2.2. Faktör Çıkartma Yöntemleri

Faktör yüklerinin elde edilmesinde ise çok sayıda yöntem vardır. Bu bölümde sadece temel bileşenler faktör analizi ve en çok olabilirlik faktör analizi ele alınacaktır.

2.2.1. Temel Bileşenler Faktör Analizi

Faktör analizinin kovaryans matrisinin faktörleştirilmesine dayandığından daha önce bahsedilmişti. Buna göre kovaryans matrisinin spektral ayrışımı Eşitlik 2.9'da verildiği gibi ifade edilir.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{P\Lambda P'} \tag{2.9}$$

Burada $\boldsymbol{\Lambda}$ matrisi köşegen elemanları $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin özdeğerleri olan köşegen matris ve $\boldsymbol{P}$ karşılık gelen ortogonal özvektörler matrisidir. Buna göre kovaryans matrisi Eşitlik 2.10'da verildiği gibi yazılabilir.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1' + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_p' = \left[\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_p}\boldsymbol{e}_p\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_p}\boldsymbol{e}_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{LL'} \tag{2.10}$$

Böylece $\boldsymbol{L} = \left[\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_p}\boldsymbol{e}_p\right]$'dir. Dikkat edilirse, Eşitlik 2.10'da $m = p$ olduğu için kovaryans matrisinin faktörleştirilmesinde açıklanamayan kısmı ifade eden $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{0}]$ olmuştur. Bu durumda boyut indirgeme ve bilgi kaybı söz konusu değildir. Ancak çoğu zaman p değişken tarafından açıklanan olgular bir ya da birkaç faktör tarafından ifade edilebilmekte ve boyut indirgeme sağlanabilmektedir. Bu durumda faktör yükleri matrisi Eşitlik 2.11'deki gibi oluşturulabilir.

$$\boldsymbol{L} = \left[\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_m}\boldsymbol{e}_m\right], m < p \tag{2.11}$$

Bu durumda Eşitlik 2.10 ile verilen faktörleşme yapısı Eşitlik 2.12'de verildiği gibi elde edilir ve açıklanamayan kısım da modeldeki yerini alır.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LL'} + \boldsymbol{\psi} \tag{2.12}$$

Burada hatırlatmak gerekir ki $\boldsymbol{\psi} = K\ddot{o}ş\left[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p\right]$'dir.

Eğer faktör analizi standartlaştırılmış veri matrisi kullanılarak gerçekleştirilecek ise, kovaryans matrisi yerine korelasyon matrisi kullanılır. Buna göre korelasyon matrisinin spektral ayrışımı

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P\Lambda P'} \tag{2.13}$$

olup, burada $\boldsymbol{\Lambda}$ matrisi köşegen elemanları $\boldsymbol{R}$ matrisinin özdeğerleri olan köşegen matris ve $\boldsymbol{P}$ karşılık gelen ortogonal özvektörler matrisidir. Korelasyon matrisi kovaryans matrisine benzer olarak $m < p$ olmak üzere, Eşitlik 2.14'deki gibi faktörleştirilir.

$$\mathbf{R} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1' + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_m' + \boldsymbol{\psi} = \left[\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_m}\boldsymbol{e}_m\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m}\boldsymbol{e}_m \end{bmatrix} + \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{LL'} + \boldsymbol{\psi} \tag{2.14}$$

Buna göre standart veriler için uygulanan faktör analizinde faktör yükleri matrisi yine Eşitlik 2.11'deki gibi elde edilir. Ancak kullanılan özdeğer ve özvektörler kovaryans matrisine değil, korelasyon matrisine aittir.

Elde edilen faktör yüklerine dayanarak, her bir gözlemin faktör skorları orijinal veri seti kullanıldıysa;

$$\boldsymbol{f}_i = (\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}) \tag{2.15}$$

standartlaştırılmış veri seti kullanıldıysa,

$$\boldsymbol{f}_i = (\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}'(\boldsymbol{Z}_i) \tag{2.16}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliklerde kullanılan $(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}'$ matrisi ise faktör katsayıları matrisi olarak adlandırılmaktadır.

2.2.2. En Çok Olabilirlik Faktör Analizi

En çok olabilirlik faktör analizinin temel bileşenler faktör analizinden en önemli farklı, çok değişkenli normallik varsayımına sahip olmasıdır. Rastgele değişken vektörünün çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, faktör analizinde parametre tahmini için kullanılacak log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 2.17'de verildiği gibi ifade edilmektedir.

$$lnL = \frac{np}{2} - \frac{n}{2}ln|\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' + \boldsymbol{\psi}| - \frac{n}{2}\text{İz}(\boldsymbol{S}|\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' + \boldsymbol{\psi}|^{-1}) + \frac{n}{2}ln|\boldsymbol{S}| \tag{2.17}$$

Eğer $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' + \boldsymbol{\psi}$ olursa**,** fonksiyon sıfır değerini alacaktır. Bu fonksiyonun değerini en küçük yapan $\boldsymbol{L}$ faktör yükleri matrisi elde edilmeye çalışılmaktadır. Böylece faktör yükleri, komünalite değerleri, faktör katsayıları matrisi ve faktör skorları elde edilebilmektedir.

2.3. Faktör Döndürme

Faktör analizi sonucunda elde edilen faktör yükleri incelendiğinde, çoğu durumda değişkenlerin bir faktör etrafında net bir şekilde yoğunlaşmadığı görülür. Bu durum, bir değişkenin hangi faktör üzerinde yoğunlaştığını belirlemede ve faktörlerin yorumlanmasında sorunlara neden olmaktadır. Bu yüzden elde edilen faktörler uygun bir şekilde (genellikle dik olarak) döndürülerek yüksek yüklerin daha yüksek, düşük yüklerin ise daha düşük olduğu yeni faktör yükleri elde edilir. Bu işlem sırasında değişkenlere ait komünalite değerleri değişmez, sadece değişkenin ağırlığı bir faktör üzerinde yoğunlaşır. Bir başka deyişle, her bir faktör üzerinde ağırlığı olan değişkenler net bir şekilde belirlenmiş olur. Böylece tüm değişkenlerin uygun bir faktörleşme yapısı elde edilmiş olur.

Faktör döndürme işlemi Eşitlik 2.4 ile verilen faktör analizi modelini Eşitlik 2.18'de verildiği gibi güncellemeye dayanmaktadır.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.18}$$

Buradaki $\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{I}$ olup, $\boldsymbol{\theta}_{mxm}$ matrisi ortogonal bir matristir. Böylece yeni faktör yükleri matrisi $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\theta}$ şeklinde elde edilebilir. Bu $\boldsymbol{L}^*$ matrisine döndürülmüş faktör yükleri matrisi denir. Faktör döndürmede önemli olan husus $\boldsymbol{\theta}$ matrisinin elde edilmesidir. Bu matris uygun ve optimal bir açı için kosinüs ve sinüs değerlerinden oluşmaktadır. Örneğin uygun faktör sayısı $m = 2$ olduğunda $\boldsymbol{\theta}$ matrisi saat yönünde döndürmeyi sağlamak için;

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

ve saat yönünün tersi döndürmeyi sağlamak için;

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturulur.

Tıpkı faktör modelleri gibi faktör döndürme yöntemleri de dik (ortogonal) ve eğrisel (oblik) olmak üzere iki kategoride yer almaktadır. En sık kullanılan dik döndürme yöntemleri Varimax ve Quartimax, eğrisel döndürme yöntemleri ise Oblimin ve Promax yöntemleridir. Uygulamalarda genellikle dik döndürme tekniklerinden Varimax kullanılmaktadır. Bu dik döndürme yöntemlerinin genel çalışma prensipleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Varimax döndürme tekniğinde, her bir faktör üzerinde yüksek faktör yüküne sahip değişken sayısının en düşük, düşük faktör yüküne sahip değişken sayısının en yüksek olması amaçlanır.

Quartimax döndürme tekniğinde, her bir değişken için bir faktör üzerindeki faktör yükünün en yüksek ve geri kalan faktörler üzerindeki yüklerin en düşük olduğu durum elde edilmeye çalışılır.

KAYNAK

Hasan Bulut (2018). “R Uygulamaları ile Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemler”, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.