

MATRIS 1

MATRİSLER

m ve n pozitif tam sayılar, i ve j sayma sayıları, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ve $a_{ij} \in R$ olmak üzere,

m tane satırdan, n tane sütundan oluşan,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

tablosuna, $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ veya $A_{m \times n}$ şeklinde gösterilir.

Burada a_{ij} , matrisin i . Satırı ve j . sütunda bulunan elemanıdır.

Örnek 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

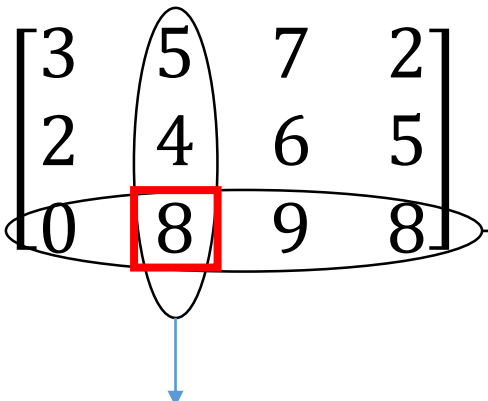
A matrisinde 3. satır 2. sütundaki (a_{32}) eleman nedir?

Çözüm 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

2. sütun

3. satır



The diagram shows a 3x4 matrix A. The second column is highlighted with a vertical oval, and the third row is highlighted with a horizontal oval. The element at the intersection of the second column and third row, which is 8, is enclosed in a red square. A blue arrow points from the text '2. sütun' to the second column, and a black arrow points from the text '3. satır' to the third row.

3. Satır 2. sütun elemanı 8'dir. ($a_{32} = 8$)

Örnek 2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$ matrisi veriliyor. Buna göre, m.n kaçtır?

Çözüm 2

A matrisi 2 satır ve 3 sütundan oluştuğu için, 2x3 boyutlu bir matristir.

Yani $A_{m \times n} = A_{2 \times 3}$ olur.

O halde $m=2$ ve $n=3$ olmalıdır. $m \cdot n = 2 \cdot 3 = 6$ olur.

Örnek 3

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 & 4 \\ 1 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \text{matrisi veriliyor.}$$

$(a_{11})^2 + 2(a_{22})^4 - 3a_{13}$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm 3

$a_{11} = \sqrt{3}$, $a_{22} = \sqrt{2}$, $a_{13} = 4$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(a_{11})^2 + 2(a_{22})^4 - 3a_{13} &= (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{2})^4 - 3 \cdot 4 \\ &= 3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 4 = -1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

KARE MATRİS

Satır ve sütun sayıları eşit olan matrislere Kare Matris denir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ için $m = n$ ise kare matristir.

Örnek 4

$$A = [a_{ij}]_{m \times 2} \quad B = [b_{ij}]_{3 \times n}$$

Matrisleri birer kare matris olduğuna göre $m \cdot n$ kaçtır?

Çözüm 4

$A = [a_{ij}]_{m \times 2}$ matrisi kare matris olduğu için $m = 2$,
 $B = [b_{ij}]_{3 \times n}$ matrisi kare matris olduğu için $n = 3$ olur.

$m \cdot n = 2 \cdot 3 = 6$ olarak bulunur.

Not

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & \dots & \cancel{a_{1n}} \\ a_{11} & \cancel{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \cancel{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Yedek köşegen Asal köşegen

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ elemanlarının oluşturduğu köşegene asal köşegen,
 $a_{1n}, a_{22}, \dots, a_{m1}$ elemanlarının oluşturduğu köşegene yedek köşegen
denir.

Örnek 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & y \\ 1 & -1 & 6 \\ x & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrisinin asal köşegenler üzerindeki elemanları ile yedek köşegen üzerindeki elemanları toplamı birbirine eşit olduğuna göre,

$x + y$ kaçtır?

Çözüm 5

Asal köşegen elemanları,

$a_{11} = 0$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 5$ tir.

Toplamları $0 - 1 + 5 = 4$ olur.

Yedek köşegen elemanları,

$a_{31} = y$, $a_{22} = -1$, $a_{13} = x$ tir.

Toplamları $y - 1 + x$ olur.

Toplamlar birbirine eşit olduğu için

$x + y - 1 = 4 \rightarrow x + y = 5$ olur.

Tanım

Bütün elemanları sıfır olan matrise sıfır matris denir ve O harfi ile gösterilir.

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisi } 3 \times 4 \text{ tipinde bir sıfır matristir.}$$

Tanım

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde asal köşegen üzerindeki elemanların dışında diğer elemanları sıfır ise bu tip kare matrislere köşegen matris denir.

Örneğin;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi 3x3 tipinde (3. mertebeden) bir kare matristir.

Tanım

Asal köşegenin üstünde kalan bütün elemanları sıfır olan kare matrislere alt üçgen matris denir.

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir alt üçgen matristir.}$$

Tanım

Asal köşegenin altında kalan bütün elemanları sıfır olan kare matrislere üst üçgen matris denir.

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir üst üçgen matristir.}$$

BİRİM MATRİS

Asal köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanlar sıfır olan kare matrislere birim matris denir. $n \times n$ biçimindeki bir birim matris I_n ile gösterilir.

Örneğin;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi 3x3 boyutlu birim matristir. I_3 şeklinde gösterilir.

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

Boyutları aynı olan iki matrisin aynı indisli bütün elemanları birbirine eşit ise, bu matrislere eşit matrisler denir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinde her i, j için

$a_{ij} = b_{ij}$ ise A ile B matrisleri eşittir denir ve

$A = B$ şeklinde gösterilir.

Örnek 6

$$A = \begin{bmatrix} a + 3 & 4 \\ b + 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & c + 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor. $A = B$ olduğuna göre $a + b + c$ kaçtır?

Çözüm 6

$A = B$ ise aynı indisli terimler eşittir.

$$a + 3 = 6 \implies a = 3$$

$$b + 1 = 3 \implies b = 2$$

$$c + 1 = 5 \implies c = 4$$

O halde, $a + b + c = 3 + 2 + 4 = 9$ olur.

İKİ MATRİSİN TOPLAMI VE FARKI

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ olsun. $A \mp B = [a_{ij} \mp b_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde bulunur. Yani, matrislerde toplama veya çıkarma işlemi yapılırken, aynı indisli elemanlar toplanır veya çıkarılır.

Örnek 7

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $A + B$ toplamını bulalım.

Çözüm 7

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2 & 5 - 3 \\ 0 + 4 & 2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

ÖZELLİKLER

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ve $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri verilsin.

1. $A + B = B + A$ (Değişme özelliği)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Birleşme özelliği)
3. $A + O = O + A = A$ olduğundan, O (sıfır matrisi) toplamanın birim (etkisiz) elemanıdır.
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$ olduğundan A matrisinin toplama işlemine göre tersi $-A$ matrisidir.

Örnek 8

$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin toplama işlemine göre tersini bulalım.

Çözüm 8

$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin toplama işlemine göre tersi $-A$ matrisidir.

O da, $-A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ olur.

ÖZELLİKLER

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilsin,

k reel sayı olmak üzere

$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$ olur.

A ve B boyutları aynı matrisler,

k ve l reel sayı olmak üzere

$$1. \quad k \cdot (A \mp B) = k \cdot A \mp k \cdot B$$

$$2. \quad (k \mp l) \cdot A = k \cdot A \mp l \cdot A \text{ dır.}$$

Örnek 9

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $2A + 3B$ toplamını bulalım.

Çözüm 9

$$\begin{aligned} 2A + 3B &= 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 + 6 & 0 - 6 \\ 6 + 9 & 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 15 & 2 \end{bmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

MATRİSLERİN ÇARPIMI

Matrislerinin çarpılabilmesi için

A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olmalıdır.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} \text{ dir.}$$

A matrisinin i . satırı ile B matrisinin k . sütunundaki elemanlar karşılıklı olarak çarpılıp bu çarpımlar toplanırsa, $A \cdot B = C$ matrisinin i . satır ve k . sütundaki elemanı, yani C_{ik} elde edilir.

Örnek 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $A \cdot B$ çarpımını bulalım.

Çözüm 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 + 8 & 1 + 0 & 2 - 2 \\ 0 + 16 & 3 + 0 & 6 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 16 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖZELLİKLER

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$ (Değişme özelliği yoktur.)
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Birleşme özelliği)
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Dağılma özelliği)
4. $A \cdot I = I \cdot A = A$ (I etkisiz elemandır)
5. $A \cdot O = O \cdot A = O$ (O yutan elemandır)
6. $A \neq O$ ve $B \neq O$ olduğu halde $A \cdot B = O$ olabilir.
7. $A \cdot B = B$ olduğu halde $A = I$ olmayabilir.

KARE MATRİSİN KUVVETLERİ

$A_{n \times n}$ kare matrisi verilsin.

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$$

$$A^m \cdot A^n = A^{(m+n)}$$

$$(A^m)^n = A^{(m \cdot n)} \text{ dir.}$$

Birim matrisin bütün kuvvetleri kendisine eşittir. Yani $I^n = I$ dir.

Not

2x2 boyutundaki bazı özel matrislerin büyük kuvvetleri alınırken aşağıdaki ifadeler kolaylık sağlayabilir.

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \cdot a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2. \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n \cdot a & 1 \end{bmatrix} \\ 3. \quad A &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ ise } A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix} \\ 4. \quad A &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \text{ ise } A^2 = a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 5. \quad A &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ ise } A^2 = a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Örnek 11

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{20} matrisini bulalım.

Çözüm 11

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 - 3 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 9 \cdot I \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{20} &= (A^2)^{10} = (9 \cdot I)^{10} = 9^{10} \cdot I^{10} \\ &= 3^{20} \cdot I = 3^{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } f(x) = x^2 - 3x + 4$$

olduğuna göre, $f(A)$ 'yı bulalım.

Çözüm 12

$$f(A) = A^2 - 3A + 4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 - 3 + 4 & 2 - 6 + 0 \\ -1 + 3 + 0 & -2 - 0 + 4 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$