İNTEGRAL

BELİRSİZ İNTEGRAL

Diferansiyel Kavramı:

$f: A \to R$ fonksiyonu her $x \in A$ için türevli ise

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun türevi denir.

$$df(x) = f'(x)dx$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Bir fonksiyonun diferansiyeli fonksiyonun türevi ile bağımsız değişkeninin çarpımına eşittir.

$y = f(x)$ ise $dy = f'(x)dx$

Örnek 1

Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyelini bulalım.

$y = x^2$

$y = 3x^2 - x$

Çözüm 1

$y = x^2$ ise $dy = 2xdx$

$y = 3x^2 - x$ ise $dy = (6x - 1)dx$

İNTEGRAL ALMA

Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan fonksiyonu bulma işlemine integral alma denir.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

biçiminde gösterilir.

Buradaki c sayısının niçin geldiğini ifade edelim.

$$d(x^2) = 2xdx$$

$$d(x^2 + 10) = 2xdx$$

$$d(x^2 - 1) = 2xdx$$

$$d(x^2 - 11) = 2xdx$$

Görüldüğü gibi diferansiyeli $2xdx$ olan sonsuz tane fonksiyon yazılabilir. Çünkü x^2 nin yanında bulunan sabitin türevi 0 dır.

O halde

$$\int 2xdx = x^2 + c$$

şeklinde gösterilir.

Burada;

- c sayısına integral sabiti denir.
- $\int$ simgesine integral alma işareti denir.
- F(x) fonksiyonuna f(x) fonksiyonunun ilkeli denir.
- f(x) fonksiyonuna integrant denir.

Not

İntegral alma işleminde türevi alınmış fonksiyonu bulmaya çalıştığımıza dikkat edelim.

Başka bir ifadeyle

$\int f(x)dx = F(x) + c$ ise $(F(x) + c)' = f(x)$ olur.

Örnek 2

$$\int x \cdot f(x)dx = x^3 - 2x^2 + 4$$

olduğuna göre, $\boldsymbol{f(x)}$ in eşitini bulalım.

Çözüm 2

$\int x \cdot f(x)dx = x^3 - 2x^2 + 4$ ise

$x \cdot f(x) = (x^3 - 2x^2 + 4)'$

$x \cdot f(x) = 3x^2 - 4x$

$f(x) = 3x - 4$ olur.

Belirsiz İntegralin Özellikleri

1) Belirsiz integralin türevi integranta eşittir.

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x) \cdot dx\right) = f(x)$$

Örnek 3

$$f(x) = \int (2x^2 + 3x - 5)dx$$

fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm 3

$f(x) = \int (2x^2 + 3x - 5)dx$ ise

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int (2x^2 + 3x - 5)dx\right)$

$f'(x) = 2x^2 + 3x - 5$ olur.

Belirsiz İntegralin Özellikleri

2) Belirsiz integralin diferansiyeli integral altındaki ifadesidir.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Belirsiz İntegralin Özellikleri

3) Bir fonksiyonun diferansiyelinin integrali fonksiyon ile bir c sabitinin toplamına eşittir.

$$\int d(f(x)) = f(x) + c$$

Belirsiz İntegralin Özellikleri

4) İntegral içerisindeki sabit sayı çarpanı integral dışına alınabilir.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Belirsiz İntegralin Özellikleri

5) İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali, integraller toplamına veya farkına eşittir.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

İNTEGRAL ALMA

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Örneğin:

$$\int -5dx = -5 \cdot \int 1 \cdot dx = -5 \cdot \int x^0 \cdot dx = -5x + c$$

$$\int xdx = \int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

İNTEGRAL ALMA KURALLARI

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$

3) $\int e^x dx = e^x + c$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

İNTEGRAL ALMA KURALLARI

7) $\int (1+\tan^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\, dx$

$= \tan x + c$

$\left(x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2} \text{ ve } k \in z \right)$

8) $\int (1+\cot^2 x)\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= -\cot x + c$

$(x \neq k\pi \text{ ve } k \in z)$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

$(-1 < x < 1)$

Örnek 4

$$\int (x^3 + 4x^2 + 1)dx$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm 4

$$\int (x^3 + 4x^2 + 1)dx = \int x^3 dx + \int 4x^2 dx + \int 1dx$$

$$= \int x^3 dx + 4\int x^2 dx + \int 1dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$

$\int (x^3 + 4x^2 + 1)dx = \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} + x + c$ olur.

İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

1) Değişken Değiştirme Yöntemi

$\int f(x)dx$ integrali daha önce verilen integral alma kuralları ile alınamıyorsa burada $x = g(u)$ dönüşümü yapılarak integral basitleştirilmiş ve verilen kurallardan birine indirgenmiş olur. Dönüşüm yapılırken $f(x)$ fonksiyonu ve dx diferansiyeli u ya bağlı yazılır.

$\int f(x)dx$ integralinde
$x = g(u)$ dönüşümü yapılırsa,

$x = g(u)$ ise $dx = g'(u) \cdot du$ olur.

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

integrali elde edilir.

Örnek 5

$\int (3x+2)^2 dx$

İntegralinin sonucunu bulalım.

Çözüm 5

$\int (3x+2)^2 dx$ integralinde $3x+2=u$ dönüşümü yapalım.

$3x+2=u$ ise her iki tarafın diferansiyelini alalım.

$d(3x+2)=d(u)$

$3dx=du$ ve $dx=\frac{du}{3}$ olur.

$\int (3x+2)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{2+1}}{2+1}+c = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{3}+c$

$\int (3x+2)^2 dx = \frac{1}{9}(3x+2)^3 + c$ olur.

2) Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integralini hesaplarken $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının derecelerine bakılır.

$a)$ $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$ ise pay paydaya bölünür.

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)} \right] dx$ ifadesine dönüştürülerek integral alınır.

Örnek 6

$$\int \frac{3x-1}{x+1}\,dx$$

integralinin sonucunu bulalım.

Çözüm 6

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -\ \ 3x+3 & 3 \\ \hline -4 & \end{array} \qquad \frac{3x-1}{x+1} = 3 - \frac{4}{x+1}$$

$$\int \frac{3x-1}{x+1}\,dx = \int \left[3 - \frac{4}{x+1}\right] dx = 3\int 1dx - 4\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\int \frac{3x-1}{x+1}\,dx = 3x - 4\ln|x+1| + c$$

2) Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integralini hesaplarken $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının derecelerine bakılır.

$b)\ der[P(x)] < der[Q(x)]$ ise $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesi basit kesirlere ayırılır.

Örnek 7

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$$

integralinin sonucunu bulalım.

Çözüm 7

$\frac{2}{x^2-1}$ ifadesini basit kesirlere ayıralım.

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

$2 = A(x+1) + B(x-1)$

$x = 1$ için $A = 1$

$x = -1$ için $B = -1$

$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right] dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$

$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

BELİRLİ İNTEGRAL

$f: [a, b] \rightarrow R$ integrali alınabilen bir fonksiyon olsun.

$\int f(x)dx = F(x) + c$ olacak biçimde $F: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu varsa:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır.

Bu integralde a integralin alt sınırı, b ise integralin üst sınırıdır.

Örnek 8

$\int_1^2 3x^2 dx$

integralinin değerini bulalım.

Çözüm 8

$$\int_1^2 3x^2dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = x^3\Bigg|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7 \text{ olur.}$$

Belirli İntegralin Özellikleri

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrali alınabilen fonksiyonlar olsun.

1) İntegralde alt sınır ve üst sınır değeri aynı ise integral sıfırıdır.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) İntegral içinde sabit sayı integral dışına atılabilir.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Belirli İntegralin Özellikleri

3) İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali, integralleri toplamına veya farkına eşittir.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

4) İntegralde sınırlar yer değiştirirse, integralin işareti değişir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Belirli İntegralin Özellikleri

5) $a < c < b$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

şeklinde yazılabilir.