

# TRIGONOMETRI 2

# Toplam Fark Formülleri

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

# Toplam Fark Formülleri

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

$$\cot(a - b) = \frac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot a - \cot b}$$

**Not:**  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$  olduğu için, kotanyant formülü yerine tanjant formülü kullanılarak çıkan sonucun tersi alınabilir.

# Örnek 1

Aşağıdaki trigonometrik değerlerin eşitlerini bulunuz?

**$\sin 75^\circ$ ,  $\cos 75^\circ$ ,  $\tan 15^\circ$  ve  $\cot 15^\circ$**

# Çözüm 1

$$\begin{aligned}\sin 75 &= \sin(45 + 30) = \sin 45 \cdot \cos 30 + \cos 45 \cdot \sin 30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

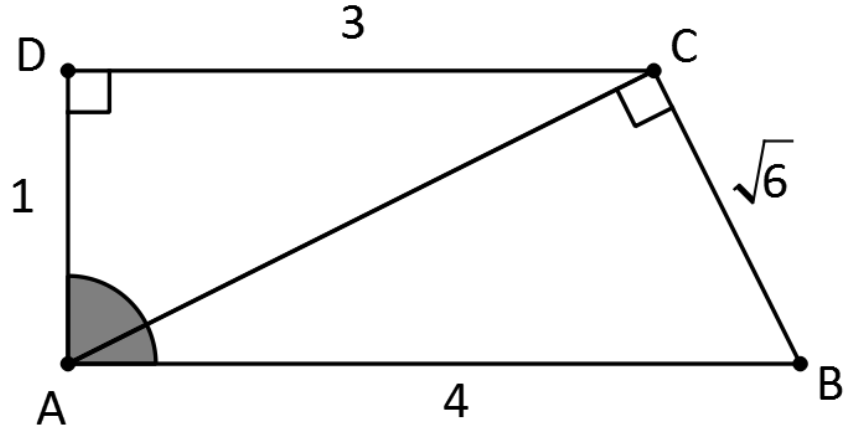
$$\begin{aligned}\cos 75 &= \cos(45 + 30) = \cos 45 \cdot \cos 30 - \sin 45 \cdot \sin 30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

# Çözüm 1

$$\tan 15 = \tan(45 - 30) = \frac{\tan 45 - \tan 30}{1 + \tan 45 \cdot \tan 30} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

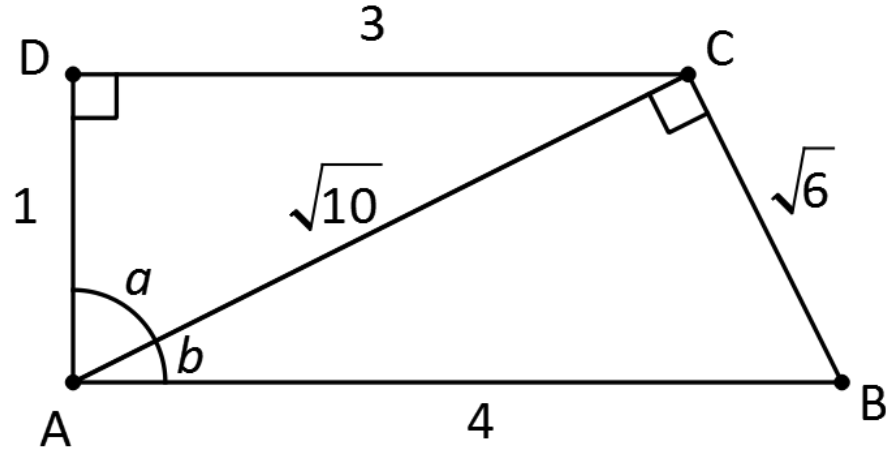
$$\cot 15 = \frac{1}{\tan 15} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

## Örnek 2



Yandaki şekilde verilenlere göre,  
 **$\sin(\widehat{DAB})$**  kaçtır?

## Çözüm 2



$$\sin(\widehat{DAB}) = \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{6}}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{5} + \sqrt{3})}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$$



# Yarım Açı Formülleri

Yarım açı formülleri, toplam fark formüllerinden elde edilirler.

**a)**  $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$  eşitliğinde  $a=b=x$  alınırsa,

$$\sin 2x = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \text{ bulunur.}$$

**b)**  $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$  eşitliğinde  $a=b=x$  alınırsa,

$$\cos 2x = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ bulunur.}$$

# Yarım Açı Formülleri

**c)**  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  eşitliğinde  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  yazılırsa,

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{ bulunur.}$$

**d)**  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  eşitliğinde  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  yazılırsa,

$$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ bulunur.}$$

# Yarım Açı Formülleri

e)  $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$  eşitliğinde  $a=b=x$  alınırsa,

$$\tan 2x = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \cdot \tan x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \text{ bulunur.}$$

f)  $\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x}$  dir.

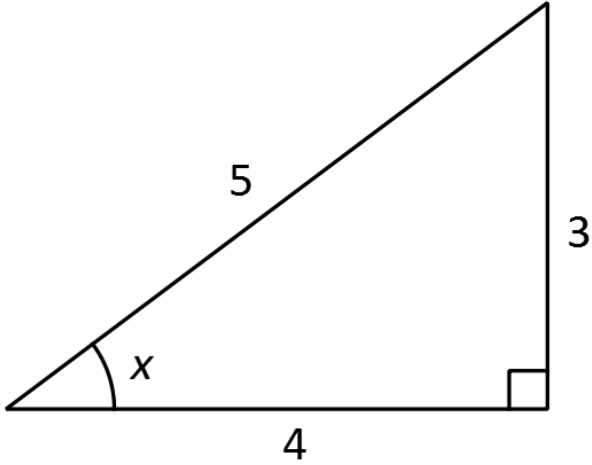
## Örnek 3

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  olmak üzere,

$$\tan x = \frac{3}{4}$$

olduğuna göre,  **$\sin 2x$**  kaçtır?

## Çözüm 3



$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \text{ olur.}$$

# Örnek 4

$\frac{\sin 10 \cdot \cos 10 \cdot \cos 20}{\cos 50}$  işleminin sonucu kaçtır?

# Çözüm 4

ifadeyi yarın açı formüllerine benzetmek için kesrin payını ve paydasını 2 ile çarpalım.

$$\frac{\overbrace{2 \cdot \sin 10 \cdot \cos 10}^{\sin 20} \cdot \cos 20}{2 \cdot \cos 50} = \frac{\sin 20 \cdot \cos 20}{2 \cdot \cos 50}$$

oluşan ifadesinin pay ve paydasını tekrar 2 ile çarparsak,

# Çözüm 4

$$= \frac{\overbrace{2 \cdot \sin 20 \cdot \cos 20}^{\sin 40}}{2 \cdot 2 \cdot \cos 50} = \frac{\sin 40}{4 \cdot \cos 50}$$

ifadesine dönüşür, 1. bölgede  $\cos 50 = \sin 40$  olduğuna göre,

$$= \frac{\sin 40}{4 \cdot \cos 50} = \frac{\sin 40}{4 \cdot \sin 40} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$



# Dönüşüm Formülleri

$$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \sin \left( \frac{a-b}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{a+b}{2} \right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cdot \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{a-b}{2} \right)$$

# Örnek 5

$\frac{\cos 6x - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 6x}$  işleminin sonucu nedir?

# Çözüm 5

$$\frac{\cos 6x - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 6x} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{6x-2x}{2}\right)}{2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{2x-6x}{2}\right)}_{-\sin 2x} \cdot \cos\left(\frac{2x+6x}{2}\right)} = \frac{-2 \sin 4x \cdot \sin 2x}{-2 \sin 2x \cdot \cos 4x}$$

$$= \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x \text{ olarak bulunur.}$$

# Ters Dönüşüm Formülleri

Ters dönüşüm formülleri, dönüşüm formüllerinden elde edilirler.

$$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \text{ idi.}$$

$$\frac{a+b}{2} = x \rightarrow a + b = 2x$$

$$\frac{a-b}{2} = y \rightarrow a - b = 2y \text{ burada taraf tarafa toplarsak,}$$

$$a = x + y \text{ ve } b = x - y \text{ bulunur.}$$

# Ters Dönüşüm Formülleri

Bulunan a ve b değerleri yerine yazılır ise,

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y \text{ olur.}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \text{ olarak bulunur.}$$

# Ters Dönüşüm Formülleri

Benzer şekilde diğer ters dönüşüm formülleri de aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

# Örnek 6

$$x = \sin 10^\circ \text{ olmak üzere,}$$
$$\cos 85^\circ \cdot \cos 5^\circ$$

**işleminin  $x$  türünden eşiti nedir?**

# Çözüm 6

$$\cos 85 \cdot \cos 5 = \frac{1}{2} \cdot [\cos(85 + 5) + \cos(85 - 5)]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\cos 90 + \cos 80]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [0 + \sin 10] = \frac{x}{2} \text{ olarak bulunur.}$$



# Trigonometrik Denklemler

1)

$\sin f(x) = \sin a$  denkleminin çözümü

$k$  tamsayı olmak üzere,

$\sin f(x) = \sin a$  ise

$f(x) = a + k \cdot 2\pi$  veya  $f(x) = \pi - a + k \cdot 2\pi$  olur.

# Örnek 7

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

# Çözüm 7

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (sinüsü } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olan açı } \frac{\pi}{3} \text{ veya } \pi - \frac{\pi}{3} \text{ tür.)}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{Ç. K.} = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ bulunur.}$$

# Trigonometrik Denklemler

2)

$\cos f(x) = \cos a$  denkleminin çözümü

$k$  tamsayı olmak üzere,

$\cos f(x) = \cos a$  ise

$f(x) = a + k \cdot 2\pi$  veya  $f(x) = -a + k \cdot 2\pi$  olur.

# Örnek 8

$$2 \cos x - 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

# Çözüm 8

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ç. K.} = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ bulunur.}$$

# Trigonometrik Denklemler

**3)**

$\tan f(x) = \tan a$  veya  $\cot f(x) = \cot a$  denkleminin çözümü

$k$  tamsayı olmak üzere,

$\tan f(x) = \tan a$  veya  $\cot f(x) = \cot a$  ise

$f(x) = a + k \cdot \pi$  olur.

# Örnek 9

$$\tan 5x = \cot 4x$$

denkleminin  $[0^\circ, 45^\circ]$  aralığındaki kökler toplamı kaç derecedir?



# Çözüm 9

$\cot 4x = \tan(90^\circ - 4x)$  olduğundan,

$\tan 5x = \tan(90^\circ - 4x)$  olur.

$$5x = 90^\circ - 4x + 180^\circ \cdot k$$

$9x = 90^\circ + 180^\circ \cdot k$  her iki tarafı da 9 a bölersek,

$$x = 10^\circ + 20^\circ \cdot k \text{ olur.}$$

$$k = 0 \text{ için } x = 10^\circ$$

$$k = 1 \text{ için } x = 30^\circ$$

$[0^\circ, 45^\circ]$  aralığında  $x$  değerleri toplamı  $10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$  olur.

# Trigonometrik Denklemler

## 4) Lineer Trigonometrik denklem çözümü

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$$

denklemine sinüs ve kosinüse göre lineer (doğrusal) denklem denir.

Bu denklemlerin çözüm kümesi bulunurken önce eşitliğin her iki tarafı  $a$  ile (veya  $b$  ile) bölünür. Daha sonra elde edilen  $\frac{a}{b}$  ye veya  $\frac{b}{a}$  ya  $\tan \theta$  dönüşümü uygulanır.

# Örnek 10

$$3 \cdot \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3$$

denkleminin en küçük pozitif kökü kaç derecedir?

# Çözüm 10

Eşitliğin her iki tarafını da 3 ile bölelim.

$$\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = 1 \text{ olur.}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olduğundan,}$$

$$\sin x + \tan 30^\circ \cdot \cos x = 1$$

$$\sin x + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cos x = \frac{\cos 30^\circ \cdot \sin x + \sin 30^\circ \cos x}{\cos 30^\circ} = \frac{\sin(x+30^\circ)}{\cos 30^\circ} = 1$$

# Çözüm 10

$$\sin(x + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \text{ olur.}$$

$$x + 30^\circ = 60^\circ$$

$x$  in en küçük pozitif kökü  $30^\circ$  olarak bulunur.

# Not

$a$  ve  $b$  birer reel sayı olmak üzere,

$A = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$  için

$A$  nın en büyük değeri:  $\sqrt{a^2 + b^2}$

$A$  nın en küçük değeri:  $-\sqrt{a^2 + b^2}$  dir.

# Örnek 11

$$3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x$$

İfadesinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz?

# Çözüm 11

En büyük değeri:  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  olur.

En küçük değeri:  $-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$  olur.