POLİNOMLAR

TANIMLAR

a_0, a_1, a_2 …….. a_n birer reel sayı ve 0, 1, 2 ………. N birer doğal sayı olmak üzere,

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

şeklindeki ifadelere x değişkenine göre düzenlenmiş reel katsayılı polinom (çok terimli) denir.

a_nx^n , $a_{n-1}x^{n-1}$, ……………, a_2x^2 , a_1x , a_0

ifadelerine polinomun terimleri,

a_n , a_{n-1} , ……………, a_2 , a_1 , a_0

reel sayılarına polinomun katsayıları,

a_n reel sayısına polinomun başkatsayısı,

a_0 reel sayısına polinomun sabit terimi denir.

TANIMLAR

P(x) polinomundaki x in kuvvetlerinden en büyük olan n doğal sayısına polinomun derecesi denir ve der[P(x)] = n şeklinde gösterilir.

Not: P(x) ifadesinin polinom olabilmesi için x'in üslerinin hepsinin doğal sayı olması şarttır.

Örnek 1

$P(x) = -3x^4 + 2x^3 - 72x + 5$

ifadesini inceleyelim :

Çözüm 1

x in kuvvetleri (4,3 ve 1) doğal sayı olduğundan P(x) polinomdur.

P(x) in terimleri $-3x^4$,$2x^3$, -72x, 5 tir.

P(x) in katsayıları -3, 2, -72,5 tir.

x in kuvvetlerinden en büyük olanı 4 olduğundan,

P(x) in derecesi 4 tür. Yani der [P(x)] = 4

P(x) in başkatsayısı, $-3x^4$ teriminin katsayısı olan (-3) tür.

P(x) in sabit terimi ise 5’ tir.

Örnek 2

$$Q(x) = 4x^3 - \sqrt[3]{2}x^2 + 5x^{1/2} + 2$$

ifadesinin polinom olup olmadığını bulalım.

Çözüm 2

$$Q(x) = 4x^3 - \sqrt[3]{2}x^2 + 5x^{1/2} + 2$$

ifadesinde x in kuvvetlerinden 3 ve 2 doğal sayı fakat $\frac{1}{2}$ doğal sayı değil.
O halde; Q(x) polinom değildir.

Örnek 3

$P(x) = (a - 2)x^5 + (b + 3)x^4 + 3x^{c-4} + 8$

çok terimlisi üçüncü dereceden bir polinom olduğuna göre, a + b + c kaçtır?

Çözüm 3

P(x) üçüncü dereceden bir polinom olduğuna göre,

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$

$c - 4 = 3 \Rightarrow c = 7$ olmalıdır.

O halde;

$a + b + c = 2 + (-3) + 7 = 6$ bulunur.

Not: Değişken sayısı birden fazla olan P(x, y), P(x, y, z) şeklindeki polinomlara çok$_f$değişkenli polinom denir.

Bu polinomlarda her bir terimdeki üsler toplamından en büyük olanı polinomun derecesini verir.

Örnek 4

$P(x, y) = 3x^2 y^5 - 4x^6y^5 + 6x^3 - y^9 + 5$

polinomunun derecesi kaçtır?

Çözüm 4

$3x^2y^5$ teriminin derecesi 2+5=7,

$-4x^6y^5$ teriminin derecesi 6+5=11,

$6x^3$ teriminin derecesi 3,

$-y^9$ teriminin derecesi 9,

5 teriminin derecesi 0,

O halde bu değerlerden en büyük olanı 11 olduğuna göre,

der [P(x, y)] = 11 bulunur.

SABİT POLİNOM

$P(x) = c$, $c \in R$ ve $c \neq 0$

şeklindeki polinomlara sabit polinom denir.

Örnek 5

$P(x) = (m - 4)x^3 + (n - 3)x^2 + (k - 2)\,x + 5$

ifadesi sabit polinom olduğuna göre m . n . k kaçtır?

Çözüm 5

P(x) in sabit polinom olması için, bütün x değişkenlerinin katsayıları 0(sıfır) olmalıdır. Yani;

$m-4 = 0 \Rightarrow m = 4$

$n-3 = 0 \Rightarrow n = 3$

$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$ olmalıdır.

O halde $m. n. k = 4. 3. 2 = 24$ bulunur.

SIFIR POLİNOMU

$P(x) = 0$ şeklindeki polinomlara sıfır polinomu denir.

$P(x) = 0 = 0.x = 0.\ x^2 = 0\ .\ x^3 =$ …………….

şeklinde yazılabileceğinden sıfır polinomunun derecesi bilinemez.

Örnek 6

$Q(x) = mx^2 - 2x^2 + x^{n-3} + k + 2$

çok terimlisi sıfır polinomu olduğuna göre, m. n. k kaçtır? **($n \neq 5$)**

Çözüm 6

$Q(x) = (m - 2)x^2 + x^{n-3} + k + 2$ sıfır polinomu olduğundan

$m-2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$n-3 = 0 \Rightarrow n = 3$ olmalıdır.

Bu değerler yerine yazılırsa,

$Q(x) = 0 \, . \, x^2 + x^0 + k + 2$

$Q(x) = k + 3$ elde edilir.

$Q(x)$ sıfır polinomu olduğundan $k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3$ olmalıdır.

O halde $m \, . \, n. \, k = 2. \, 3. \, (-3) = -18$ bulunur.

POLİNOMLARDA DEĞER BULMA

$P(x)$ verilmiş $P(a)$ soruluyorsa, $x = a$,

$P(Q(x))$ verilmiş, $P(a)$ soruluyorsa $Q(x) = a$,

$P(Q(x))$ verilmiş $P(R(x))$ soruluyorsa $Q(x) = R(x)$ eşitliğinden elde edilen x değeri polinomda yerine yazılır.

Örnek 7

$P(x) = 3x^3-4x^2 + 7$

olduğuna göre, P(0), P(1), P(-2) yi bulalım.

Çözüm 7

$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7$ polinomunda

$x = 0$ için $P(0) = 3.0^3 - 4.0^2 + 7 = 7$

$x = 1$ için $P(1) = 3.1^3 - 4.(1^2) + 7 = 6$

$x = -2$ için $P(-2) = 3.(-2)^3 - 4.(-2)^2 + 7 = -24 - 16 + 7 = -33$ bulunur.

Örnek 8

$P(x, y) = 3x^2y^3 - 4xy^2 + 2x - 3y + 2$

olduğuna göre, P(-2,1) kaçtır?

Çözüm 8

Polinomda x = -2 ve y = 1 yazılırsa,

$P(-2, 1) = 3. (-2)^2 . 1^3 - 4.(-2) . 1^2 + 2.(-2) -3.1+2 = 12+ 8 -4 -3 +2 =15$ bulunur.

Örnek 9

$P(x^3 - 1) = x^9 + 2x^6 - 3x^3 + 4$ olduğuna göre, **P(2) kaçtır?**

Çözüm 9

$x^3 - 1 = 2 \Rightarrow x^3 = 3$

$P(x^3 - 1) = (x^3)^3 + 2 \,.\, (x^3)^2 - 3x^3 + 4$

$P(3 - 1) = 3^3 + 2.3^2 - 3.3 + 4$

$P(2) = 27 + 18 - 9 + 4 = 40$ bulunur.

SABİT TERİM BULMA

Bir polinomda sabit terimi bulmak için değişkenler yerine, 0 (sıfır) yazılır.

$P(x + 2)$ polinomunun sabit terimi $x = 0$ için $P(2)$ olur.'

$P(2x - 3)$ polinomunun sabit terimi $x = 0$ için $P(2.0 - 3) = P(-3)$ tür.

$P(x)$ polinomunun sabit terimi $x = 0$ için $P(0)$ dir.

$P(x^2 + 2x + 4)$ polinomunun sabit terimi $x = 0$ için $P(0^2 + 2.0 + 4) = P(4)$ tür.

Örnek 10

$P(x) = -3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 4x - 5$ olduğuna göre,

$P(x)$, $P(x + 1)$, $P(x^2 - 1)$ polinomlarının sabit terimlerini bulalım.

Çözüm 10

P(x) polinomunun sabit terimi

$P(0) = - 3 . 0^4 + 5 . 0^3 + 7.0^2 + 4. 0 – 5 = -5$ olur.

P(x + 1) polinomunun sabit terimi

$P(0 + 1) = P(1) = -3.1^4 + 5.1^3 + 7. 1^2 + 4.1 -5 =-3+5+7+4-5 = 8$ bulunur.

$P(x^2 -1)$ polinomunun sabit terimi

$P(0^2-1)=P(-1)=-3. (-1)^4+5. (-1)^3+7. (-1)^2 + 4.(-1) - 5 = -3 - 5 + 7- 4 - 5 = -10$ bulunur.

KATSAYILAR TOPLAMINI BULMA

Bir polinomda katsayılar toplamını bulmak için değişkenler yerine 1 yazılır.

$P(x)$ in katsayılar toplamı $P(1)$

$P(x + 2)$ nin katsayılar toplamı $P(1 + 2) = P(3)$

$P(x^2-2x + 3)$in katsayılar toplamı $P(1^2-2.1 +3) = P(2)$dir.

Örnek 11

$P(3x + 2) = x^3.- 3x^2 + 3x + 4$ **veriliyor.**

$P(x + 7)$ polinomunun katsayılar toplamını bulalım.

Çözüm 11

P(x + 7) polinomunun katsayılar toplamını bulmak için x = 1 verilirse P(8) elde edilir.

P(8) i bulmak için 3x + 2 = 8

=>x = 2 yazılırsa

P(8) = 2^3-3.2^2 + 3.2 + 4 =6 bulunur.

POLİNOMLARDA EŞİTLİK

$P(x)$ ve $Q(x)$ dereceleri eşit olan iki polinom olsun. Bu iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit ise bu iki polinoma eşit polinomlar denir.

Örnek 12

$P(x) = (a - 3)x^3 + (b - 1)x^2 + cx + d$

$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 7$

polinomları eşit olduğuna göre; $a + b + c + d$ toplamı kaçtır?

Çözüm 12

P(x) = Q(x) olduğundan, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olmalıdır. Yani,

a-3 = 2 => a = 5

b-1 =3 => b = 4

c = 4

d = -7

a + b + c + d = 5 + 4 + 4 + (-7) = 6 bulunur.

TOPLAMA - ÇIKARMA

İki veya daha fazla polinom toplanır veya çıkarılırken aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır veya çıkarılır.

Örnek 13

$P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ polinomları veriliyor.

$P(x) + Q(x)$ ve **$3P(x) - 2Q(x)$** polinomlarım bulalım.

Çözüm 13

$P(x)= 2x^4 + 6x^3-2x^2 + 3x + 4$

$Q(x) =0x^4 + 2x^3 + 3x^2- 4x + 5$

$P(x) + Q(x) = (2 + 0)x4 + (6 + 2)x^3 +(-2 + 3)x^2 + (3 - 4)x + (4 + 5)$

$= \mathbf{2x^4+8x^3 + x^2-x + 9}$

$3P(x) = 6x^4 + 18x^3 - 6x^2 + 9x + 12$

$-2Q(x) = 0x^4 - 4x^3 -6x^2 + 8x - 10$

$3P(x) - 2Q(x) = 6x^4+(18-4)\ x^3+(-6-6)\ x^2+(9+8)x+(12-10) =$

$\mathbf{6x^4+14x^3-12x^2+17x + 2}$ bulunur.

ÇARPMA

İki polinomun çarpımı polinomlardan birinin her terimi diğerinin her terimi ile ayrı ayrı çarpılarak elde edilen terimler toplanarak elde edilir.

Örnek 14

$P(x) = 12x-3$

$Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$

olduğuna göre, P(x). Q(x) i bulalım.

Çözüm 14

$P(x). Q(x) = (12x - 3). (2x^2 + 3x - 2)$

$= 24x^3 + 36x^2 - 24x - 6x^2 - 9x + 6$

$= 24x^3 + 30x^2 - 33x + 6$ bulunur.

DERECE ÖZELLİKLERİ

der [P(x)] = m

der [Q(x)] = n ve m > n olsun.

1. der [P(x) ± Q(x)] = m
2. der [P(x). Q(x)] = m + n
3. der $\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]$ =m−n
4. der [$P(x^k)$] = k. m
5. der [$P(x)^k$] = k. m
6. der [P(Q(x))] = m . n dir

BÖLME

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - & B(x) \\ \cline{1-1} K(x) & \end{array}$$

P(x): Bölünen, Q(x): Bölen

B(x): Bölüm, K(x): Kalan

Yukarıdaki Bölme işleminde,

$P(x) = Q(x).\ B(x) + K(x)$

$der[P(x)] > der\ [Q(x)]$

$der[K(x)] < der\ [Q(x)]$

$K(x) = 0$ ise

P(x) polinomu Q(x) polinomuna tam bölünür.

POLİNOMLARDA ÇARPANLARA AYIRMA

Sabit olmayan birden fazla polinomun çarpımı şeklinde yazılamayan polinomlara indirgenemez polinomlar denir. Baş katsayısı 1 olan indirgenemeyen polinomlara asal polinomlar denir.

Bir polinomun indirgenemeyen ya da asal polinomların çarpımı şeklinde yazılmasına, bu polinomu çarpanlara ayırma denir.

ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ

Ortak Çarpan Parantezine Alma:

Toplam veya fark şeklindeki ifadeleri çarpım şekline getirmek için her terimdeki ortak olan çarpan parantezine alınır.

Gruplandırma Yöntemi:

Çarpanlara ayrılacak ifadenin ortak çarpan bulunduran terimleri gruplandırılarak bu gruplar ortak çapan parantezine alınır.

Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma:

Örnek 15

$x^3 - y^3 = 33$

$3xy\ (x - y) = 6$

olduğuna göre x - y kaçtır?

Çözüm 15

$x^3 - y^3 = 33$

$3x^2y - 3xy^2 = 6$

İki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak;

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 27$

$(x - y)^3 = 3^3$

$x - y = 3$ bulunur.