

GENEL MATEMATİK

DERSİN AMACI

Dersi alan öğrencilere matematiğin belli kurallarını anlatarak, problem çözmeye yönelik matematik formasyonunu kazandırmak ve matematiksel düşünme becerisini geliştirmek, öğrencilerin öğrendikleri bilgileri ilgi ve çalışma alanlarında kolayca kullanmalarını sağlayıcı alışkanlığı kazandırmak, lisans eğitimine devamları halinde temel oluşturmak.

HAFTALIK DERS PROGRAMI

- 1. Hafta: Sayılar ve Aritmetik İşlemler (08/10/2020)**
- 2. Hafta: Rasyonel Sayılar (15/10/2020)**
- 3. Hafta: Üslü Sayılar (22/10/2020)**
- 4. Hafta: Köklü Sayılar (29/10/2020)**
- 5. Hafta: Çapranlara Ayırma (05/11/2020)**
- 6. Hafta: Bölme – Bölünebilme Kuralları (12/11/2020)**
- 7. Hafta: Asal Çarpanlara Ayırma EBOB – EKOK (19/11/2020)**

HAFTALIK DERS PROGRAMI

8. Hafta: Birinci Derece Denklemler (26/11/2020)
9. Hafta: Arasınava (03/12/2020)
10. Hafta: Eşitsizlikler – Mutlak Değerler (10/12/2020)
11. Hafta: Oran – Orantı (17/12/2020)
12. Hafta: Problemler (24/12/2020)
13. Hafta: Kümeler (31/12/2020)
14. Hafta: Fonksiyon – İşlem – Modüller Aritmetik (07/01/2021)
15. Hafta: Permütasyon – Kombinasyon - Olasılık (14/01/2021)

SAYILAR

RAKAM: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gibi tek haneli sembollere **Rakam** denir.

SAYI: Rakamların tek başlarına veya bir çokluk oluşturacak şekilde bir araya gelmesiyle oluşan ifadeler **sayı** denir.

7 bir rakam aynı zamanda bir sayıdır.

36 iki rakamdan oluşan bir sayıdır.

712 üç rakamdan oluşan bir sayıdır.

-5391 dört rakamdan oluşan negatif bir sayıdır.

SAYI KÜMELERİ

1. Sayma Sayıları Kümesi

$\{1,2,3,\dots\}$ kümesine **sayma sayıları kümesi** ve bu kümenin her bir elemanına bir sayma sayısı denir. Sayma sayıları kümesi « N^+ » sembolü ile gösterilir.

2. Doğal Sayılar Kümesi

$\{0,1,2,3,\dots\}$ kümesine **doğal sayıları kümesi** ve bu kümenin her bir elemanına bir doğal sayısı denir. Doğal sayıları kümesi « N » sembolü ile gösterilir.

SAYI KÜMELERİ

3. Tam Sayılar Kümesi

$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesine **tam sayıları kümesi** ve bu kümenin her bir elemanına bir tam sayısı denir. Tam sayıları kümesi «Z» sembolü ile gösterilir.

a) Negatif Tam Sayılar Kümesi

$\{..., -3, -2, -1\}$ kümesine **negatif tam sayıları kümesi** ve bu kümenin her bir elemanına bir negatif tam sayısı denir. Negatif Tam sayıları kümesi «Z⁻» sembolü ile gösterilir.

Negatif tam sayılar sıfıra yaklaştıkça büyürler. Dolayısıyla en büyük negatif tam sayı «-1»'dir

b) Pozitif Tam Sayılar Kümesi

$\{1, 2, 3, ...\}$ kümesine **pozitif tam sayıları kümesi** ve bu kümenin her bir elemanına bir pozitif tam sayısı denir. Pozitif Tam sayıları kümesi «Z⁺» sembolü ile gösterilir.

Pozitif tam sayılar sıfıra yaklaştıkça küçülürler. Dolayısıyla en küçük pozitif tam sayı «1»'dir.

c) Sıfır bir tam sayıdır, fakat işaretsizdir. Yani pozitif yada negatif tam sayı değildir.

SAYI KÜMELERİ

4. Rasyonel Sayılar Kümesi

a ve b birer tam sayı ve $b \neq 0$ olsun. $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayıların oluşturduğu kümeye **rasyonel sayılar kümesi** bu kümenin her bir elemanına bir rasyonel sayı denir. Rasyonel sayılar kümesi «Q» sembolü ile gösterilir.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\} \text{'dir.}$$

5. İrrasyonel Sayılar Kümesi

Rasyonel olmayan sayılara yani iki tam sayının bölümü şeklinde yazılamayan sayıların kümesine **irrasyonel sayılar kümesi** bu kümenin her bir elemanına bir irrasyonel sayı denir. İrrasyonel sayılar kümesi «Q'» sembolü ile gösterilir.

$\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{-7}$, $\frac{\sqrt{13}}{5}$, ... birer irrasyonel sayıdır.

SAYI KÜMELERİ

6. Reel (Gerçel, Gerçek) Sayılar Kümesi

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşim kümesine **reel sayılar kümesi** bu kümenin her bir elemanına bir reel sayı denir.

Reel sayılar kümesi «R» sembolü ile gösterilir.

$R = Q \cup Q'$ şeklinde ifade edilir.

ÖRNEK – 1

a ve b birer rakam olmak üzere, $3a + 4b$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 65

b) 63

c) 60

d) 57

e) 54

ÇÖZÜM – 1

a ve b birer rakam olmak üzere, $3a + 4b$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

İfadede kullanılacak rakamların farklı olup olmadığına dikkat edilmelidir. a ve b birbirinden farklı rakamlar denilmediğinden $3a+4b$ ifadesinde en büyük değeri elde etmek için $a=9$ ve $b=9$ seçilmelidir.

Böylece $3a+4b = 3.9 + 4.9 = 27+36 = 63$ bulunur.

ÖRNEK – 2

a, b ve c birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, $5a + 6b + 3c$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 115

b) 110

c) 105

d) 100

e) 95

ÇÖZÜM – 2

a, b ve c birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, $5a + 6b + 3c$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

Verilen ifadede rakamların farklı olması istendiğinden ve en büyük değer sorulduğundan en büyük üç rakam 7, 8 ve 9 seçilmelidir. İfadede toplamın en büyük değeri sorulduğundan katsayısı en büyük olan bilinmeyene en büyük rakam değeri verilir.

O halde $a=8$, $b=9$, $c=7$ seçilirse,

$$5a + 6b + 3c = 5.8 + 6.9 + 3.7$$

$$= 40 + 54 + 21$$

$$= 115 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 3

x, y ve z birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, $4x + 2y + 7z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

ÇÖZÜM – 3

x, y ve z birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, $4x + 2y + 7z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

Verilen ifadede rakamların farklı olması istendiğinden ve en küçük değer sorulduğundan en küçük üç rakam 0, 1 ve 2 seçilmelidir. Küçük değer elde etmek için bu değerler katsayılarının büyüklük sırası ile ters olacak şekilde seçilmelidir.

O halde $x=1$, $y=2$, $z=0$ seçilirse,

$$4x + 2y + 7z = 4.1 + 2.2 + 7.0$$

$$= 4 + 4 + 0$$

$$= 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 4

x, y ve z birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, $4x + 3y - 8z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) -72

b) -69

c) -68

d) 7

e) 10

ÇÖZÜM – 4

x, y ve z birbirinden farklı rakamlar olmak üzere, $4x + 3y - 8z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

Soruda rakamların farklı olması istendiğinden ve en küçük değer sorulduğunda katsayısı pozitif olan bilinmeyenlere küçük, katsayısı negatif olan bilinmeyenlere büyük değer verilmelidir. Yani, $x=0$, $y=1$ ve $z=9$ seçilmelidir.

$$4x + 3y - 8z = 4.0 + 3.1 - 8.9$$

$$= 0 + 3 - 72$$

$$= - 69 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 5

a, b ve c birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere, $a + 4b + 2c$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 0

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

ÇÖZÜM – 5

a, b ve c birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere, $a + 4b + 2c$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

$a + 4b + 2c$ ifadesinin alabileceği en küçük değer bulunurken, denklemde verilen bilinmeyenlere kat sayılarının büyüklüğü ile ters olacak şekilde küçük doğal sayı değerleri verilir.

En büyük katsayı b nin olduğu için $b=0$ sonra, en büyük katsayı c nin olduğu için $c=1$ ve son olarak $a=2$ seçilir.

$$a + 4b + 2c = 2 + 4.0 + 2.1$$

$$= 2 + 0 + 2$$

$$= 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 6

x , y ve z pozitif tam sayıdır.

$3x + 2y + 4z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 0

b) 7

c) 9

d) 13

e) 16

ÇÖZÜM – 6

x, y ve z pozitif tam sayıdır.

$3x + 2y + 4z$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

x, y ve z pozitif tam sayılarının birbirinden farklı olduğu belirtilmediğinden ifadede aynı değer bütün bilinmeyenlere verilebilir. Burada katsayılarının büyüklüğünün bir önemi yoktur.

Böylece $x=1$, $y=1$ ve $z=1$ seçilirse,

$$3x + 2y + 4z = 3.1 + 2.1 + 4.1$$

$$= 3 + 2 + 4$$

$$= 9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK – 7

a ve b doğal sayılardır.

$a+b=19$ olduğuna göre, a'nın alabileceği kaç değer vardır?

a) 18

b) 19

c) 20

d) 21

e) 22

ÇÖZÜM – 7

a ve b doğal sayılardır.

$a+b=19$ olduğuna göre, a 'nın alabileceği kaç değer vardır?

ÇÖZÜM:

Toplamı sabit olduğundan bilinmeyenlerin birisine değer verilip diğer bilinmeyen değeri hesaplanır.

Yani; $a=0, b=19$

$a=1, b=18$

$a=2, b=17$

.

.

.

$a=19, b=0$

Dolayısıyla a 'nın alabileceği 20 değer vardır.

ÖRNEK – 8

x ve y sayma sayısıdır.

$x+y=23$ olduğuna göre, y 'nin alabileceği kaç değer vardır?

a) 20

b) 21

c) 22

d) 23

e) 24

ÇÖZÜM – 8

x ve y sayma sayısıdır.

$x+y=23$ olduğuna göre, y 'nin alabileceği kaç değer vardır?

ÇÖZÜM:

Toplamları sabit olduğundan bilinmeyenlerin birisine değer verilip diğer bilinmeyen değeri hesaplanır.

Yani; $x=1, y=22$

$x=2, y=21$

$x=3, y=20$

.

.

.

$x=22, y=1$

Dolayısıyla y 'nin alabileceği 22 değer vardır.

ÖRNEK – 9

a ve b pozitif doğal sayılardır.

$a+b=20$ olduğuna göre, $a.b$ çarpımının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamı kaçtır?

a) 119

b) 115

c) 109

d) 107

e) 100

ÇÖZÜM – 9

a ve b pozitif doğal sayılardır.

$a+b=20$ olduğuna göre, a.b çarpımının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Toplamları sabit olan iki pozitif doğal sayının çarpımının en büyük ve en küçük değeri bulunurken birbirine yakın (duruma göre eşit seçilebilir) değerler ile birbirinden uzak değerler seçilmelidir.

$a+b=20 \Rightarrow a = 10, b = 10$ seçilirse $a.b=100$

$a = 1, b = 19$ seçilirse $a.b=19$ olur.

Dolayısıyla a.b'nin en büyük değeri 100, en küçük değeri 19 olur. Buradan a.b'nin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı $100 + 19 = 119$ bulunur.

ÖRNEK – 10

x ve y doğal sayılar olmak üzere,

$x+y=27$ olduğuna göre, $x.y$ çarpımının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamı kaçtır?

a) 208

b) 201

c) 198

d) 186

e) 182

ÇÖZÜM – 10

x ve y doğal sayılar olmak üzere,

$x+y=27$ olduğuna göre, $x.y$ çarpımının alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Toplamları sabit olduğundan x ve y'nin birbirine yakın ve birbirinden uzak değerlerine bakılacak olursa,

$x + y = 27$ ise, $x = 13, y = 14$ seçersek $x.y = 182$

$x = 0, y = 27$ seçersek $x.y = 0$

Dolayısıyla $x.y$ 'nin alabileceği en büyük değer 182 ve en küçük değer 0 olur. Bu değerlerin toplamı ise $182+0=182$ bulunur.

ÖRNEK – 11

a ve b doğal sayılardır.

a.b=64 olduğuna göre, a+b toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı kaçtır?

a)82

b) 81

c) 80

d) 79

e) 78

ÇÖZÜM – 11

Toplamları 18 olan farklı iki doğal sayının çarpımının alabileceği **en büyük değer** kaçtır?

ÇÖZÜM:

Toplamları 18 olan iki sayı x ve y seçilirse x ile y birbirinden farklı doğal sayılar olduğundan $x=10$ ve $y=8$ seçilir.

Böylece $x.y = 10.8 = 80$ olur.

ÖRNEK – 12

Toplamları 18 olan farklı iki doğal sayının çarpımının alabileceği **en büyük değer** kaçtır?

a) 77

b) 78

c) 79

d) 80

e) 81

ÇÖZÜM – 12

a ve b doğal sayılardır.

a.b=64 olduğuna göre, a+b toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Çarpımları sabit olan iki doğal sayının toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerler bulunurken sayılar birbirine yakın veya uzak seçilmelidir.

Yani a.b=64 ise, a=8, b=8 seçilirse a+b=16

a=1, b=64 seçilirse a+b=65 olur.

Dolayısıyla a+b toplamının alabileceği en büyük değer 65, en küçük değer 16 olur. Bu değerlerin toplamı $64+16=80$ bulunur.

ÖRNEK – 13

x , y ve z birer doğal sayı olmak üzere, $x+y=5y$ olduğuna göre $x+y+z=$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 20

b) 22

c) 24

d) 27

e) 32

ÇÖZÜM – 13

x , y ve z birer doğal sayı olmak üzere, $x+y=5y$ olduğuna göre $x+y+z=$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

ÇÖZÜM:

$x + y + z$ toplamında $x+y$ değeri yerine $5y$ yazılırsa $x + y + z =$

$x + z + y = 5y + y = 6y$ bulunur.

Dolayısıyla toplamın sonucu 6'nın katları olmalıdır. Seçenekler incelenirse 6'nın katı olan tek seçenek 24 olur.

ÖRNEK – 14

x, y ve z negatif tam sayıdır.

$4x + 3y + 5z$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 0

b) -8

c) -10

d) -12

e) -22

ÇÖZÜM – 14

x, y ve z negatif tam sayıdır.

4x + 3y + 5z ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

ÇÖZÜM:

x, y ve z birbirinden farklı olmadığından alabilecekleri en büyük negatif tam sayı değeri -1'dir.

x = -1, y = -1, z = -1 seçilirse,

$$4x + 3y + 5z = 4(-1) + 3(-1) + 5(-1) = -12$$

ÖRNEK – 15

a, b ve c negatif tam sayıdır.

$$a - b = 9$$

$$b - c = 13$$

Olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı en çok kaçtır?

a) -34

b) -30

c) -27

d) -24

e) -21

ÇÖZÜM – 15

a, b ve z negatif tam sayıdır.

$$a - b = 9, \quad b - c = 13$$

Olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı en çok kaçtır?

ÇÖZÜM:

Verilen denklemler alt alta toplanarak ortak olan bilinmeyen (yani b) yok edilecek olursa,

$$\begin{array}{r} a - b = 9 \\ + \quad \underline{b - c = 13} \\ a - c = 22 \end{array}$$

$$a - c = 22 \text{ ise, } a = 22 + c$$

$$c = -23 \text{ seçilirse } a = -1 \text{ ve } b = -10 \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } a+b+c = -1 - 10 - 23 = -34 \text{ olur.}$$

TEK VE ÇİFT SAYILAR

Çift Tam Sayı

Birler basamağı 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından oluşan tam sayılara çift tam sayı denir.

Tam sayılar n ile gösterilirken, çift tam sayı « $2n$ » ile gösterilir.

Örnek: 216, 48, -380, -54, 58792

Tek Tam Sayı

Birler basamağında 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarından oluşan tam sayılara tek tam sayı denir.

Tek sayılar « $2n-1$ » ile ifade edilir.

Örnek: -5, -3, 1, 255, -647, 1239, -38951

TEK VE ÇİFT SAYILAR ARASINDAKİ İŞLEMLER

Ç = Çift tam sayı; T = Tek tam sayı

1) $\text{Ç} + \text{Ç} = \text{Ç}; \text{Ç} - \text{Ç} = \text{Ç}$

2) $\text{T} + \text{T} = \text{Ç}; \text{T} - \text{T} = \text{Ç}$

3) $\text{T} + \text{Ç} = \text{T}; \text{T} - \text{Ç} = \text{T}$

4) $\text{Ç} \cdot \text{Ç} = \text{Ç}; \text{T} \cdot \text{Ç} = \text{Ç}$

5) $\text{T} \cdot \text{T} = \text{T}$

6) Tek ve çift tam sayıların bölümü için kesin yargılarda bulunulmaz.

$$\frac{18}{6} = 3 \text{ (T)} ; \frac{24}{4} = 6 \text{ (Ç)}$$

7) Çift tam sayıların bütün pozitif tam sayı kuvvetleri çift tam sayıdır.

$$6^{33} = \text{Ç}; 8^{100} = \text{Ç} \quad (-10)^{73} = \text{Ç}$$

8) Tek tam sayıların bütün doğal sayı kuvvetleri tek tam sayıdır.

$$5^{33} = \text{T}; 7^{206} = \text{T}$$

9) Rasyonele sayılarının çift ve tek tam sayı denilmez.

$$5^{-48} = \frac{1}{5^{48}}$$

ÖRNEK -1

Aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

a) $3^{43} \cdot 5^{77}$

b) $4^{88} + 6^{44} + 9^{83}$

c) $2^{100} \cdot 7^{200} - 5$

d) $12^{-8} + 17^{43}$

e) $8^{888} \cdot 3^{33} + 2$

ÇÖZÜM -1

Aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

a) $3^{43} \cdot 5^{77} = T \cdot T = T$

b) $4^{88} + 6^{44} + 9^{83} = \text{Ç} + \text{Ç} + T = T$

c) $2^{100} \cdot 7^{200} - 5 = \text{Ç} + T - T = T$

d) $12^{-8} + 17^{43} =$ Yorum yapılmaz

e) $8^{888} \cdot 3^{33} + 2 = \text{Ç} \cdot \text{Ç} + \text{Ç} = \text{Ç}$

ÖRNEK -2

a, b ve c birer tam sayı ve $a.b=4c-3$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- a) $a + b$ tek tam sayıdır.
- b) $a - b$ çift tam sayıdır.
- c) $a + c$ çift tam sayıdır.
- d) $b - c$ tek tam sayıdır.
- e) $a + b + c$ çift tam sayıdır.

ÇÖZÜM -2

a, b ve c birer tam sayı ve $a.b=4c-3$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

$a.b=4c-3$ ifadesinde $4c$ daima bir çift sayıdır. O halde bir $4c+3$ tek sayı olur. Böylece $a.b$ tek tam sayıdır.

a tek b tek tam sayıdır.

Bu yüzden seçeneklerdeki $a-b = T - T = Ç$ tam sayıdır.