SÜREKLİLİK

Bu bölümde süreklilik kavramı, süreksizlik, sürekli fonksiyonların özellikleri ile buna ilişkin teoremler örnekler ve grafiklerle açıklanmaktadır.

9.1 Süreklilik ve Süreksizlik Kavramları

Tanım aralığının bir x_0 noktasında tanımlı fonksiyon f(x) olsun. Eğer,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

ise $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında ***süreklidir*** denir.

Bu tanım $f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının bir x_0 noktasında sürekli olabilmesi için;

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ mevcut olması
2. f(x)'in mevcut olması yani f(x)'in x_0 noktasında tanımlı olması ve,
3. $\ell = f(x_0)$ olması gerektiğini ifade etmektedir.

Bu koşullardan herhangi biri mevcut değilse fonksiyon $x = x_0$ noktasında ***süreksizdir*** denir. Bu durumda x_0 noktasına ***süreksizlik noktası*** adı verilir.

Sürekliliği limit tanımından yararlanarak da şu şekilde tanımlayabiliriz:

ε istenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı olmak üzere, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ oldukça $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $\delta(\varepsilon) \in R^+$ bulunabiliyorsa f(x) fonksiyonu

$x = x_0$ noktasında ***süreklidir*** denir. Tanım aralığının her noktasında sürekli olan bir fonksiyon bu aralıkta süreklidir.

$n \in N$, $a_i \in R$ $(i = 1,2......n)$ olmak üzere, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ tam rasyonel fonksiyonunun $\forall x \in R$ için sürekli olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} a_n x_0^n + \lim_{x \to x_0} a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to x_0} a_0 x_0^0$$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$= f(x_0) \quad \text{olur.}$$

Dolayısıyla tam rasyonel fonksiyonlar $\forall x \in R$ için süreklidir.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonun $\forall x \in R$ için sürekli olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon \in R+$ olmak üzere $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ oldukça $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \in R$ bulunabilmelidir.

$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ eşitsizliği trigonometrik oranların toplam ve farkının çarpanlara ayrılması özelliklerinden yararlanılarak,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \quad \textbf{(1)}$$

şeklinde yazılabilir.

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow |\sin x| \leq 1$ ve ayrıca

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow |\cos x| \leq 1$ dir. $\forall x \in R$ için

$-x \leq \sin x \leq x \Rightarrow |\sin x| \leq x$ ve

$-x \leq \cos x \leq x \Rightarrow |\cos x| \leq x$ yazılabileceğinden

$$\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 1 \quad \text{ve} \quad \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < \left|\frac{x - x_0}{2}\right|$$

yazılabilir.

(1) eşitsizliğine dönersek,

$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right|$ olacağından,

$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < \varepsilon$ olur . Buradan,

$|\sin x - \sin x_0| < |x - x_0| < \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ olacak şekilde seçilmesi halinde

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

Yani fonksiyon $\forall x \in R$ için süreklidir.

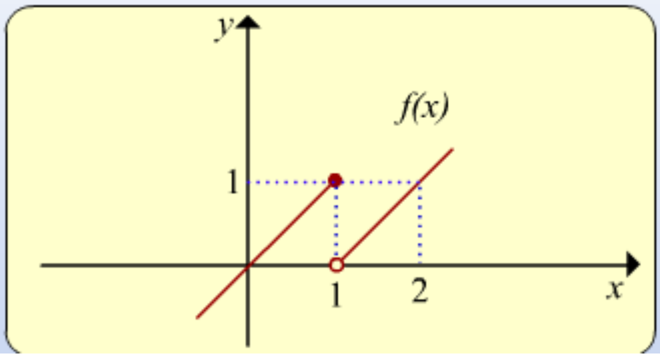
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x_0)$ fakat

i) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ise f(x) fonksiyonuna ***sağdan sürekli***,

ii) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ise f(x) fonksiyonuna ***soldan sürekli*** denir.

Örnek:

$f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonun $x = 1$ noktasında soldan sürekli olduğunu göseriniz.



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

ve

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Ancak f(1) = 1 olup $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ dir.

Dolayısıyla fonksiyon x = 1 noktasında soldan süreklidir.

Teorem :

f(x) ve g(x) aynı aralıkta tanımlı farklı iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonlar tanım aralığının bir $x = x_0$ noktasında sürekli iseler a, b $\in$ R olmak üzere x_0 noktasında,

1. a.f(x) + b.g(x) fonksiyonu da süreklidir.
2. f(x) . g(x) fonksiyonu da süreklidir.
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonu da (g(x) ≠ 0 koşuluyla) süreklidir.

İspat:

Yukarıdaki teoremin ispatı limitle ilgili temel teoremlerden yararlanılarak kolayca gösterilebilir.

$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun $\forall x \in R$ için sürekli olduğunu gösteriniz

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ ve $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları tam rasyonel fonksiyonlar olup $\forall x \in$ R için süreklidirler. $\forall x \in$ R için $g(x) = x^2 + 1 \neq 0$ olduğu için $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu da $\forall x \in$ R için süreklidir. Sürekli iki fonksiyonun çarpımıyla elde edilen $f(x).\frac{1}{g(x)} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2+1}$ fonksiyonu da $\forall x \in$ R için süreklidir.

9.1.1 Süreksizlik

Süreksizlik koşullarından herhangi biri mevcut değilse;

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ mevcut

a) $f(x_0)$ mevcut fakat $\ell \neq f(x_0)$ ise

b) $f(x_0)$ mevcut değilse,

2) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

a) $f(x_0)$ mevcut fakat

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

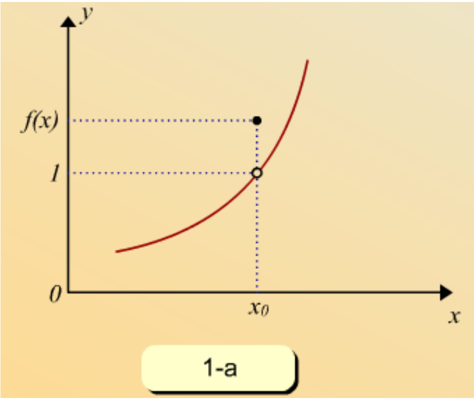
b) $f(x_0)$ mevcut değilse

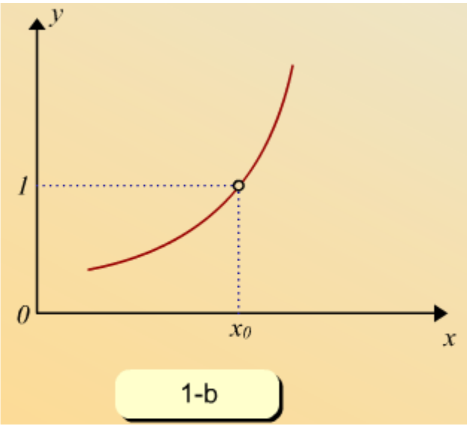
bu hallerden her birinde fonksiyona ***birinci neviden süreksiz fonksiyon***, x_0 noktasına da ***birinci neviden süreksizlik noktası*** denir.

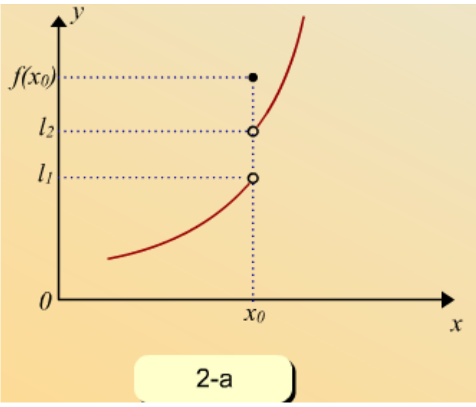
3) f(x) mevcut olsa dahi,

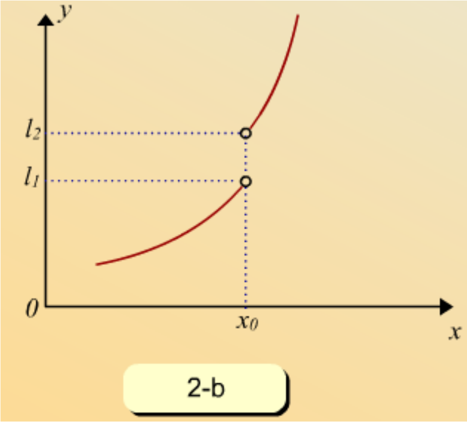
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ veya $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ ise

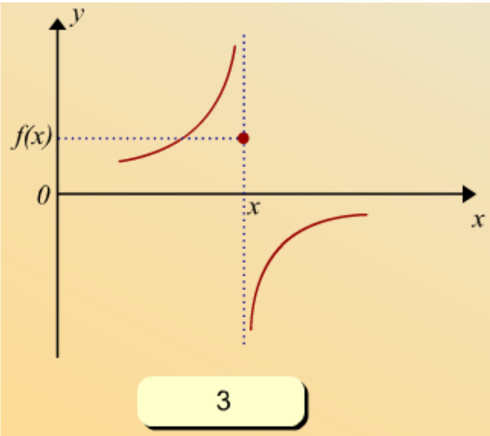
yani fonksiyonun sağdan ve soldan limitlerinin en az biri $x = x_0$ noktasında sonlu bir değere sahip değilse f(x) fonksiyonuna ***ikinci neviden süreksiz fonksiyon***, x_0 noktasına da ***ikinci neviden süreksizlik noktası*** denir.





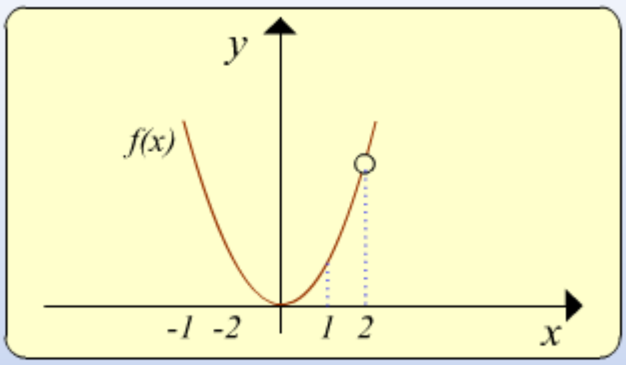






9.1.1.1 Süreksizlik İle İlgili Örnekler

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ fonksiyonun süreksizliğini inceleyiniz.



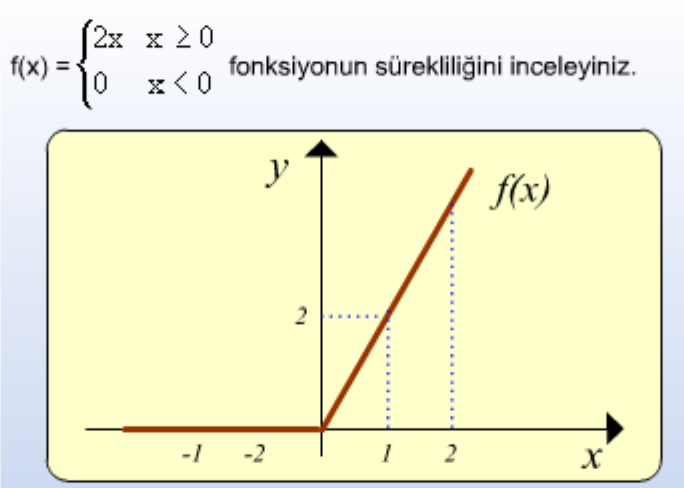
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

fakat

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq 0 = f(2)$$

dolayısıyla fonksiyon

x = 2 noktasında I. neviden süreksizdir.

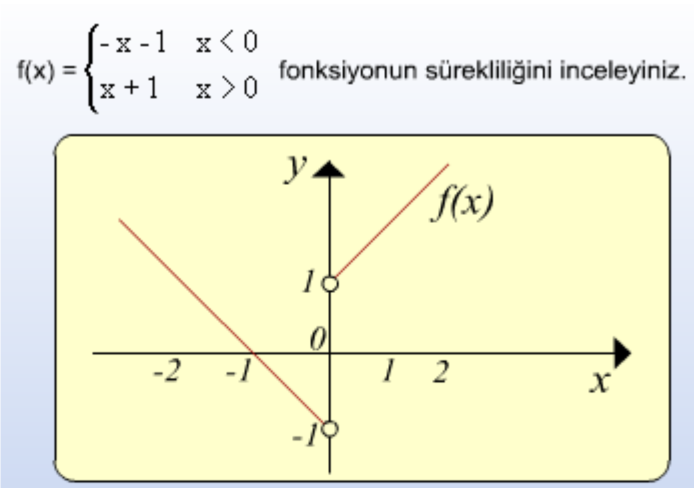


$$\lim_{x\to0^+} 2x=0,\ \lim_{x\to0^-} 0=0$$

dolayısıyla

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$$

fonksiyon x = 0 noktasında süreklidir.



$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x+1=1$$

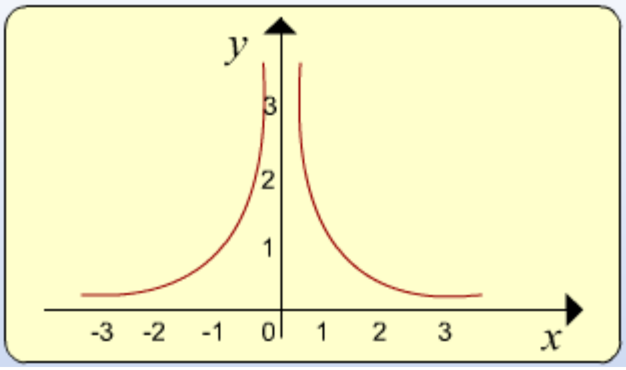
ve

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} -x-1=-1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) \neq \lim_{x\to0^-} f(x)$$

Ayrıca fonksiyon x = 0 noktasında tanımlı değildir. Dolayısıyla bu fonksiyon x = 0 noktasında I. neviden süreksiz fonksiyondur.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonun x = 0 noktasında süreksiz olduğunu gösteriniz.



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

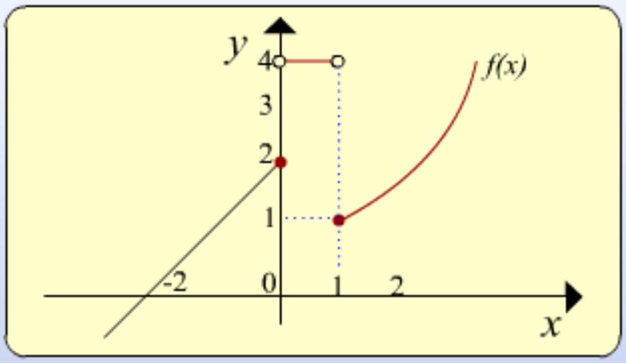
ve

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Ayrıca f(0) mevcut değildir. Fonksiyon x = 0 noktasında II. Neviden süreksizdir.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ 4 & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \end{cases}$$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.



i)

$$\lim_{x\to 0^-} x+2=2,\ \lim_{x\to 0^+} 4 = 4,\ f(0)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \text{ 'dır.}$$

Ancak

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$$

olduğundan fonksiyon x = 0 noktasında soldan süreklidir.

$$\lim_{x\to 1^-} 4=4,\ \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1,\ f(1)=1$$

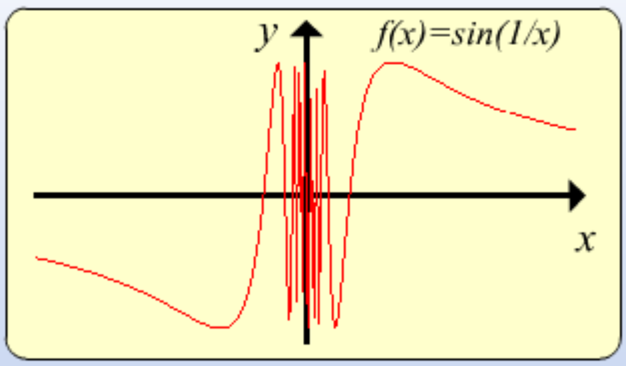
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ 'dır.}$$

Ancak

ii) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

dolayısıyla fonksiyon x = 1 noktasında sağdan süreklidir.

$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.



$x \to 0$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ ve $\sin\dfrac{1}{x} \in [-1,+1]$ aralığında, değerler alan bir fonksiyondur. Dolayısıyla fonksiyon bu aralık içinde belirli ve sabit bir limite sahip değildir. Bu nedenle de x = 0 noktasında süreksizdir.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun x = 0 noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ dir. Ancak f(0) mevcut değildir. Dolayısıyla fonksiyon x=0 noktasında süreksizdir. Ancak bu fonksiyon,

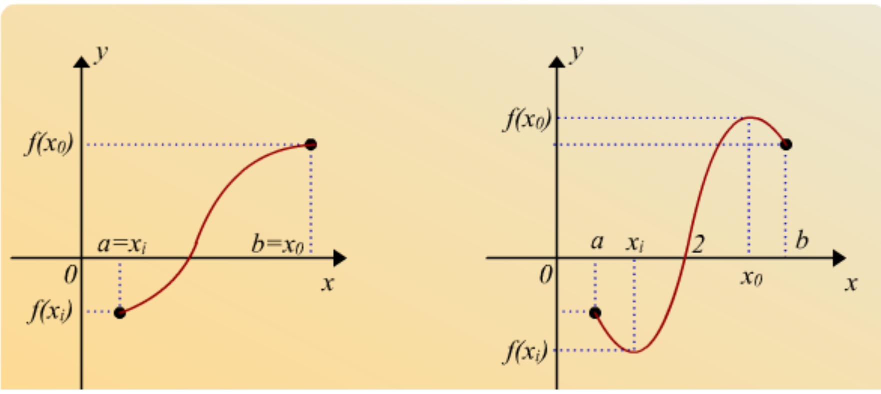
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

olarak verilmesi halinde sürekli olacaktır.

9.2 Sürekli Fonksiyonların Özellikleri (I)

Teorem :

y = f(x) fonksiyonu [a , b] kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun . Bu aralık içinde en az bir x_0 noktası vardır ki bu noktada $f(x_0) \geq f(x)$ dir. $f(x_0)$ değerine fonksiyonun bu aralık içindeki ***maksimum (en büyük) değeri*** denir. Benzer şekilde bu aralık içinde en az bir x_1 noktası vardır ki bu noktada $f(x_1) \leq f(x)$ dir. $f(x_1)$ değerine fonksiyonun ***minimum (en küçük) değeri*** denir.

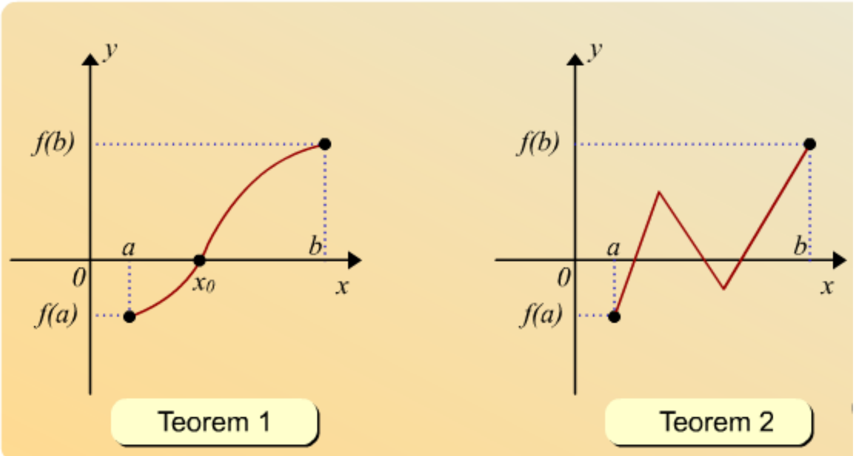


9.3 Sürekli Fonksiyonların Özellikleri (II)

Teorem 1:

(Bolzano Teoremi)

y = f(x) fonksiyonu [a , b] aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon aralığın sınır değeri olan f(a) ve f(b) için değişik işarette değerler alıyorsa bu aralıkta en az bir x_0 noktasında fonksiyon sıfıra eşittir. Yani $a < x_0 < b$ olmak üzere $f(x_0) = 0$ dır.



Teorem 2:

f(x) fonksiyonu [a , b] aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon f(a) ile f(b) arasındaki her değeri en az bir defa alır.