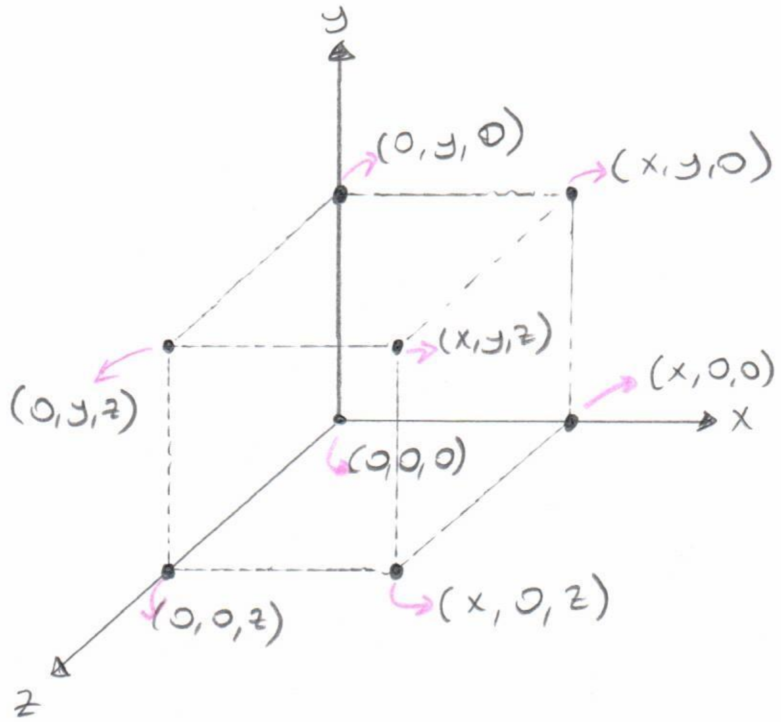
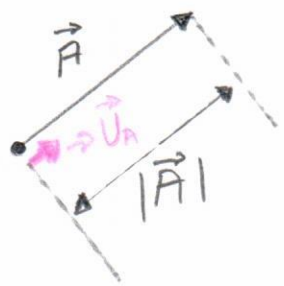
Üç Boyutlu Koordinat Sistemleri



Sağ El Kuralı

Sağ el parmaklarımız x'den y eksenine gider şekilde iken baş parmağımız z (+) yönünü gösterir.

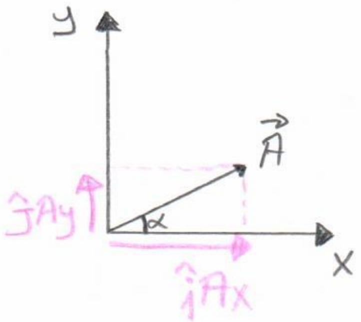
Birim Vektör



$\vec{U}_A$ = birim vektör

$$\vec{A} = \vec{U}_A \cdot |\vec{A}|$$

Koordinat sisteminde pozitif x, y, z yönlerini göstermek için sırasıyla i, j, k birim vektörleri kullanılır.



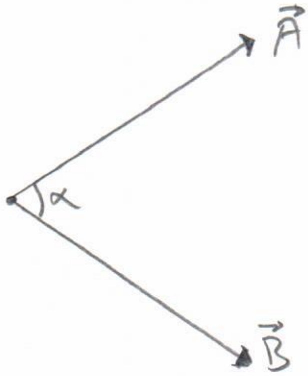
$\vec{A}$ vektörünün x, y düzleminde birim vektör cinsinden gösterimi:

$$\vec{A} = \vec{i}\,A_x + \vec{j}\,A_y$$

Vektörlerin Çarpılması

A) Vektörün Skaler ile Çarpılması

B-) İKİ VEKTÖRÜN BİR SKALER VERECEK ŞEKİLDE ÇARPILMASI (SKALER ÇARPIM)



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\alpha$$

Bileşenler Cinsinden Skaler Çarpım

$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ ve $\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x i + A_y j + A_z k)\cdot(B_x i + B_y j + B_z k)$$

$$= A_x.B_x\,(i\cdot i) + A_x B_y\,(i\cdot j) + A_x B_z\,(i\cdot k) +$$
$$A_y.B_x\,(j\cdot i) + A_y B_y\,(j\cdot j) + A_y.B_z\,(j\cdot k) +$$
$$A_z.B_x\,(k\cdot i) + A_z B_y\,(k\cdot j) + A_z.B_z\,(k\cdot k)$$

Not: Skaler çarpımda aynı yöndeki birim vektörlerin çarpımı $i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$, diğer yönlerdeki birim vektörlerin çarpımı

$$\left.\begin{aligned} i\cdot j &= j\cdot i = 0 \\ i\cdot k &= k\cdot i = 0 \\ j\cdot k &= k\cdot j = 0 \end{aligned}\right\} \text{olur.}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Skaler Çarpımın Özellikleri

1-) $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$

2-) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

3-) $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

4-) $(c\vec{A})\cdot\vec{B} = c\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot(c\vec{B}) \qquad c\in R$

5-) $\vec{0}\cdot\vec{A} = 0$

Ör: $\vec{A} = 5i + 4j - 6k$ ve $\vec{B} = -2i + 2j + 3k$ ise

$\vec{A}\cdot\vec{B} = ?$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$= 5\cdot(-2) + 4\cdot 2 + (-6)\cdot 3$$

$$= -10 + 8 - 18 = \boxed{-20}$$

Ör: $\vec{A} = A_x i + j - 3k$, $\vec{B} = 4i - 5j + k$ ve

$\vec{A}\perp\vec{B}$ ise $A_x = ?$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + 1^2 + (-3)^2} \qquad |\vec{B}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 1^2}$$

$\vec{A}\perp\vec{B}$ old. için $\alpha = 90°$ $\cos 90 = 0$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ olur.

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

$$A_x\cdot 4 + 1\cdot(-5) + (-3)\cdot 1) = 0$$

$$4A_x - 5 - 3 = 0$$

$$4A_x = 8$$

$$\boxed{A_x = 2}$$

Ör: $\vec{A} = 2i + j + 3k$ ve $\vec{B} = 4j - k$ ise $\vec{A}, \vec{B}$ vektörlerin arasındaki açının cosinüs değerini bulunuz?

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

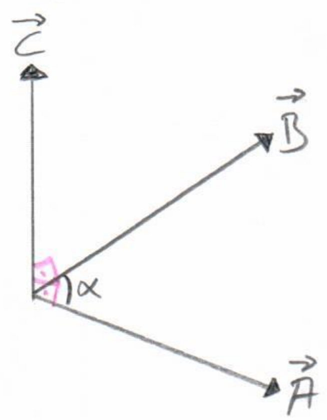
$$|\vec{B}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = \sqrt{14} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{0 + 4 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}}}$$

C-) VEKTÖREL ÇARPIM

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ şeklinde gösterilir.



Sağ elimizin parmakları $\vec{A}$ vektöründen $\vec{B}$ vektörüne giderken, $\vec{C}$ vektörü baş parmağımız yönündedir ve

$\vec{C} \perp \vec{A}$, $\vec{C} \perp \vec{B}$

Vektörel Çarpımın Özellikleri

1-) $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

2-) $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

3-) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

4-) $(k\vec{A}) \times \vec{B} = k(\vec{A} \times \vec{B}) \quad k \in \mathbb{R}$

5-) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ ise $\vec{A} \perp \vec{C}$ ve $\vec{B} \perp \vec{C}$ olur.

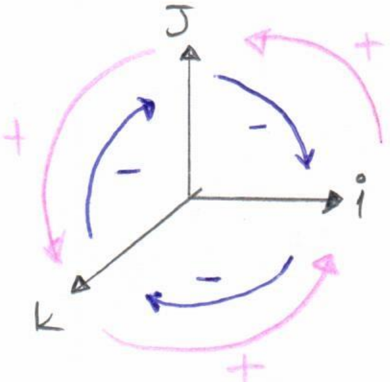
Birim vektörler cinsinden vektörel çarpım;

$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ ve $\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k)$$

$$= A_x B_x (i \times i) + A_x B_y (i \times j) + A_x B_z (i \times k) + A_y B_x (j \times i) + A_y B_y (j \times j) + A_y B_z (j \times k) + A_z B_x (k \times i) + A_z B_y (k \times j) + A_z B_z (k \times k)$$

Not: Birim vektörlerin vektörel çarpımı



$i \times i = 0$ $\quad i \times j = k$ $\quad j \times i = -k$

$j \times j = 0$ $\quad j \times k = i$ $\quad k \times j = -i$

$k \times k = 0$ $\quad k \times i = j$ $\quad i \times k = -j$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,i + (A_z B_x - A_x B_z)\,j + (A_x B_y - A_y B_x)\,k$$

Ör: $\vec{A} = 3i + 3j - 2k$, $\vec{B} = -i - 4j + 2k$ ise

$\vec{A} \times \vec{B} = ?$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3 \cdot 2 - (-2)(-4))\,i + ((-2)(-1) - 3 \cdot 2)\,j + (3 \cdot (-4) - 3(-1))\,k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (6 - 8)\,i + (2 - 6)\,j + (-12 + 3)\,k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -2i - 4j - 9k$$

Not: Her iki vektörün i, j, k kat sayıları alt alta gelecek şekilde yazılır ve ilk iki sayı sağ tarafta tekrarlanır ise aşağıda gösterilen matrislerin determinantı çarpım vektörünün katsayılarını verir.

Ör: $\vec{A} = 3i + 3j - 2k$, $\vec{B} = -i - 4j + 2k$ ise $\vec{A} \times \vec{B} =$

$$\begin{matrix} 3 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & -4 \end{matrix}$$

$$C_x = \det \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \qquad C_y = \det \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad C_z = \det \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

Not: 2×2 kare matris de determinant

$$\det\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = a.b - c.d$$ şeklindedir.

$$C_x = \det\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - (-4)(-2) = 6 - 8 = -2$$

$$C_y = \det\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) - 2.3 = 2 - 6 = -4$$

$$C_z = \det\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3.(-4) - (-1)3 = -12 + 3 = -9$$

$$\boxed{\vec{C} = C_x i + C_y j + C_z k = -2i - 4j - 9k}$$

ÖDEV: $\vec{A} = 3i + 3j - 2k$ ise $\vec{A}$ vektörünün y ekseni ile yaptığı açının cosinüs değerini bulunuz?