklenir.

Örnek: Aşağıda verilen doğrusal programlama minimizasyon problemini Simpleks Yöntem kullanarak çözünüz.

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= 2X_1 + X_2 \\ 3X_1 + X_2 &= 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + X_2 &\leq 4 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Çözüm:

Amaç Fonksiyonu,

$$Z_{\min} = 2X_1 + X_2$$

Kısıtlamalar:

$3X_1 + X_2 = 3$ (“=” kısıtı olduğu için u_1 yapay değişkeni eklenir.)

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$ (“ $\geq$ ” durumunda, S_1 artık değişkeni çıkarıldı, u_2 yapay değişkeni eklenir)

$X_1 + X_2 \leq 4$ (“ $\leq$ ” kısıtı olduğu için sadece S_2 aylak değişkeni eklenir)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Kanonik formda verilmiş olan problem ilk olarak standart formda (eşitlik kısıtları) yazılır. Eşitlik haline getirebilmek için önceki bölümde de anlatıldığı gibi yapılır. Bu dönüştürme sırasında verilen kısıt $a_{ij}X_i \leq b_j$ biçiminde ise, yani eşitsizlik $\leq$ ise, bu durumda sol taraf daha küçük veya en fazla eşit olduğu için s_{n+1} gibi bir değişken eklenir. Eğer verilen kısıt $a_{ij}X_i \geq b_j$ biçiminde bir eşitsizlik ise bu defa eşitliği sağlamak amacı ile sol taraftan bir s_{n+1} gibi bir değişken çıkarılır. +1 katsayılı değişken bulunmayacağından, eşitlik halinde verilmiş olan denklemlere de u_{n+1} yapay değişkeni eklenir. Eklenen değişkenin üretimde bir anlamı yoktur. O nedenle optimum çözümde, bu eklenen yapay değişkenlerin temel değişken listesinden çıkmış olması gerekir. Bunu yapabilmek için düşünülebilen en büyük pozitif bir sayı olan M ile çarpılarak amaç fonksiyonuna konur. Bu sayede, amaç fonksiyonu u değişkenlerinin sıfır olmaması durumunda çok büyüyecektir. Ancak Simpleks Yöntem algoritması, problemin optimum çözümü var ise, bu yapay değişkenleri temel olmaktan çıkaracak ve sıfır değeri atanan temel olmayan değişkenler arasına sokacaktır. (Maksimizasyon problemlerinde ise $-M$ katsayıları ile çarpılarak amaç fonksiyonuna konur.) Problem standart forma getirildiğinde aşağıdaki gibi olur.

Amaç Fonksiyonu:

$$Z_{\min} = 2X_1 + X_2 - 0.S_1 + 0.S_2 + M.u_1 + M.u_2$$

Kısıtlar:

$$3X_1 + X_2 + u_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_1 + u_2 = 6$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, u_1, S_1, u_2, S_2 \geq 0$$

Standart formun doğru oluşturulmasıyla, başlangıç Simpleks Tablo oluşmuş olur.

Tablo 11.1 Başlangıç Simpleks Tablo

C_B	Temel	C_j	2	1	0	0	M	M	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	u_2	
M	u_1	3	3	1	0	0	1	0	3/3 ←
M	u_2	6	4	3	-1	0	0	1	6/4
0	S_2	4	1	1	0	1	0	0	4/1
Z_j		$9M$	$7M$	$4M$	$-M$	0	M	M	
$Z_j - C_j$			$7M - 2$	$4M - 1$	$-M$	0	0	0	

↑

Anahtar sütun seçilirken $Z_j - C_j$ satırında, en büyük sayının olduğu $(7M - 2)$ sütun, anahtar satır ise en küçük negatif olmayan oran sahip $(3/3)$ satırı anahtar satır olarak seçilir. Dolayısıyla X_1 temel değişken olacak, u_1 , temel değişken listesinden çıkacaktır. Anahtar sütun ile anahtar satır kesişiminde bulunan 3 sayısı anahtar sayıdır.

Temelde bulunan u_1 , yerine X_1 yazılır. Anahtar satır anahtar sayı olan 3'e bölünür. İkinci satır yazılır. Anahtar sayının bulunduğu hücre yeni oluşturulan tabloda 1 olur. Anahtar sayının altında ve üstünde kalan 1 ve 3 sayılarını, birim matris benzetme adına sıfır yapmak amacı ile elementer satır işlemleri uygulanır. Simpleks Yöntem adımları uygulandığında, elementer satır işlemleri sonucunda ikinci Simpleks tablo aşağıdaki gibi olur.

Tablo 11.2 İkinci Simpleks Tablo

C_B	Temel	C_j	2	1	0	0	M	M		
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	u_2	Oran	
2	X_1	1	1	1/3	0	0	1/3	0	3	
M	u_2	2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	6/5	←
0	S_2	3	0	2/3	0	1	-1/3	0	9/2	
Z_j	$2M + 2$	2	$\frac{5M}{3} + 2/3$	$-M$	0	$-\frac{4M}{3} + 2/3$	M			
$Z_j - C_j$		0	$\frac{5M}{3} - 1/3$	$-M$	0	$-\frac{7M}{3} + 2/3$	0			

↑

edilmesi gereken bir diğer olay da problemin en küçükleme problemi olduğudur. Bu durumda anahtar sütun seçimi yapılırken, pozitifler arasında en büyük sayının bulunduğu sütun giriş değişkeni seçilirken en küçük olan değil, en büyük katsayısı olan seçilecektir. Problem $Z_j - C_j$ satırında hiç pozitif katsayı kalmayınca duracaktır.

Benzer adımlar ikinci tablo sonrasında da yapılırsa, bir sonraki tabloda optimum çözüme ulaşıldığı görülür. Bu şekilde M metodunu kullanarak problem çözülmüş olur.

Tablo 11.2 Optimal Simpleks Tablo

C_B	Temel	C_j	2	1	0	0	M	M
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	u_2
2	X_1	0,6	1	0	0,2	0	0,6	-0,2

1	X_2	1,2	0	1	-0,6	0	-0,8	0,6
0	S_2	2,2	0	0	0,4	1	0,2	-0,4
Z_j		2,4	2	1	-0,2	0	0,4	0,2
$Z_j - C_j$			0	0	-0,2	0	$0,4 - M$	$0,2 - M$

Optimum Simpleks Tablodan, Çözüm değerleri okunur.

Temel Değişkenler,

$$X_1 = 0,6$$

$$X_2 = 1,2$$

$$S_2 = 2,2$$

Temel olmayan değişkenler zaten sıfır idi. (Simpleks Yöntem Algoritmasının altyapısında bulunan temel çözüm mantığı gereği)

$$S_1 = 0$$

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

Bu durumda minimum maliyet

$$Z \min = 2,4$$

olur. Çözüm değerleri incelenirse, $u_1 = 0$ ve $u_2 = 0$ yapay değişkenleri konu içerisinde de anlatıldığı gibi üretimce anlamı olmayan değişkenlerdi. Sıfır çıkmaları durumunda ancak problemin çözümüne ulaşılabilirdi. İşte bu problemin optimum çözümünde bu değişkenler sıfırlanmış oldu ve M değerlerinden optimum tabloda (son tabloda) kurtulmuş olundu.

Minimizasyon problemlerini bir diğer şekilde, maksimizasyon problemine benzeterek çözmektir. Verilen minimizasyon probleminde amaç fonksiyon katsayılarını -1 ile çarparak, bütün adımlarda maksimizasyon problemi adımları uygulanır ve son tablodan problem çözüm değerleri okunur.

Uygulamalar

1) Aşağıda verilen problemi Simpleks Yöntem kullanarak çözünüz

$$Z_{\min} = 30X_1 + 18X_2$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 3$$

$$3X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$$

Verilen doğrusal programlama modelinde bulunan kısıtlar eşitlik durumuna getirildiğinde;

$$Z_{\min} = 30.X_1 + 18.X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + M.u_1 + M.u_2$$

$$2X_1 + 2X_2 - 1.S_1 + 0.S_2 + 1.u_1 + 0.u_2 = 3$$

$$3X_1 + X_2 + 0.S_1 - 1.S_2 + 0.u_1 + 1.u_2 = 2$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, u_1, u_2 \geq 0$$

C_b	Temel Değişken	C_j	30	18	0	0	M	M	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	u_2	
M	u_1	3	2	2	-1	0	1	0	3/2
M	u_2	2	3	1	0	-1	0	1	2/3
Z_j		$5M$	$5M$	$3M$	$-M$	$-M$	M	M	
$Z_j - C_j$			$5M - 30$	$3M - 18$	$-M$	$-M$	M	M	

↑

C_b	Temel Değişken	C_j	30	18	0	0	M	M	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	u_2	
M	u_1	5/3	0	4/3	-1	-2/3	1	-2/3	
18	X_1	2/3	1	1/3	0	-1/3	0	1/3	
Z_j		$5/3M + 12$	18	$4M/3 + 6$	$-M$	$-M$	M	M	
$Z_j - C_j$			0	$4M/3$	$-M$	$-2M/3$	0	0	

↑

Optimum simpleks tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	30	18	0	0	M	M	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	u_2	
M	u_1	3	2	2	-1	0	1	0	3/2
M	u_2	2	3	1	0	-1	0	1	2/3
Z_j		$5M$	$5M$	$3M$	$-M$	$-M$	M	M	
$Z_j - C_j$			$5M - 30$	$3M - 18$	$-M$	$-M$	M	M	
			↑						

2) Aşağıda verilen doğrusal programlama modelinin standart forma getiriniz. Başlangıç Simpleks tabloyu oluşturunuz. Anahtar sütunu ve anahtar satırı belirleyiniz. Anahtar elemanı bulunuz.

Çözüm:

a) $Z = 2X_1 - X_2$ fonksiyonunu

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Kısıtları doğrultusunda *minimize* ediniz.

Çözüm:

Önce kısıtları eşitlik durumuna getirelim:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 8$$

$$5X_1 + 3X_2 - S_2 + u_1 = 30$$

Eklenen değişkenlerle birlikte amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{\min} = 2X_1 - X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + M.u_1$$

Eklenen değişkenlerle birlikte negatif olmama koşulu:

$$X_1, X_2, S_1, S_2, u_1 \geq 0$$

Başlangıç simpleks tablo:

C_b	Temel Değişken	C_j	2	-1	0	0	M	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1	
0	S_1	8	1	1	1	0	0	8/1
M	u_1	30	5	3	0	-1	1	30/5
Z_j		$30M$	$5M$	$3M$	0	$-M$	M	
$Z_j - C_j$			$5M - 2$	$3M + 1$	0	$-M$	0	

Anahtar satır Oran sütununda (30/5)'in bulunduğu satır.

Anahtar sütun $Z_j - C_j$ satırında en büyük pozitif sayının bulunduğu sütun anahtar sütundur.

($5M - 2$)

Anahtar eleman ise, anahtar sütun ile anahtar satırın kesişimindeki eleman (5) değerinin bulunduğu hücre.

Çözüm:

a) $Z = 3X_1 + 2X_2$ fonksiyonunu

$$3X_1 + X_2 = 12$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Kısıtları doğrultusunda *minimize* ediniz.

Çözüm:

Önce kısıtları eşitlik durumuna getirelim:

İlk kısıt zaten eşitlik olduğu için sadece yapay değişken eklenir. İkinci kısıt büyük eşit ($\geq$) olduğundan bir artık değişken çıkarılır ve bir de yapay değişken eklenir.

$$3X_1 + X_2 + u_1 = 12$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + u_2 = 30$$

Eklenen değişkenlerle birlikte amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{\min} = 3X_1 + 2X_2 + M.u_1 + 0.S_2 + M.u_2$$

Eklenen değişkenlerle birlikte negatif olmama koşulu:

$$X_1, X_2, S_1, u_1, u_2 \geq 0$$

Başlangıç simpleks tablo:

C_b	Temel Değişken	C_j	3	2	M	0	M	Oran
		Çözüm	X_1	X_2	u_1	S_1	u_2	
M	u_1	12	3	1	1	0	0	12/3
M	u_1	30	4	3	0	-1	1	30/4
Z_j		$42M$	$7M$	$4M$	M	$-M$	M	
$Z_j - C_j$			$7M - 3$	$4M - 2$	0	$-M$	0	

↑

Anahtar satır; Oran sütununda (12/3)'in bulunduğu satır. Negatif olmayan oranların en küçüğünün bulunduğu satır.

Anahtar sütun $Z_j - C_j$ satırında en büyük pozitif sayının bulunduğu sütun anahtar sütundur.
($7M - 3$)

Anahtar eleman ise, anahtar sütun ile anahtar satırın kesişimindeki eleman (3) değerinin bulunduğu hücre.

Uygulama Soruları

Anahtar sütun hangi durumda hangisi olur.

Anahtar satır nasıl bulunur.

Anahtar eleman ne işe yarar

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, Doğrusal Programlama modelinin Simpleks Yöntemle Çözümü, varsayımları, çözüm aşamaları gösterilmiştir. Simpleks Yöntem yardımı ile minimizasyon probleminin çözümü anlatılmıştır.

Bölüm Soruları

1) En küçükleme (Minimizasyon) amaçlı bir doğrusal programlama probleminde temele girecek (çözüme girecek) değişken nasıl belirlenir?

- a) $Z_j - C_j$ satırında bulunan negatif değerlerden mutlak değerce en büyük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- b) $Z_j - C_j$ satırında bulunan pozitif değerlerden en büyük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- c) $Z_j - C_j$ satırında bulunan pozitif değerlerden en küçük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir
- d) $Z_j - C_j$ satırında bulunan negatif olan değerlerden mutlak değerce en küçük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- e) Hangi değişkenin seçileceği bilinmez.

2) Doğrusal programlama probleminin Simpleks Yöntemle çözümü yapılırken temelden çıkacak değişken (nonbasic variable) nasıl belirlenir?

- a) X_B değerleri seçilen anahtar sütundaki değerlere karşılıklı bölünür. Bu değerler arasından negatif olmayan en büyük elemanın bulunduğu satırdaki değişken temelden çıkarılır.
- b) $Z_j - C_j$ satırında bulunan pozitif değerlerden en büyük değerin bulunduğu sütundaki değişken seçilir.
- c) X_B değerleri seçilen anahtar sütundaki değerlere karşılıklı bölünür. Bu değerler arasından negatif olmayan en küçük elemanın bulunduğu satırdaki değişken temelden çıkarılır.
- d) Temelden çıkacak değişken rasgele seçilir.
- e) Hangi değişkenin temel değişken olacağı bilinmez.

(3-8. Soruları aşağıda standart formda verilen doğrusal programlama problemi ve bu probleme ait Optimal Simpleks Tablo kullanılarak çözülecektir.)

$$\begin{aligned} Z_{min} &= 30.X_1 + 45.X_2 + \boxed{}.S_1 + \otimes.S_2 + \triangle.u_1 \\ 10X_1 + 12X_2 + S_1 &= 240 \\ 6X_1 + 9X_2 - S_2 + u_1 &= 162 \\ X_1, X_2, S_1, S_2, u_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimal Simpleks Tablo		C_j	30	45	$\boxtimes$	$\otimes$	Δ
C_B	Temel	Çözüm	X_1	X_2	S_1	S_2	u_1
$\boxtimes$	S_1	24	2	0	1	$4/3$	$-4/3$
45	X_2	18	$2/3$	1	0	$-1/9$	$1/9$
	$Z_j = Z_{min}$	A					
	$Z_j - C_j$		0	0	0	-5	$5 - M$

3) Verilen problemin başlangıç tablosunda yer alacak temel değişkenler ve çözüm değerleri aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru verilmektedir.

- a) $X_1 = 24, u_1 = 162$
- b) $X_1 = 24, X_2 = 18$
- c) $S_1 = 240, S_2 = -162$
- d) $S_1 = 240, u_1 = 162$
- e) $X_2 = 20, S_2 = 162$

4) Verilen problemin amaç fonksiyonunda artık ve yapay değişkenlerin alması gereken katsayılar $\boxtimes$, $\otimes$ ve Δ sırasıyla aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru verilmektedir.

- a) 0, 0 ve $-M$
- b) 0, 0 ve M
- c) $-1, -1$ ve M
- d) 1, 1 ve M
- e) $M, -M$ ve M

5) A ile gösterilen optimal Z_{min} değeri aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru olarak verilmektedir.

- a) 834 b) 810 c) 42 d) 24 e) 18

6) Optimal tabloya göre, probleme ait çözüm takımı aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru olarak verilmektedir.

- a) $X_1 = 24, X_2 = 45$
- b) $X_1 = 24, X_2 = 18$
- c) $X_1 = 0, X_2 = 24$
- d) $X_1 = 0, X_2 = 18$
- e) $X_1 = 18, X_2 = 18$

7) Optimal tabloda yer alan S_1 değişkeninin aldığı değer ve bu değer yorumu aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru verilmektedir.

- a) $S_1 = 24$, 1. kısıta ilişkin kullanılmayan kapasite 24 birimdir.
- b) $S_1 = 24$, 1. kısıta ait kullanılmayan miktar 18 birimdir.
- c) $S_1 = 24$, 1. kısıtın yalnızca 24 birimi kullanılmıştır.
- d) $S_1 = 18$, 1. kısıtın yalnızca 24 birimi kullanılmıştır.
- e) $S_1 = 240$, 1. kısıt kullanılmamıştır.

8) Verilen primal probleme ait dual modelin çözüm değerleri (gölge fiyatlar) aşağıdaki şıklardan hangisinde doğru olarak verilmektedir.

- a) $Y_1 = 0$ ve $Y_2 = -5$
- b) $Y_1 = 10$ ve $Y_2 = 5$
- c) $Y_1 = 24$ ve $Y_2 = 18$
- d) $Y_1 = 0$ ve $Y_2 = 5$
- e) $Y_1 = 5$ ve $Y_2 = 0$

9) Bir doğrusal programlama probleminin optimal çözümünde, herhangi bir kısıta ilişkin aylak değişken sıfırdan büyük bir değer almış ise, bu kapasite;

- a) Tam kullanılmıştır.
- b) Böyle bir durumla karşılaşılmaz.
- c) Tam kullanılmamıştır, atıl kapasite bulunmaktadır.
- d) Başka çözümler aranır.
- e) Bu çözüm optimal olmaz.

10) Aşağıda verilen doğrusal programlama modelinin dual problemde kaç kısıt bulunmaktadır?

$$\begin{aligned} Z_{max} &= 10X_1 + 20X_2 + X_3 \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 &\leq 40 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) 2
- e) 3

Cevaplar:

1) b, 2) c, 3) d, 4) b, 5) b, 6) d, 7) a, 8) d, 9) c, 10) e

12. DUALİTE VE DUYARLILIK ANALİZİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 12.1. Dualite (İkilik veya İkincil Problem)
- 12.2. Duyarlılık Analizi
- 12.3. Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişim
- 12.4. Sağ Taraf Sabitlerindeki Değişim

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Duyarlılık Analizi Ne Zaman Kullanılır?
- 2)** Dual Problem Nedir?
- 3)** Amaç Fonksiyonu Katsayılarının Değişimini İnceleyiniz.
- 4)** Sağ Taraf Sabitlerinin Değişimini Araştırınız.

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Dual problem	Primal Problemin dualini yazabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak
Gölge Fiyat	Gölge Fiyatları değerlendirebilmek	Okuyarak, Fikir yürüterek
Amaç Fonksiyonu katsayılarının değişimi	Amaç fonksiyonu katsayılarının duyarlılığını inceleyebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Sağ taraf sabitlerindeki değişim	Sağ taraf sabitleri duyarlılığını inceleyebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

Dualite Duyarlılık Gölge Fiyat İndirgenmiş Maliyet

Giriş

Önceki bölümlerde kurulan doğrusal programlama problemleri primal halde verilmişti. Primal modelden Grafik yöntem, Simpleks yöntem veya diğer yöntemlerle çözüm elde edilmesi için kolay bir aşaması olup, nispeten zor olan bölüm optimal çözüm elde edildikten sonra yapılan analizlerdir.

Duyarlılık analizi adı verilen bu süreç, model parametrelerindeki olası değişiklikler (örneğin herhangi bir ürünün birim karının ya da belirli bir kısıta ait eldeki kapasitenin değişmesi) sonucunda optimal çözümün nasıl bir davranış göstereceğinin incelenmesini kapsar.

12.1. Dualite (İkilik veya İkincil Problem)

Doğrusal programlama probleminin simpleks yöntemle çözümünde zorluklar yaşanabilir. Bazen primal problemin duali alınarak belki bir nebze kolaylaştırılabilir. Dual model simpleks modelin değişik bir biçimde yazılışdır. Eğer simpleks yöntemde karar değişkenleri fazla kısıtlayıcı sayısı az olursa, bu modelin duali alınarak çözüme ulaşmakta kolaylık sağlanır.

Doğrusal programlamada her maksimizasyon probleminin minimizasyonu veya her minimizasyon probleminin bir maksimizasyonu vardır. Bir problemin dualinin duali alınırsa problemin kendisine eşit olur. Bir problemin dualinin alınması için kanonik formda olması gerekmektedir. Eğer kanonik formda değilse bu hale dönüştürülür. Problem maksimizasyon amaçlıysa eşitsizliklerin yönü " $\leq$ " şeklinde, problem minimizasyon amaçlıysa eşitsizliklerin yönü " $\geq$ " şeklinde olmalıdır. Problemin bu halde olması onun kanonik formda olduğunu gösterir.

Problemin optimal çözümü hem primal hem de dual modelde aynı değeri vermektedir. Eğer primal modelde çözüm sınırsız olursa, dual modelde problemin uygun çözümü yoktur. Bunun tersi de doğrudur.

12.1.1. Dual Modelin Yazılması

Primal modelden dual modele geçerken şu kurallara uyulması gerekmektedir.

1. Primal modelde amaç fonksiyonu maksimizasyon amaçlıysa dual modelde bu minimizasyon halini alır. Eğer primal modelde amaç fonksiyonu minimizasyon amaçlıysa bunun duali maksimizasyon halini alır.

2. Primal modeldeki maksimizasyon amaçlı problemin kanonik formdaki kısıtlayıcılarının yönü $\leq$ şeklinde iken, dual modelde bunların yönü değişerek $\geq$ halini alır. Bunun tersi de doğrudur.

3. Hem primal hem de dual modeldeki değişkenlerin tümü pozitiflik koşuluna uygun olmalı, negatif olmamalıdır.

4. Primal modeldeki kısıtlayıcılar dual modelde karar değişkeni olmaktadır. Primal modeldeki karar değişkenleri de dual modelde kısıtlayıcı haline dönüşmektedirler. Primal modelde m tane kısıt n tane karar değişkeni varsa, problemin dual modelinde n tane kısıt m tane karar değişkeni vardır.

5. Primal modeldeki amaç fonksiyonunun katsayı değerleri dual modelde ihtiyaç vektörü değerlerine dönüşürken, ihtiyaç vektöründeki değerler de amaç fonksiyonunun katsayı değerleri haline dönüşmektedir.

6. Primal modeldeki kısıtlayıcıların katsayı matrislerinin transpozesi dual modeldeki kısıtlayıcıların katsayı değerlerini oluşturmaktadır.

7. Primal modeldeki bir serbest değişkenin işareti sınırlandırılmamışsa, dual modelde buna karşılık gelen kısıtlayıcı denklem eşitlik halinde yazılır. Bunun tersi de doğrudur. Primal modeldeki problemin duali alındıktan sonra kısıtların kanonik formda olmasına dikkat edilerek primal modelde olduğu gibi simpleks yöntem uygulanır.

Örnek:

Primal Model	Dual Model
$Z_{\max} = 50X_1 + 80X_2$	$G_{\min} = 32Y_1 + 84Y_2$
$X_1 + 2X_2 \leq 32 \text{ (} Y_1 \text{)}$	$Y_1 + 3Y_2 \geq 50$
$3X_1 + 4X_2 \leq 84 \text{ (} Y_2 \text{)}$	$2Y_1 + 4Y_2 \geq 80$
$X_1, X_2 \geq 0$	$Y_1, Y_2 \geq 0$

Primal modelle dual modelin sonuçlarını karşılaştırırsak; dual modeldeki optimal çözüm primal modeldeki optimal çözüme eşittir. Primal problemin optimal tablosundan dual değişkenlerin aldığı değerler okunabilir. Dual modeldeki temel olmayan değişkenlerin $Z_j - C_j$ sırasındaki çözüm değerleri, primal modelde bu değişkenlere karşı gelen temel değişkenlerin optimal çözüm değerini vermektedir. Ayrıca dual modeldeki temel değişkenlerin $Z_j - C_j$ sıra elemanlarındaki çözüm değerleri, primal modeldeki temel olmayan değişkenlerin optimal çözüm değerini vermektedir.

Örnek:

Aşağıda verilen primal programlama modelinin dualini yazınız.

Primal Model:

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= 60X_1 + 30X_2 + 20X_3 \\ 8X_1 + 6X_2 + X_3 &\leq 48 \\ 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 &\leq 20 \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 &\leq 8 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Çözüm:

Dual Model:

$$\begin{aligned} G_{\min} &= 48Y_1 + 20Y_2 + 8Y_3 \\ 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 &\geq 60 \\ 6Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 &\geq 30 \\ Y_1 + 3Y_2 + Y_3 &\geq 20 \\ Y_1, Y_2, Y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Örnek:

Aşağıda verilen primal programlama modelinin dualini yazınız.

Primal Model:

$$Z_{\text{maks}} = 5X_1 + 3X_2 + 4X_3$$

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 120$$

$$8X_1 + 5X_2 + 4X_3 \leq 160$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Çözüm:

Dual Model:

$$G_{\text{min}} = 120Y_1 + 160Y_2$$

$$3Y_1 + 8Y_2 \geq 5$$

$$5Y_1 + 5Y_2 \geq 3$$

$$2Y_1 + 4Y_2 \geq 4$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

- Dikkat edilirse, verilen primal problem maksimizasyon ise, duali minimizasyon problemi olur.
- Primal modelin amaç fonksiyonu katsayıları dual modelde sağ taraf sabitleri durumuna gelir.
- Örnek olarak, Primal modelde 3 değişken iki kısıt var ise, dual modelde iki değişken 3 kısıt oluşur.
- Maksimizasyonda genellikle kısıtlar $\leq$ biçiminde bulunurken, minimizasyonda $\geq$ olması beklenir.
- Primalden duale geçişte, teknolojik katsayılar matrisi transpozesi alınarak yazılır.
- Primalin optimum çözümü var ise dualin de optimum çözümü vardır.

12.2. Duyarlılık Analizi

Duyarlılık analizi, bir doğrusal programlama probleminde belirlenen katsayı değerlerinin değişmesinin problemin optimal çözümü üzerine etkisini incelemektedir. Oluşturulan modeldeki katsayıların kesin olmadığı ve daha sonraki dönemlerde değişime uğrayarak optimal çözümü ne derece etkileyeceği incelenir. Bu değişiklik sonucunda optimal çözümde bir farklılık olacağı gözleniyorsa, problemin yeniden çözülmesi gerekmektedir. Duyarlılık analizinde amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcı koşulların katsayılarındaki ve bir de sağ taraf sabitlerindeki (kapasite vektörü) değer değişiklikleri ile yeni bir değişken ve yeni bir kısıt eklenmesi halinde optimal çözümdeki değişiklik incelenir. Bu bölümde biz Amaç Fonksiyonu katsayılarındaki değişim ile Sağ Taraf Sabitlerindeki değişimi inceleyeceğiz.

Kaynaklarda veya kısıtlardaki herhangi bir değişikliğin etkilerini, doğrusal programlama modelini yeniden çözürek bulmak mümkündür. Ancak, bu şekilde yeniden çözüm genellikle gereksizdir. Çünkü aynı temel değişkenli farklı bir optimal çözüme ulaşmak mümkündür. İşte duyarlılık analizi yeniden çözüme gitmeden bu gibi değişikliğin etkisini optimal çözüm tablosundan belirlemeye çalışır.

12.3. Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişim

Amaç fonksiyonundaki katsayı değerlerindeki değişimin o katsayıyı taşıyan değişkenin optimal çözümde olup olmadığına bağlıdır. Eğer değişime uğrayan değişken optimal çözümde değilse, bu değişkenin katsayısının yeterli büyüklükte olmamasından kaynaklanmaktadır. Eğer bu katsayı değeri büyütölüp $Z_j - C_j$ satırındaki değeri sıfırdan küçük olacak değere gelirse, bu değişkenin optimal çözüme girmesi gerekmektedir. Bu durumda optimal çözüm de değişecektir. Ancak bu katsayı değeri büyürse, bunun optimal çözüm üzerinde bir değişikliğe yol açmayacağı açıktır. Minimizasyon problemi için tersi durum geçerlidir. Eğer değişime uğrayan değişken optimal çözüm içerisindeyse, bu değişkenin katsayısındaki bir artış optimal çözüm üzerinde herhangi bir değişikliğe yol açmayacaktır. Eğer bu değerde bir azalma sonucu değişken optimal çözümden çıkıp yerine başka bir değişken çözüme girecek şekilde bir değişiklik olursa, optimal çözümde bir değişiklik olacaktır. Minimizasyon problemi için tersi durum geçerlidir.

12.3.1. Gölge Fiyat

Bir doğrusal programlama modelindeki kısıtlayıcı denklemlerin sağ taraf değerlerindeki herhangi bir değişikliğin amaç fonksiyonu ve çözüm kombinasyonuna olan etkisinin belirlenmesi işlemidir. Simpleks yöntem sonucunda elde edilen optimal çözüm tablosundaki her bir değerin bir anlamı bulunmaktadır. Özellikle indeks satırındaki değerler çok önemlidir.

Örneğin yapısal değişkenlerin indeks satırındaki değerleri indirgenmiş maliyet olarak bilinir. Bu değerler, çözüme girmeyen karar değişkenlerinin çözüme girebilmesi için katsayılarında yapılması gereken minimum değişikliği göstermektedir. Aylak ve yapay değişkenlerin indeks satırındaki değerleri, ekonomik anlamda **gölge fiyatları** veya fırsat maliyetlerini göstermektedir. Eğer kaynaklarda bir birim değişiklik yapılırsa, bu değişimin amaç fonksiyonu değerine olan birim etkisi gölge fiyatlar kadar olacaktır. Yani, amaç fonksiyonunun değeri **gölge fiyat** kadar değişecektir. Bu konuyu aşağıdaki örnekle açıklamaya çalışalım:

Dual problem, verilen bir primal DP probleminden matematiksel işlemle türetilen yeni bir DP problemidir. Dual ve primal problemler birbiriyle çok yakın ilişkili olup, öyle ki “herhangi birisinin simpleks optimum çözümü doğrudan diğerinin optimum çözümünü verir.”

Çoğu DP problemlerinde, dual problem kısıtların tipine, değişkenlerin işaretine ve optimizasyonun anlamına bağlı olarak primal problemin çeşitli formları için tanımlanır.

Bu tanımlar simpleks tablodaki değerlerin yorumlanmasında zorluğa neden olabilirse de, bunu da özellikle dual değişkenlerin işaretleri önemli olacaktır.

Şimdi primal formların tamamını da kapsayan bir tanımlı dual simpleks için yapacağız. Buna göre problem primal veya dual simpleks metotlarından birisiyle çözmeden önce DP problemi standart form şekline getirilmelidir.

Dual problemi standart formla tanımlayarak simpleks tabloya uygunluk da sağlanmış olmaktadır. Buna göre primal problemin genel standart formu;

Amaç fonksiyonu:

$$\text{Optimum } Z = \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

Negatif olmama koşulu:

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

şeklinde tanımlanır. Burada n adet değişkeni gösteren X_j 'ler artık, aylak gerçek değişkenlerde dahil tüm değişkenleri temsil etmektedir. Şimdi dual problemi oluşturmak amacıyla primalin katsayılarını şematik olarak tabloya yazmamız gerekir.

Bu tablo aşağıdaki kurallara göre dualin primalden simetrik olarak elde edilebileceğini gösterir:

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad ; \text{ Birim kar veya birim maliyetler}$$

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n] \quad ; \text{ Değişkenler}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \text{ Teknolojik Matris}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} ; \text{ Sağ taraf sabitleri}$$

Örnek:

Aşağıda bir maksimizasyonu problemine ilişkin model ve optimum çözüm tablosu verilmektedir. Bu optimum sonuçlara göre **WinQSB** programı veya **MS Excel Çözücü (solver)** kullanılarak duyarlılık tablosu oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} Z_{maks} &= 5X_1 + X_2 + 10X_3 \\ X_1 + X_3 &\leq 100 \\ X_2 &\leq 1 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

12.3.2. Optimum Simpleks Tablo

C_b	Temel Değişken	C_j	5	1	10	0	0
		Çözüm	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2
10	X_3	100	1	0	1	1	0
1	X_2	1	0	1	0	0	1
Z_j		1001	10	1	10	10	1
$Z_j - C_j$			5	0	0	10	1

12.3.3. Duyarlılık Tablosu

Karar Değişkeni	Çözüm Değeri	Birim kar/maliyet	Toplam Katkı	İndirgenmiş Maliyet	Temel veya Değil	Minimum Sınır	Maksimum Sınır
X_1	0	5	0	5	Sınırdadır	-M	10
X_2	1	1	1	0	Temel	0	M
X_3	100	10	1000	0	Temel	5	M
			1001				

	Sol Taraf	Yön	Sağ Taraf	Aylak Artık	Gölge Fiyat	Min	Maks
C_1	100	$\leq$	100	0	10	0	M
C_2	1	$\leq$	1	0	1	0	M

Bu duyarlılık tablosu size problemle birlikte verilecektir. Bu tablonun nasıl okunacağı önemlidir.

İndeks satırında X_1 temel değişkeni altında yer alan 5 değeri indirgenmiş maliyet değerini göstermektedir. Yani X_1 değerinden 1 birimlik üretim yapılması durumunda amaç fonksiyonunda meydana gelecek değişim 5 birim olacaktır. Şöyle ki;

$$X_1 = 0, X_2 = 1 \text{ ve } X_3 = 100$$

Bu durumda;

$$Z_{\text{maks}} = 0.5 + 1.1 + 10.100 = 1001$$

1 birim X_1 üretilmesi yani X_1 'in çözüme girmesi durumunda Z_{maks} , -5 azalır.

$$Z_{\text{maks}} = 1001 - 5 = 996 \text{ (Yeni } Z_{\text{maks}} \text{ değeri)}$$

Peki bu nasıl hesaplanır:

Çözüme girmeyen değişken olan X_1 sütununda X_3 değişkeni karşısında yer alan 1 değeri, X_1 'in çözüme girmesi durumunda X_3 değişkeninde meydana gelecek azalmayı gösterir.

$$\text{Yani } X_3 = 100 \text{ idi. Yeni } X_3 = 100 - 1 = 99$$

$$Z_{\text{maks}} = 1.5 + 1.1 + 10.99 = 996$$

12.4. Sağ Taraf Sabitlerindeki (b_i) Değişim

Kapasite vektöründeki değişimin optimal çözüm üzerindeki etkisine bakarken gölge fiyatlarına bakmamız gerekir. Eğer kaynaklarda (kapasitelerde yani sağ taraf sabitlerinde) 1 birimlik bir değişim meydana gelirse, bu değişimin amaç fonksiyonu değerine olan birim etkisi gölge fiyatlar kadar olacaktır. Yani amaç fonksiyonunun değeri gölge fiyat kadar artacak ya da azalacaktır. Bu etkinin miktarı, yönü ve sınırları belirlenir. Çünkü gölge fiyatları b_i değerlerine bağlı olarak farklılık göstermektedir. Bunun için çözümde temel olmayan değişken olup olmadığına bakılır. Eğer temel olmayan değişken çözümde yer alıyorsa, bulunduğu denklemde o miktarda fazlalık olduğunu göstermektedir. Eğer değişim miktarı bu değerden az olursa optimal çözümde değişiklik beklenmez.

Çözümde bulunan değer kadar yada daha fazla miktarda azalma olursa optimal çözümde değişiklik kaçınılmazdır. Eğer çözümde temel değişken varsa, o zaman durum biraz

farklılık göstermektedir. Optimal çözüm tablosunda bulunan çözüm değerlerinin, b_i değeri değişerek işleme girecek olan değişkenin bulunduğu sütun değerlerine bölünerek b_i değerindeki değişimin alttan ve üstten sınırları belirlenir. Eğer b_i değerindeki değişim, bu aralığın dışına çıkacak seviyede bir değişimse optimal çözüm değişecektir. Aksi halde optimal çözüm değerinde bir değişiklik kesinlikle olmaz.

Gölge Fiyatın bulunması

	$" \leq "$ ve $" = "$		$" \geq "$	
	$b + 1$	$b - 1$	$b + 1$	$b - 1$
Z_{maks}	+	-	-	+
Z_{min}	-	+	+	-

Kısıtın, $\leq$ ve $=$ olması durumunda;

- Sağ taraf Sabiti 1 birim artarsa, Z_{maks} değeri gölge değer kadar artar.
- Sağ taraf Sabiti 1 birim azalırsa, Z_{maks} değeri gölge değer kadar azalır.

Kısıtın, $\geq$ olması durumunda;

- Sağ taraf Sabiti 1 birim azalırsa, Z_{maks} değeri gölge değer kadar azalır.
- Sağ taraf Sabiti 1 birim artarsa, Z_{maks} değeri gölge değer kadar artar.

12.4.1.İndirgenmiş Maliyet

Herhangi bir temel olmayan değişkenin indirgenmiş maliyeti (reduced cost), değişkenin temel değişken olması (doğrusal programlama probleminin en iyi çözümüne girmesi) için amaç fonksiyon katsayısında yapılacak iyileştirme miktarıdır. Eğer bir X_k temel olmayan değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyet kadar iyileştirilirse, doğrusal programlama probleminin bir tek en iyi çözümü olmaz. Alternatif çözümler vardır. X_k , söz konusu çözümlerden en az birinde temel değişken; en az birinde ise temel olmayan değişken konumundadır.

Uygulamalar

Gölge fiyat nedir? (Shadow Price)

İndirgenmiş maliyet nedir? (Reduced Cost)

Uygulama Soruları

1) Aşağıda modelde primal ve dual modeller doğrudan görülebilmektedir. Soldan sağa ve yukarıdan aşağıya biçiminde;

Min G		Maks Z			
		$X_1 \geq 0$	$X_2 \geq 0$	$X_3 \geq 0$	
		X_1	X_2	X_3	
$y_1 \geq 0$	y_1	8	6	1	≤ 48
$y_2 \geq 0$	y_2	4	2	1.5	≤ 20
$y_3 \geq 0$	y_3	2	1.5	0.5	≤ 8
		≥ 60	≥ 30	≥ 20	

2) Aşağıda primal dual ilişkileri verilmektedir.

Primal DP (Maks)	Dual DP (Min)
Kısıtlar	Değişkenler
$\geq$	≤ 0
$\leq$	≥ 0
$=$	İşaretçe sınırsız
Değişkenler	Kısıtlar
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$
İşaretçe sınırsız	$=$

3) Aşağıda bir DP probleminin matematiksel modeli ve optimal çözüm tablosu verilmektedir.

$$\text{Maks } Z = 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

Kısıtlar

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + x_6 = 7,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Optimal Simpleks Tablo

C _B	Temel	C _j						Sağ taraf
		5	2	1	0	0	0	
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	
0	x ₄	0	11/3	0	1	1	-1/3	23/3
1	x ₃	0	1	1	0	1	0	4
5	x ₁	1	1/3	0	0	0	1/3	7/3
C - Z		0	-2/3	0	0	-1	-5/3	Z = 47/3

Primal Problem

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize} && Z = cx, \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& Ax \leq b \\
 &\text{and} && \\
 &&& x \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dual Problem

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && W = yb, \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& yA \geq c \\
 &\text{and} && \\
 &&& y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Primal Problem in Algebraic Form

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize} && Z = 3x_1 + 5x_2, \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& x_1 \leq 4 \\
 &&& 2x_2 \leq 12 \\
 &&& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 &\text{and} && x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dual Problem in Algebraic Form

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3, \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& y_1 + 3y_3 \geq 3 \\
 &&& 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\
 &\text{and} && \\
 &&& y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Primal Problem in Matrix Form

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize} && Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \\
 &\text{and} && \\
 &&& \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dual Problem in Matrix Form

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && W = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3, 5] \\
 &\text{and} && \\
 &&& [y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0].
 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	
y_1	1	0	≤ 4
y_2	0	2	≤ 12
y_3	3	2	≤ 18
	VI	VI	
	3	5	

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde Duyarlılık Analizi ayrıntılı olarak işlenmiştir. Amaç fonksiyonu katsayılarının duyarlılığı, sağ taraf sabitlerinin duyarlılığı, gölge fiyat ve indirgenmiş maliyet tablosu üzerinde gerekli yorumlar yapılmıştır.

Bölüm Soruları

1) Sağ taraf sabitlerinin bir birim arttırılmasıyla oluşan kardaki artışa ne denir?

- a) Birim fiyat
- b) Birim maliyet
- c) Gölge fiyat
- d) İndirgenmiş maliyet
- d) Duyarlılık

(2. ve 3. Sorular için bilgi)

Aşağıda bir doğrusal programlama problemi ve bu problemin Optimal Simpleks tablosu verilmiştir.

$$Z_{min} = 320x_1 + 240x_2$$

$$8x_1 + 6x_2 \geq 50$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Optimal Tablo		C_j	320	240	0	0
C_B	Temel	X_B	X_1	X_2	S_1	S_2
320	X_1	0,63	1	0	-0,313	0,375
240	X_2	7,5	0	1	0,25	-0,5
	Z_j	2000	320	240	-40,16	0
	$Z_j - C_j$		0	0	-40,16	0

2) X_1 değişkeninin amaç fonksiyonundaki katsayısı ($C_1 = 320$) için değişim aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $C_1 \leq 320$
- b) $C_1 \geq -320$
- c) $C_1 \leq 240$
- d) $C_1 \geq 320$
- e) $C_1 \leq 0$

3) İlk kısıt $8X_1 + 6X_2 \geq 51$ şeklinde değiştirilirse, aşağıdakilerden hangisi gerçekleşir?

- a) Z değeri 40,16 azalır.
- b) Z değeri 40,16 artar.
- c) Z değeri değişmez.
- d) Z değeri 320 azalır.
- e) Z değeri 320 artar.

4) Bir doğrusal programlama probleminin primali maksimizasyon ise duali ne olur?

- a) Maksimizasyon problemi
- b) Hangi tür problem olacağı bilinmez.
- c) Minimizasyon problemi
- d) Problemin optimum çözümüne göre değişir.
- e) Dual problem primalden bağımsız olarak her zaman maksimizasyon problemi olur.

5) Aşağıda verilen primal maksimizasyon probleminin duali alınırsa kaç kısıt elde edilir?

$$\begin{aligned}
 Z_{maks} &= 4X_1 + 10X_2 \\
 5X_1 + 4X_2 &\leq 200 \\
 X_1 + 2X_2 &\leq 50 \\
 X_1 + X_2 &\leq 20 \\
 X_1, X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

6) Aşağıda verilen primal maksimizasyon probleminin duali alındığında amaç fonksiyonu hangi şıkta doğru biçimde verilmektedir?

$$\begin{aligned}
 Z_{maks} &= 4X_1 + 10X_2 \\
 5X_1 + 4X_2 &\leq 200 \\
 X_1 + 2X_2 &\leq 50 \\
 X_1 + X_2 &\leq 20 \\
 X_1, X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) $Z_{maks} = 4X_1 + 10X_2$
- b) $G_{maks} = 4Y_1 + 10Y_2$
- c) $Z_{maks} = 4Y_1 + 10Y_2$
- d) $Z_{maks} = 200Y_1 + 50Y_2 + 20Y_3$
- e) $G_{min} = 200Y_1 + 50Y_2 + 20Y_3$

7) Bir doğrusal programlama probleminin optimal çözümünde bir kısıta ilişkin gölge fiyatın 5 çıkması, o kısıtın 1 birim arttırılması durumunda karın ne kadar artacağını belirtir?

- a) -5
- b) -1
- c) 0
- d) 5
- e) 10

8) Bir doğrusal programlama primal maksimizasyon probleminin duali alındığında kısıtlar hangi tür eşitsizliğe sahip olur?

- a) Küçüktür (<)
- b) Küçük eşit (≤)
- c) Büyüktür (>)
- d) Büyük eşit (≥)
- e) Eşittir (=)

9) Bir doğrusal programlama primal minimizasyon probleminin duali alındığında kısıtlar hangi tür eşitsizliğe sahip olur?

- a) Eşittir (=)
- b) Küçüktür (<)
- c) Küçük eşit (≤)
- d) Büyüktür (>)
- d) Büyük eşit (≥)

10) Aşağıda verilen primal doğrusal programlama probleminin duali hangi şıkta doğru yazılmıştır?

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= 2X_1 + 3X_2 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 5 \\ 3X_1 + 4X_2 &\leq 8 \\ X_1; X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) $\begin{aligned} Z_{\max} &= 2X_1 + 3X_2 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 5 \\ 3X_1 + 4X_2 &\leq 8 \\ X_1; X_2 &\geq 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} G_{\min} &= 2X_1 + 3X_2 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 5 \\ 3X_1 + 4X_2 &\leq 8 \\ X_1; X_2 &\geq 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} G_{\min} &= 5X_1 + 8X_2 \\ Y_1 + 2Y_2 &\geq 2 \\ 3Y_1 + 4Y_2 &\geq 3 \\ Y_1; Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} G_{\min} &= 5X_1 + 8X_2 \\ Y_1 + 3Y_2 &\geq 2 \\ 2Y_1 + 4Y_2 &\geq 3 \\ Y_1; Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} G_{\min} &= 5X_1 + 8X_2 \\ Y_1 + 2Y_2 &\geq 2 \\ 3Y_1 + 4Y_2 &\geq 3 \\ Y_1; Y_2 &\leq 0 \end{aligned}$

Cevaplar:

1) c, 2) d, 3) b, 4) c, 5) c, 6) e, 7) d, 8) d, 9) c, 10) d

13. TRANSPORT PROBLEMLERİNDE ATAMA

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 13.1. Transport Probleminin DP ile Modellenmesi
- 13.2. Ulaştırma Algoritması
- 13.3. Kuzeybatı Köşe Yöntemi
- 13.4. Minimum Maliyetli Atama (Kestirme Dağıtım)
- 13.5. Russel Yaklaşım Yöntemi
- 13.6. Vogel Yaklaşım Yöntemi (Metodu) (VAM)

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Ulaştırma probleminde atama yöntemleri nelerdir?
- 2)** Siz olsanız hangi atama yöntemini tercih edersiniz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Transport Problemi	Ulaştırma problemini doğrusal olarak modelleyebilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Kuzey batı köşe yöntemi	Kuzey batı köşe yöntemi ile atama yapabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Vogel Atama Yöntemi	Vogel Atama Yöntemi ile atama yapabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek
Minimum Maliyetli Atama	Minimum Maliyetli Atama ile atama yapabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak, Örnek soru çözerek

Anahtar Kavramlar

**Kuzey batı köşe yöntemi
Vogel Atama Yöntemi
Minimum Maliyetli Atama
Russel Yöntemi**

Giriş

Transport Problemi, Doğrusal Programlama probleminin özel bir şeklidir. Transport problemleri doğrusal programlama modeli kullanılarak modellenenir. Bu modelde ürünlerin **kaynaklardan** (fabrika, depo gibi) **hedeflere** (depo, pazar gibi) taşınmasıyla ilgilenilir. Buradaki amaç hedefin talep gereksinimleri ve kaynakların arz miktarlarında denge sağlarken, diğer taraftan da her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma miktarını belirlemektir.

13.1. Transport Probleminin Doğrusal Programlama ile Modellenmesi

Taşıma işleminin çeşitli depolar ve pazarlar arasında yapıldığını varsayarsak;

D_i : i . depo $i = 1, 2, 3, \dots, m$

P_j : j . pazar $j = 1, 2, 3, \dots, n$

X_{ij} : i . depodan j . pazara gönderilen ürün miktarı

C_{ij} : i . depodan j . pazara gönderilen ürünün birim taşıma maliyeti

a_i : deponun arz miktarı $i = 1, 2, 3, \dots, m$

b_j : pazarın talep miktarı $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Z_i : depo ile ilgili taşıma maliyeti

Z : Toplam taşıma maliyeti

olarak gösterilebilir. Bu modelin amacı, tüm arz ve talep kısıtlarını sağlayan, ayrıca toplam taşıma maliyetlerini minimum kılan X_{ij} bilinmeyen miktarını belirlemektir.

Toplam taşıma maliyeti;

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot X_{ij} = C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + C_{13} \cdot X_{13} + \dots + C_{mn} \cdot X_{mn}$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca her bir depodan gönderilen ürünlerin toplamının o deponun kapasitesine ve her bir pazara ulaştırılan toplam miktarın da o pazarın talebine eşit olması kısıtları sağlanmalıdır. Buna göre depo kısıtları için;

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \dots + X_{1n} = a_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \dots + X_{2n} = a_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \dots + X_{mn} = a_m$$

yani,

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i$$

pazar kısıtları için de;

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \dots + X_{m1} = b_1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \dots + X_{m2} = b_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \dots + X_{mn} = b_m$$

yani,

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j$$

denklemleri yazılabilir. Böylece amaç denklemi ve kısıtlar şu şekilde yazılabilir;

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Örnek:

Güney Taşımacılık Şirketi üç depodan üç pazara kamyonlarla ürün taşımaktadır. Arz ve talep miktarları (kamyon sayısı cinsinden) eşit olup, farklı rotalardaki kamyon başına ulaştırma maliyetleri, depoların arzları ve pazarların talepleri aşağıda verilmiştir. Depolarla pazarlar arasındaki taşıma maliyetlerini minimum kılan taşıma miktarlarını belirleyiniz.

Depoların Arz Miktarları			Satış Merkezlerinin Talep Miktarları			
Depo 1	Depo 2	Depo 3	Pazar 1	Pazar 2	Pazar 3	Pazar 4
15	25	10	5	15	15	15

Depolardan Pazarlara Birim Taşıma Maliyetleri				
	Pazar 1	Pazar 2	Pazar 3	Pazar 4
Depo 1	10	2	20	11
Depo 2	12	7	9	20
Depo 3	4	14	16	18

Problemin doğrusal programlama modeli ise aşağıdaki gibi olur.

Amaç fonksiyonu;

$$Z_{\min} = 10X_{11} + 2X_{12} + 20X_{13} + 11X_{14} + 12X_{21} + 7X_{22} + 9X_{23} + 20X_{24} + 4X_{31} + 14X_{32} + 16X_{33} + 18X_{34}$$

Arz kısıtları;

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 15$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 25$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 10$$

Talep kısıtları;

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 5$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 15$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 15$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 15$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

Üç depodan yapılan arzın dört pazarın talebine eşit olması sebebiyle kısıtların tümü eşitlik halindedir. Toplam arzın toplam talebe eşit olmadığı durumda ulaştırma modeli "dengelenmemiştir". Dengelenmemiş bir model "hayali" depolar ya da pazarlar eklenerek dengelenmiş hale getirilmelidir. Problemimiz dengelenmiş bir ulaştırma modelidir.

		Pazarlar				Depo Kapasiteleri
		P1	P2	P3	P4	
Depolar	D1	10	2	20	11	15
	D2	12	7	9	20	25
	D3	4	14	16	18	10
	Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

Problemimiz dengelenmemiş arz ve talep miktarlarına göre olsaydı, örneğin;

Depo Kapasiteleri		
D1	D2	D3
15	25	30

Pazar Talepleri			
P1	P2	P3	P4
5	15	15	15

şeklinde arzın talepten büyük olduğu dengelenmemiş bir problemi dengelenmiş hale getirmek için ulaştırma maliyetleri 0 olan hayali bir pazar eklenir.

		Pazarlar					Depo Kapasiteleri
		P1	P2	P3	P4	PY	
Depolar	D1	10	2	20	11	0	15
	D2	12	7	9	20	0	25
	D3	4	14	16	18	0	30
	Pazar Talepleri	5	15	15	15	20	70

Benzer şekilde talebin arzdan büyük olduğu durumda ise hayali bir depo ekleyerek problemi dengelenmiş hale getiriyoruz:

Depo Kapasiteleri		
D1	D2	D3
15	25	10

Pazar Talepleri			
P1	P2	P3	P4
5	15	15	35

		Pazarlar				
		P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
Depolar	D1	10	2	20	11	15
	D2	12	7	9	20	25
	D3	4	14	16	18	10
	DY	0	0	0	0	20
	Pazar Talepleri	5	15	15	35	70

13.2. Ulaştırma Algoritması

Ulaştırma algoritması simpleks yönteminin adımlarını aynen takip eder, fakat normal simpleks tabloyu kullanmak yerine, ulaştırma probleminin özel yapısının avantajını kullanarak algoritma daha uygun bir hale getirilir. Ulaştırma algoritmasının adımları simpleks algoritmasıyla paraleldir, yani;

1. Adım : Başlangıç uygun çözümü belirlenir.

2. Adım : Tüm temel dışı değişkenler içinden giren değişkenlerin belirlenir, bunun için optimallik koşulları sağlanmalıdır.

3. Adım : Mevcut tüm temel değişkenler içinden çıkan değişkenler belirlenir, bunun için uygunluk koşulu kullanılır ve yeni temel çözüm bulunur, 2. Adıma dönlür.

Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi

m depolu ve n pazarlı genel bir ulaştırma problemi, her depo için bir tane ve her pazar için bir tane olmak üzere $m + n$ sayıda kısıt denkleminde sahiptir. Bununla birlikte ulaştırma modelinin daima dengelenmiş olması nedeniyle bu denklemlerden biri fazla (hayali) olabilir. Dolayısıyla modelin $m + n - 1$ tane bağımsız kısıt denklemi olacaktır. Bu da başlangıç kısıt denkleminin $m + n - 1$ temel değişkenden oluşması demektir. Ulaştırma probleminin temel yapısı, yapay olmayan bir başlangıç temel çözümünü sağlayan üç yöntemden birini kullanmamıza olanak sağlar. Bunlar;

1. Kuzeybatı köşesi yöntemi
2. En düşük maliyetler yöntemi
3. Russel yaklaşım yöntemi
4. Vogel yaklaşım yöntemidir.

Bu dört yöntem arasında oluşturdukları başlangıç temel çözümün kalitesi açısından farklılık vardır. Genelde, en iyi başlangıç çözümünü Vogel Yaklaşım Yöntemi, en kötü başlangıç çözümünü ise Kuzeybatı Köşesi Yöntemi vermektedir, buna karşılık en az hesaplama Kuzeybatı Köşesi Yönteminde yapılmaktadır.

13.3. Kuzeybatı Köşe Yöntemi

Yöntem tablonun X_{11} değişkeninin yer aldığı kuzeybatıdaki (sol üst köşe) hücrede başlar.

1. Adım : Seçilen kutuya mümkün olan en fazla atama yapılır ve ardından bu atanan miktar arz ve talep miktarlarından çıkarılarak düzenleme yapılır.

2. Adım : İleride tekrar atama yapılmasını önlemek için çıkarma sonucu 0 arz veya talebe ulaşan satır veya sütun iptal edilir. Hem satır hem sütun 0 değeri almışsa biri seçilerek iptal edilir, iptal edilmeyen 0 değerli satır veya sütun dikkate alınmaz.

3. Adım : İptal edilmeyen sadece bir satır veya sütun kaldığında adımlar durdurulur, aksi halde bir önceki işlemde sütun iptal edilmişse sağ hücreye, satır iptal edilmişse bir aşağıdaki hücreye geçilir ve 1. Adıma dönülür.

Örneğimiz için Kuzeybatı Köşesi Yöntemini uygularsak şu başlangıç çözümünü elde ederiz:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	10 5 →	2 10	20	11	15
D2	12 ↓	7 5 →	9 15 →	20 5	25
D3	4	14	16 ↓	18 10	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

13.4. Minimum Maliyetli Atama (Kestirme Dağıtım)

Bu yöntem en ucuz maliyetli rota üzerine yoğunlaştığından daha iyi bir başlangıç çözümü bulmaktadır.

1. Adım: En düşük birim maliyetli hücreye mümkün olduğunca fazla atama yapılarak başlangıç çözümü oluşturulmaya başlanır (maliyetlerin eşit olmaları durumunda bu hücrelerden rastgele birine önce atama yapılır).

2. Adım: Arz ve talep miktarları düzenlenir ve yapacağı atama tamamlanan satır veya sütun iptal edilir. Hem satır hem sütun 0 değeri almışsa biri seçilerek iptal edilir, iptal edilmeyen 0 değerli satır veya sütun dikkate alınmaz.

3. Adım: İptal edilmemiş hücreler içinden en düşük maliyetlisi bulunur ve süreç bu şekilde iptal edilmeyen bir satır veya sütun kalıncaya kadar tekrarlanır.

Örneğimiz için En Düşük Maliyetler Yöntemini uygularsak şu çözüm elde edilir:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	10	2	20	11	15
D2	12	7	9	20	25
D3	4	14	16	18	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

13.5. Russel Yaklaşım Yöntemi

Öncelikle satır ve sütunların maksimum değerleri bulunur, ardından yeni hücre değerleri hesaplanır. Yukarıda verile örnek için Russel Yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki dağıtım tablosu oluşturulmuştur.

Pj	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Satır maks.
Di						
D1	10	2	20	11	15	20
D2	12	7	9	20	25	20
D3	4	14	16	18	10	18
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50	
Sütun maks.	12	14	20	20		

Yeni hücre maliyet değeri = Satırmaks + Sütunmaks - Asıl hücre maliyeti değeri

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Satır maks.
D1	22	32	20	29	15	20
D2	20	27	31	20	25	20
D3	26	18	22	20	10	18
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50	
Sütun maks.	12	14	20	20		

Yeni tablodaki en yüksek maliyetli hücreye mümkün olan en fazla atama yapılır:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Satır maks.
D1	22	32	20	29	0	20
D2	20	27	31	20	25	20
D3	26	18	22	20	10	18
Pazar Talepleri	5	0	15	15	50	
Sütun maks.	12	14	20	20		

0 değerini alan satır veya sütun iptal edilir, satırmaks, sütunmaks ve yeni hücre değerleri yeniden hesaplanır:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Satır maks.
D2	20	27	27	20	10	20
D3	26	18	18	20	10	18
Pazar Talepleri	5	0	0	15	50	
Sütun maks.	12	14	16	20		

	P1	P4	Depo Kapasiteleri	Satır maks.
D2	20	20	10	20
D3	26	20	5	18
Pazar Talepleri	0	15	50	
Sütun maks	12	20		

	P4	Depo Kapasiteleri	Satır maks.
D2	10	20	0
D3	5	18	0
Pazar Talepleri	0	50	
Sütun maks	20		

Bu adımlar sonunda aşağıdaki dağıtım tablosu elde edilmiş olur.

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	10	2	20	11	15
D2	12	7	9	20	25
D3	4	14	16	18	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

Hücrelere atama yapıldıktan sonra elde edilen dağıtım tablosuna göre toplam maliyet:

$$Z = 5.4 + 15.2 + 0.7 + 15.9 + 10.20 + 5.18 = 475$$

para birimi olur.

13.6. Vogel Yaklaşım Yöntemi (Metodu) (VAM)

Vogel Atama Yöntemi, Minimum Maliyetli Atama Yönteminin geliştirilmiş hali olup, genelde en iyi başlangıç çözümünü vermektedir.

1. Adım: Pozitif arzlı (talepli) her satırdaki (sütundaki) en küçük birim maliyeti aynı satırın (sütunun) ikinci en küçük birim maliyetinden çıkararak farklar satırı ve farklar sütunu oluşturulur.

2. Adım: Satır ve sütun ayrımı yapmadan, farklar satırında ve sütununda bulunan sayılar büyükten küçüğe doğru sıralanır (eşitlik halinde biri seçilir). Daha sonra bu sıralamaya göre satır veya sütunlarda bulunan en küçük maliyete sahip hücreye arz ve talep kısıtlarına göre atama yapılır. Bu satır veya sütundaki en düşük maliyetli hücreye yapılabilecek en fazla miktarda atama yapılır. Kalan arz ve talepler hesaplanır ve sıfırlanan satır veya sütun iptal edilir (Aynı anda sıfırlanan

satır ve sütun varsa sadece biri iptal edilir, kalan satıra (sütuna) sıfır miktarda arz (talep) atanır.

3. Adım:

- İptal edilmemiş arz ya da talebe sahip tam bir satır (sütun) kalınca durulur.
- İptal edilmemiş pozitif arzlı (talepli) bir satır (sütun) kalmışsa, en düşük maliyetler yöntemiyle satırdaki (sütundaki) temel değişkenler belirlenir ve durulur.
- İptal edilmemiş satır ve sütunların tümü sıfır arz ve talebe sahipse, en düşük maliyetler yöntemiyle sıfır temel değişkenler belirlenir ve durulur.
- Aksi halde 1. adıma gidilir.

Örneğimiz için En Düşük Maliyetler Yöntemini uygularsak başlangıç çözümünü şu adımlarla elde ederiz:

1. Adım:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Farklar Sütunu
D1	10	2	20	11	15	$10 - 2 = 8$
D2	12	7	9	20	25	$9 - 7 = 2$
D3	4	14	16	18	10	$14 - 4 = 10$
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50	
Farklar Satırı	$10 - 4 = 6$	$7 - 2 = 5$	$16 - 9 = 7$	$18 - 11 = 7$		

- Adım:** 3. satır en büyük farka sahip olduğu için bu satırdaki en düşük maliyetli sahip D_3P_1 hücresine 1. sütunun talebi 5, 3. satırın arzı 10 olduğu için 5 birim atanır. Arz ve taleplerde düzenleme yapılırsa 1. sütunun talebi 0, 3. satırın arzı 5 birim olur. Bu durumda 1. sütun iptal edilir ve cezalar yeniden belirlenir:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Farklar Sütunu
D1	10	2	20	11	15	$11 - 2 = 9$
D2	12	7	9	20	25	$9 - 7 = 2$
D3	4	14	16	18	5	$16 - 14 = 2$
Pazar Talepleri	0	15	15	15	45	
Farklar Satırı	—	$7 - 2 = 5$	$16 - 9 = 7$	$18 - 11 = 7$		

En yüksek ceza 1. satırda olduğu için en düşük maliyet olan x_{12} 'ye 15 birim atanır, böylece arzı ve talebi aynı anda sıfırlamış olur. Burada rastgele olarak satır veya sütundan biri

iptal edilir (1. satır iptal edilmiştir) kalan sütuna 0 talep atanır ve cezalar yeniden hesaplanır:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Farklar Sütunu
D1	10	2	20	11	0	—
D2	12	7	9	20	25	9 - 7 = 2
D3	4	14	16	18	5	16 - 14 = 2
Pazar Talepleri	0	0	15	15	30	
Farklar Satırı	—	14 - 7 = 7	16 - 9 = 7	20 - 18 = 2		

En yüksek cezaya sahip 3. sütundaki en düşük maliyetli X_{23} hücresine 15 birim atama yapılır, böylece 3. sütunun talebi sıfırlanırken 2. satırın arzı 10 birim kalır ve bu sütun da silinir:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Farklar Sütunu
D1	10	2	20	11	0	—
D2	12	7	9	20	10	—
D3	4	14	16	18	5	—
Pazar Talepleri	0	0	0	15	15	

3. Adım : İptal edilmemiş olan 4. sütunda en düşük maliyetler yöntemine göre kalan arz ve talebe göre atama yapılır:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri	Farklar Sütunu
D1	10	2	20	11	0	—
D2	12	7	9	20	0	—
D3	4	14	16	18	0	—
Pazar Talepleri	0	0	0	0	0	
Farklar Satırı	—	—	—	—		

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde Ulaştırma problemlerinin doğrusal olarak modellenmesi, Ulaştırma modellemede Atama Yöntemleri anlatılmıştır. Minimum Maliyetli Atama Yöntemi, Vogel Atama Yöntemi, Russel Atama Yöntemi ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bölüm Soruları

1) Aşağıda verilen transport problemi için Minimum Maliyetli Hücre Yöntemi (Kestirme Dağıtım Yöntemi) kullanılarak atama yapılır ise; hangi hücreye ilk atama yapılır?

$D_i \backslash P_j$	P1	P2	P3	a_i
D1	5	3	7	60
D2	2	4	6	40
b_j	30	20	50	100

- a) D1-P1 b) D1-P2 c) D2-P1 d) D1-P3 e) D2-P3

2) Aşağıda yapılan dağıtım planına göre transport maliyeti kaç olur?

$D_i \backslash P_j$	P1	P2	P3	a_i
D1	5	3	7	60
D2	2	4	6	40
b_j	30	20	50	100

- a) 400 b) 460 c) 500 d) 600 e) 900

3) Aşağıda verilen ulaştırma tablosunun Kuzey Batı Köşesi Yöntemi ile bulunan Olurlu Başlangıç Çözümü' nün değeri kaçtır?

	İSTANBUL	İZMİR	ANTALYA	TALEP
DENİZLİ	6	8	10	150
BURSA	7	11	11	175
ADANA	4	5	12	275
ARZ	200	100	300	600

- a) 6355 TL
- b) 11.500 TL
- c) 5875 TL
- d) 3450 TL
- e) 5295 TL

4) Aşağıdaki ulaştırma problemlerinin matematiksel olarak ifade edildiği semboller ve açıklamalarından hangisi yanlıştır?

- a) i : üretim (talep) merkezi
- b) j : tüketim (talep) merkezi
- c) S_i : i . Üretim merkezinin kapasitesi
- d) D_j : j . Tüketim merkezinin talebi
- e) c_{ij} : i . Üretim merkezinden j . Tüketim Merkezine 1 birim ürün göndermenin maliyeti

5) Aşağıdaki yöntemlerden hangisi ulaştırma problemlerinde başlangıç çözümünü bulmak için kullanılmaz?

- a) Kuzey-Batı Köşe Yöntemi
- b) En Az Maliyetli Hücreler Yöntemi
- c) Sıra veya Sütun En Küçüğü Yöntemi
- d) Vogel Yaklaştırma Yöntemi
- e) Sıra veya Sütun En Büyüğü Yöntemi

6) Aşağıda verilen ulaştırma tablosunun En Az Maliyetli Hücreler Yöntemi ile bulunan Olurlu Başlangıç Çözümünün değeri kaçtır?

Pazar Depo	X	Y	Z	Arzlar
A	3	2	6	10
B	4	7	1	10
C	5	8	4	10
Talepler	10	5	15	30

- a) 50 TL
- b) 60 TL
- c) 70 TL
- d) 80 TL
- e) 100 TL

7) Kuzey-batı, Vogel, Russel ve Minimum Maliyetli Hücre Atama (Kestirme Dağıtım) yöntemlerinden hangisi kullanılırsa genellikle optimum çözüme daha geç ulaşılır?

- a) Vogel Atama Metodu
- b) Russel Atama Metodu
- c) Kestirme Dağıtım
- d) Minimum Maliyetli Hücre
- e) Kuzey Batı Köşe Yöntemi

8) Ulaştırma Probleminin çözümüne başlayabilmek için aşağıdaki varsayımlardan hangisi geçersizdir?

- a) Her bir üretim merkezi ile her bir tüketim merkezi arasında bir birim malın kaç taşınacağı bilinmeli
- b) Her bir üretim merkezi ile her bir tüketim merkezindeki toplam miktar tam olarak bilinmeli.
- c) Modelde kullanılan tüm bilgiler ve probleme konu olan mal ve hizmetler, bütün üretim ve tüketim merkezleri için aynı birim ve homojenlikte tanımlanmış olmalı.
- d) Modelde kullanılan tüm bilgiler ve probleme konu olan mal ve hizmetler, bütün üretim ve tüketim merkezleri için ayrı birim ve heterojenlikte tanımlanmış olmalı.
- e) Üretim merkezlerinden dağıtılacak toplam miktar, tüketim merkezlerince istenen toplam miktara eşit olmalı.

9) Aşağıda verilen transport problemi için Kuzey Batı Yöntemine göre atama yapılır ise; D1'den P1'e kaç ürün gönderilmiştir?

$P_j \backslash D_i$	P1	P2	P3	a_i
D1	5	3	2	60
D2	2	4	6	40
b_j	30	20	50	100 100

- a) 20
- b) 30
- c) 40
- d) 50
- e) 60

10) Aşağıda verilen transport problemi için Vogel Atama Metodu (VAM) kullanılarak atama yapılır ise; hangi hücreye ilk atama yapılır?

$D_i \backslash P_j$	P1	P2	P3	a_i
D1	5	3	2	60
D2	3	4	6	40
b_j	30	20	50	100 100

a) D1-P1

b) D1-P2

c) D2-P1

d) D1-P3

e) D2-P3

Cevaplar:

1) c, 2) b, 3) e, 4) a, 5) e, 6) d, 7) e, 8) d, 9) b, 10) d

14. TRANSPORT PROBLEMİNDE OPTİMALLIK TESTLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- 14.1. Atlama Taşı (Boş Hücre Çevrimleri)
- 14.2. MO-Dİ (Modified Distribution) Yöntemi
- 14.3. Ulaştırma Problemlerinde Dejenerasyon
- 14.4. Yasaklanmış Yol Problemi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

- 1)** Atlama taşı yöntemi nedir?
- 2)** Boş hücre çevrimleri nasıl çizilir? İnternetten araştırınız.
- 3)** MO-Dİ yönteminin aşamaları nelerdir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Atlama Taşı Yöntemi	Boş hücre çevrimlerini oluşturabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak
MO-Dİ Yöntemi	MO-Dİ yönteminin adımlarını uygulayabilmek	Okuyarak, Tekrar yaparak

Anahtar Kavramlar

Atlama Taşı Yöntemi
Boş hücre Çevrimleri
MO-Dİ Yöntemi

Giriş

Transport problemlerinde atama konusu önceki bölümde incelenmişti. Bu bölümde ise transport problemlerinde yapılan atamanın ne kadar iyi olduğunu, optimum çözüm (en uygun değer) olup olmadığı test edilmektedir. Bu test için hangi yöntemler kullanılır? Bu bölümde optimallik testleri detaylı olarak incelenmektedir.

14.1. Atlama Taşı (Boş Hücre Çevrimleri)

Başlangıç dağıtım planında atama yapılmış X_{ij} miktarlarına "taş", atama yapılmamış yani taş bulunmayan hücrelere de "boş hücre" adı verilir. Ulaştırma problemlerinin herhangi bir kademesinde optimallik kontrolüne boş hücrelerden başlanır. Bu amaçla, boş hücrelere yapılabilecek mümkün dağıtımlar için hesap edilecek maliyetlerle taş bulunan hücrelerin gösterdiği maliyetler kıyaslanır. Eğer boş hücrelerde daha düşük değerli birim maliyetler varsa ve bu hücre dağıtım yapabiliyorsa, toplam maliyette düşüş sağlanabilecektir. Boş hücreye W miktarda birim eklemek demek o hücrenin bulunduğu satırdaki arzda ve sütundaki talepte W miktarda birim arttırmak demektir. Fakat arz ve talep kısıtlarımızı sağlamak zorunda olduğumuz için dengeleme yoluna gidilir ve boş hücre çevrimindeki taşların negatif olanlarından bu W değeri çıkarılırken pozitif olanlarına W değeri eklenir.

Boş hücre çevrimi; çevrimi çizilecek boş hücreden başlanarak, aşağı, yukarı veya yanlara doğrusal hareketlerle gidilerek, herhangi bir taşa rastlandığında doksan derecelik dönüşler yapılarak aynı boş hücreye dönülmesidir. Bu işlem yapılırken bazı taşlar atlanabilir veya oklar birbirini kesebilir. Ayrıca boş hücre + olmak üzere çevrim üzerindeki taşlar $-$, $+$, $-$ olarak işaretlenir.

Boş hücrelere ait değerler birim taşıma maliyetlerinin verilen işaretler de hesaba katılarak toplanmasıyla elde edilir. Örneğimizi ele alırsak;

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	(+) 10 15	(-) 2 15	20	11	15
D2	12	(+) 7 0	9 15	(-) 20 10	25
D3	(-) 4 5	14	16	(+) 18 5	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

Boş hücrelere ait değerleri hesaplayacak olursak;

$$X_{11} : +10 -4 +18 -20 +7 -2 = +9$$

$$X_{21} : +12 -4 +18 -20 = +6$$

$$X_{32} : +14 -18 +20 -7 = +9$$

$$X_{13} : +20 -2 +7 -9 = +16$$

$$X_{33} : +16 -18 +20 -9 = +9$$

$$X_{14} = +11 - 2 + 7 - 20 = -4$$

14.1.1.Daha Gelişmiş Çözümlerin Bulunması ve Optimallik

Boş hücrelerle ilgili bütün değerler hesaplandığında, bu sonuçlara göre maliyetteki en büyük azalmayı boş hücre değerlerinden en büyük negatif değere sahip olan hücre sağlar. Yani örneğimize bakacak olursak X_{14} hücresi negatif değer aldığı için (burada tek negatif değer çıkmıştır, birden fazla negatif değer çıksaydı mutlak değerce en büyük olan negatif değer seçilecekti) maliyette bir azalma sağlar. O halde bir sonraki dağıtım planında bu boş hücreye atama yapılır:

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	10 (-)	2 15-W	20 (+)	11 +W	15
D2	12 (+)	7 0+W	9 (-)	20 10-W	25
D3	4 5	14	16	18 5	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

Bir hücrede negatif atama olamayacağı için W 'nin alabileceği en büyük değer 10 birimdir. Bu durumda yeni atama tablosu;

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	10	2 5	20	11 10	15
D2	12	7 10	9 15	20	25
D3	4 5	14	16	18 5	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

Optimallik kontrolü için boş hücre değerleri kontrol edilirse;

$$X_{11} = 13$$

$$X_{21} = 10$$

$$X_{32} = 5$$

$$X_{13} = 16$$

$$X_{33} = 5$$

$$X_{24} = 4$$

değerlerinin hepsi pozitif olduğu için optimum çözüm elde edilmiştir. Yani optimum maliyet;

$$Z_{\min} = 5.4 + 5.2 + 10.7 + 15.9 + 10.11 + 5.18 = 435 \text{ Para Birimi}$$

olur.

14.2. MO-Dİ (Modified Distribution) Yöntemi

Atlama taşı yöntemine benzer, ancak boş hücrelerin değerlendirilmesi işlemi burada daha etkin olarak yapılmaktadır. İki yöntem arasındaki asıl farkı, atlama taşı yönteminde boş hücre değerleri hesaplamak için çevrimlerden yararlanırken MO-Dİ yönteminde bu işlemin bazı indeksler yardımıyla yapılmasıdır. Yani bu işlemde boş hücreler için çevrimler çizmeye gerek yoktur.

Başlangıç tablosu kuzeybatı köşesi yöntemiyle oluşturulur. Satır değerlerini R_i , sütun değerlerini K_j göstermek üzere;

$$C_{ij} = R_i + K_j \quad (\text{Taş bulunan hücreler için})$$

eşitliğinden yararlanılır. Boş hücrelere yapılacak dağıtımların toplam maliyette bir azalma sağlayıp sağlamayacağı;

$$A_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j \quad (\text{Düzelme indeksi})$$

ifadesi ile araştırılır. Bütün düzelme indeksleri pozitif veya 0 olunca optimum çözüme ulaşılmış demektir. Yine örneğimizi ele alacak olursak;

		$K_1 = 10$	$K_2 = 2$	$K_3 = 4$	$K_4 = 15$	Depo Kapasiteleri
		P1	P2	P3	P4	
$R_1 = 0$	D1	5	10	20	11	15
$R_2 = 5$	D2	12	7	9	20	25
$R_3 = 3$	D3	4	14	16	18	10
Pazar Talepleri		5	15	15	15	50

$$Z_{\min} = 5.10 + 10.2 + 5.7 + 15.9 + 5.20 + 10.18 = 520$$

Taş bulunan hücrelerde $C_{ij} = R_i + K_j$ eşitliği kullanılırsa aşağıdaki değerler elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için değişkenlerden birine herhangi bir değer verilir ve diğer değişkenler buna göre hesaplanır. Genellikle $R_1 = 0$ olarak alınıp çözüme başlanır.

$$\begin{array}{lll}
 C_{11} \text{ için } R_1 = 0 \text{ ise} & 10 = 0 + 10 & \text{eşitliğinden } K_1 = 10 \\
 C_{12} \text{ için } R_1 = 0 \text{ ise} & 2 = 0 + 2 & \text{eşitliğinden } K_2 = 2 \\
 C_{22} \text{ için } K_2 = 2 \text{ ise} & 7 = 5 + 2 & \text{eşitliğinden } R_2 = 5 \\
 C_{23} \text{ için } R_2 = 5 \text{ ise} & 9 = 5 + 4 & \text{eşitliğinden } K_3 = 4
 \end{array}$$

C_{24} için için $R_2 = 5$ ise $20 = 5 + 15$ eşitliğinden $K_4 = 15$

C_{34} için $K_4 = 15$ ise $18 = 3 + 15$ eşitliğinden $R_3 = 3$

Düzelme indeksi A değerleri $A_{ij} = C_{ij} - R_i - K_j$ denklemi ile boş hücreler için hesaplanır;

$$A_{13} = 20 - 0 - 4 = 16$$

$$A_{14} = 11 - 0 - 15 = -4$$

$$A_{21} = 12 - 5 - 10 = -3$$

$$A_{31} = 4 - 3 - 10 = -9$$

$$A_{32} = 14 - 3 - 2 = 9$$

$$A_{33} = 16 - 3 - 4 = 9$$

Bir sonraki dağıtım planına geçerken yapılacak işlemler atlama taşındaki gibidir. Yani boş hücrelerden mutlak değerce en büyük negatif olan esas alınarak, bu boş hücrenin çevrimi üzerinde işlemler yapılır. Buna göre, MO-DI yönteminde her çözüm kademesinde tek bir çevrime gerek olacaktır. -9 değerine sahip X_{31} hücresine atama yapılırsa yeni tablomuz;

	P1	P2	P3	P4	Depo Kapasiteleri
D1	10	2	20	11	15
D2	12	7	9	20	25
D3	4	14	16	18	10
Pazar Talepleri	5	15	15	15	50

$$Z_{\min} = 5.10 + 15.2 + 0.7 + 15.9 + 10.20 + 5.18 = 475$$

Toplam maliyette $520 - 475 = 45$ para birimi azalma olmuştur. İkinci dağıtım planı yapılırsa yeni tablomuz;

		$K_1 = 1$		$K_2 = 2$		$K_3 = 4$		$K_4 = 15$		Depo Kapasiteleri
		P1		P2		P3		P4		
$R_1 = 0$	D1	10	15	2		20		11	15	
$R_2 = 5$	D2	12	0	7		9		20	25	
$R_3 = 3$	D3	4	5	14		16		18	10	
Pazar Talepleri		5	5	15		15		15	50	

$$A_{11} = 10 - 0 - 1 = 9$$

$$A_{13} = 20 - 0 - 4 = 16$$

$$A_{14} = 11 - 0 - 15 = -4$$

$$A_{21} = 12 - 5 - 1 = 6$$

$$A_{32} = 14 - 3 - 2 = 9$$

$$A_{33} = 16 - 3 - 4 = 9$$

Yeni dağıtım planında X_{14} hücresine atama yapıldığında elde edilen yeni tablo;

	P1		P2		P3		P4		Depo Kapasiteleri
D1		10		2		20		11	15
			5				10		
D2		12		7		9		20	25
			10		15				
D3		4		14		16		18	10
	5						5		
Pazar Talepleri	5		15		15		15		50

$$Z_{\min} = 5.4 + 5.2 + 10.7 + 15.9 + 10.11 + 0.20 + 5.18 = 435$$

Yeni çözüm $475 - 435 = 40$ para birimi azalma sağlamıştır. R_i , K_j ve A_{ij} değerleri yeni tablo için hesaplanırsa;

		$K_1 = -3$	$K_2 = 2$	$K_3 = 4$	$K_4 = 11$	Depo Kapasiteleri
		P1	P2	P3	P4	
$R_1 = 0$	D1	10	2	20	11	15
$R_2 = 5$	D2	12	7	9	20	25
$R_3 = 7$	D3	4	14	16	18	10
Pazar Talepleri		5	15	15	15	50

$$A_{11} = 10 - 0 - (-3) = 13$$

$$A_{13} = 20 - 0 - 4 = 16$$

$$A_{21} = 12 - 5 - (-3) = 10$$

$$A_{24} = 20 - 5 - 11 = 4$$

$$A_{32} = 14 - 7 - 2 = 5$$

$$A_{33} = 16 - 7 - 4 = 5$$

değerleri bulunacaktır. Düzeltme indeksleri içinde negatif değer kalmadığına göre bu dağıtım planı optimum çözümü göstermektedir.

14.3. Ulaştırma Problemlerinde Dejenerasyon

Bir ulaştırma probleminin herhangi bir dağıtım planında $(m + n - 1)$ taş bulunuyorsa her boş hücre için bir çevrim çizilebilir veya bütün R_i ve K_j değerleri hesaplanabilir. Bu kurala uymayan problemlere "dejenere (bozulmuş)" denir.

Bu durum iki şekilde olabilir:

1. Taş sayısının $(m + n - 1)$ değerinden büyük olması durumuna sadece başlangıç çözümünde rastlanır. Bunun sebebi başlangıç dağıtımının yanlış yapılmış olması ya da problemin yanlış formüle edilmiş olmasıdır. Bu durumda başlangıç dağıtımının yeniden yapılması gerekir.

2. Taş sayısının $(m + n - 1)$ değerinden küçük olması durumunda taş sayısı işlemlerin uygulanabilmesi için yetersizdir. Bu tür dejenerasyona başlangıç dağıtım planında veya çözümün herhangi bir aşamasında rastlanabilir. Bu tür dejenerasyonun giderilebilmesi için 0 değerli bir taş eklenir. Bu taşın ekleneceği hücre ise taşların basamak oluşturacak şekilde sıralanmasına uygun hücre ya da en küçük maliyetli hücre olabilir. Optimum çözümde bile dejenerasyon bulunabilir.

14.4. Yasaklanmış Yol Problemi

Pratikte her zaman her bir depodan her bir pazara dağıtım yapılması mümkün değildir. Çünkü bazı depolardan bazı pazarlara ulaşım mümkün değildir veya çok pahalıdır. Dolayısıyla bu depolar ve pazarlar arasında taşıma yapma olanağı bulunmaz. Böylece, bu tür yasaklanmış yollar, ulaştırma problemine yeni sınırlamalar getirmektedir. Örneğin, k . depo ile l . pazar arasındaki taşıma $X_{kl} = 0$ olması istenir.

Böyle bir ulaştırma probleminde Simpleks yönteminde kullanılan M değeri ile aynı manadaki çok yüksek bir maliyete sahip M değeri atama yapılması istenmeyen X_{kl} hücresine birim maliyet olarak yazılır. Birim ulaştırma maliyeti M olan bir hücreye yapılacak bir birimlik dağıtım bile ulaştırma maliyetini aşırı derecede arttıracığından ulaştırma problemlerinin çözüm yöntemleri bu hücrelerin boş kalmasını garantileyecektir.

Uygulamalar

Üretici	Kaynak	Tüketici	Talep
1. Adana	150	Ankara	200
2. Mersin	175	İzmir	100
3. Antalya	275	İstanbul	300

Kaynak	Tüketici		
	Ankara	İzmir	İstanbul
Adana	6	8	10
Mersin	7	11	11
Antalya	4	5	12

$$\text{Min } Z = 6x_{11} + 8x_{12} + 10x_{13} + 7x_{21} + 11x_{22} + 11x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 12x_{33}$$

Uygulama Soruları

Doğrusal Programlama ile transport problemi modellenebilir mi? düşünün...

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde transport problemlerinin ataması yapıldıktan sonra optimalliğini test edecek yöntemler üzerinde durulmuştur. Atlama Taşı Yöntemi ve MO-Dİ Yöntemi ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bölüm Soruları

1) Bir çimento şirketi, ürettiği çimentoyu 3 farklı tesisten 3 farklı inşaat bölgesine ürün sevk etmektedir. Her üç tesise ilişkin kapasite verileri ve bu tesislerden istenilen miktarlar ve birim ulaştırma maliyetleri (TL/ton) verilmektedir. Vogel Yaklaşımı kullanılarak atama yapılır ise, ilk olarak hangi hücreye atama yapılır?

TESİSLER	X	Y	Z	ARZ
A	8	5	6	120
B	15	10	12	80
C	3	9	10	80
TALEP	150	70	60	280

- a) $A \rightarrow X$
- b) $A \rightarrow Y$
- c) $C \rightarrow X$
- d) $B \rightarrow Z$
- e) $C \rightarrow Y$

2) Aşağıdaki yöntemlerden hangisi ulaştırma problemlerinde yapılan dağıtımın optimal olup olmadığını test eder?

- a) MO-Dİ Yöntemi
- b) Vogel Atama Metodu
- c) Russel Atama Metodu
- d) Kestirme Dağıtım
- e) Minimum Maliyetli Hücre

3) Aşağıdaki yöntemlerden hangisi ulaştırma problemlerinde başlangıç çözümünü bulmak için kullanılmaz?

- a) Kuzey-Batı Köşe Yöntemi
- b) En Düşük Maliyetli Hücreler Yöntemi
- c) Satır veya Sütun En Küçüğü Yöntemi
- d) Vogel Yaklaşım Yöntemi
- e) Satır veya Sütun En Büyüğü Yöntemi

4) Aşağıda verilen ulaştırma tablosunun En Düşük Maliyetli Hücreler Yöntemi ile atama yapıldığında ilk atama hangi hücreye gerçekleşir?

	X	Y	Z	T	Arzlar
A	5	2	10	11	5

B	9	4	1	6	10
C	3	8	7	12	15
Talepler	12	8	4	6	

- a) $A \rightarrow X$
- b) $A \rightarrow Y$
- c) $C \rightarrow X$
- d) $B \rightarrow Z$
- e) $C \rightarrow Y$

5) Ulaştırma probleminin çözümünde Kuzey-Batı yöntemi kullanılacaksa atama yapmaya hangi hücreden başlanır?

- a) Sol – alt köşeden başlanır
- b) Sağ – Üst köşeden
- c) En yüksek maliyete sahip hücreden
- d) En düşük maliyete sahip hücreden
- e) Sol – Üst köşeden

6) Vogel yaklaşım yönteminde (VAM) ilk aşama aşağıdakilerden hangisidir?

- a) En küçük maliyetli hücreye atama yapılır.
- b) Verilen problemde fark satırı ve fark sütun sütunu oluşturulur
- c) En yüksek maliyetli hücreye atama yapılır
- d) Fark satırında ve sütununda bulunan değerler sıraya dizilir
- e) Sol üst köşeden başlanarak atama yapılır

7) Aşağıdakilerden hangisi ulaştırma problemlerinde bir atama yöntemi değildir?

- a) Vogel Atama Metodu
- b) Kuzey - Batı Köşe Yöntemi
- c) MO–Dİ
- d) Russel Atama Yöntemi
- e) Düşük Maliyetli Hücre Atama Yöntemi

8) Aşağıdakilerden hangisi ulaştırma problemlerinde optimallik testi için kullanılan bir yöntemdir?

- a) Vogel Atama Metodu
- b) Kuzey - Batı Köşe Yöntemi
- c) Russel Atama Yöntemi
- d) Düşük Maliyetli Hücre Atama Yöntemi
- e) Atlama Taşı Yöntemi (Boş Hücre Çevrimlerinin Çizilmesi)

9) Aşağıda bir ulaştırma problemi verilmektedir. Dejenerasyon (bozulma) durumu yaşanmaması için kaç dolu hücre olmalıdır?

TESİSLER	P1	P2	P3	P4	ARZ
D1	8	5	6	6	140
D2	15	10	7	12	80
D3	3	9	8	10	80
TALEP	150	70	20	60	300

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

10) Aşağıda bir ulaştırma problemi verilmektedir. Eğer dejenerasyon (bozulma = $m + n - 1$ dolu hücre bulunmaması) durumu yaşanmadan 6 hücreye atama yapılmış ise, optimallik testi için kaç adet boş hücre çevrimi çizilir?

Pazar Depo	P1	P2	P3	P4	ARZ
D1	8	3	6	6	100
D2	5	10	7	12	100
D3	4	9	8	10	100
TALEP	150	70	20	60	300

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

Cevaplar:

1) c, 2) a, 3) e, 4) d, 5) e, 6) b, 7) c, 8) e, 9) d, 10) c

KAYNAKÇA

- Bülent Kobu, İşletme Matematiği, Altıncı Baskı, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 1997
- Dennis G. Zill, Calculus, PWS Publishing Company, Boston, 1993
- Ergün Eroğlu, İşletme Matematiği Yayınlanmamış Ders Notları, İÜ İşletme Fakültesi, İstanbul, 2012
- Ernest F. Haeussler, Richard S. Paul, Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics and the Life and Social Sciences, Tenth Edition, Prentice Hall, USA, 2002
- Howard Anton, Elementary Linear Algebra, Fourth Edition, John Wiley and sons, Canada, 1984
- Jean E. Draper, Jane S. Klingman, Mathematical Analysis Business and Economic Applications, Harper and Row, Tokyo, 1967
- Laurence D. Hoffmann, Gerald L. Bradley : Calculus for Business, Economics and the Social and Life Sciences, McGraw Hill, Fourth Edition, USA, 1989
- M. Erdal Balaban, Temel Matematik ve İşletme Uygulamaları, Literatür Yayınları, İstanbul, 2004
- Mond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen, Calculus for Business, Economics, Life Sciences and Social Sciences, 12. Basımdan Çeviri, Nobel Yayınevi, 2011
- Orhan Özer, Yalçın Küçük, M. Üreyen, Nevin Orhun, Genel Matematik, Anadolu Üniversitesi Yayını, 6. Baskı, Eskişehir, 2006
- Yılmaz Tulunay, İşletme Matematiği, Nobel Yayın Dağıtım, 4. Baskı, Ankara, 2006
- KOBU, Bülent, İşletme Matematiği, 6. Baskı, İstanbul, Avcıol Basım Yayın, 1997.
- ÖZTÜRK, Ahmet, ÖZTÜRK, Yöneylem Araştırması, 7. Baskı, Bursa, Ekin Kitabevi Yayınları, 2001.
- TÜTEK, Hülya H. ve GÜMÜŞOĞLU, Şevkinaz, Sayısal Yöntemler, 3. Baskı, İstanbul, Beta Basım Yayın Dağıtım Yayın No: 1063, İşletme-Ekonomi Dizisi:47, 2000.
- ÜNSAL, Fahri M., RÜZGAR, Bahattin, Sayısal Yöntemler, Cilt 1, İstanbul, Türkmen Kitabevi, 2000.