

TÜREV UYGULAMALARI

Bölüm içinde maksimum, minimum, artan ve azalan fonksiyonlar, büküm noktası, teğet, normal ve belirsizliğin türev yardımıyla giderilmesi işlenmektedir.

11.1 Maksimum ve Minimum (Ekstremum) Noktaları

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq f(x_0)$ ise $x_0 \in [a, b]$ noktasında bu fonksiyonun bir **maksimumu** vardır.

Bu durumda;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} < 0$$

olur. Eğer bu aralıktaki bütün x 'ler için $f(x) \geq f(x_0)$ ise bu fonksiyonun x_0 noktasında bir **minimumu** vardır.

Bu durumda ise;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} > 0$$

olur. Maksimum ve minimum noktalarına **ekstremum noktaları** da denir.

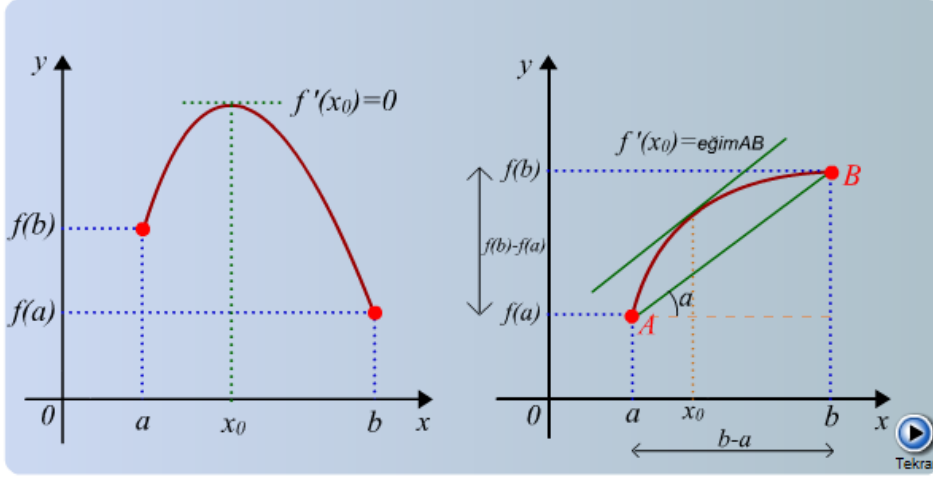
Teorem 1:

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu bu aralığın bir x_0 noktasında maksimum veya minimuma sahipse ve bu noktada fonksiyonun türevi sonlu ise bu türev sıfıra eşittir. Yani ; $f'(x_0) = 0$ 'dır.

Teorem 2 (Rolle Teoremi) :

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevi olan bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ ise (a, b) açık aralığı içinde en az bir x_0 noktası vardır ki bu noktada fonksiyonun türevi sıfıra eşittir. Yani; $f'(x_0) = 0$ 'dır.

Aşağıdaki animasyonda da görüldüğü gibi $f(b) = f(a)$ ve $x_0, x_1 \in (a, b)$ olup x_0 noktasında fonksiyonun bir maksimumu x_1 noktasında ise bir minimumu vardır. Bu iki noktada da $\tan \alpha = 0$ olup $f'(x) = 0$ dir.



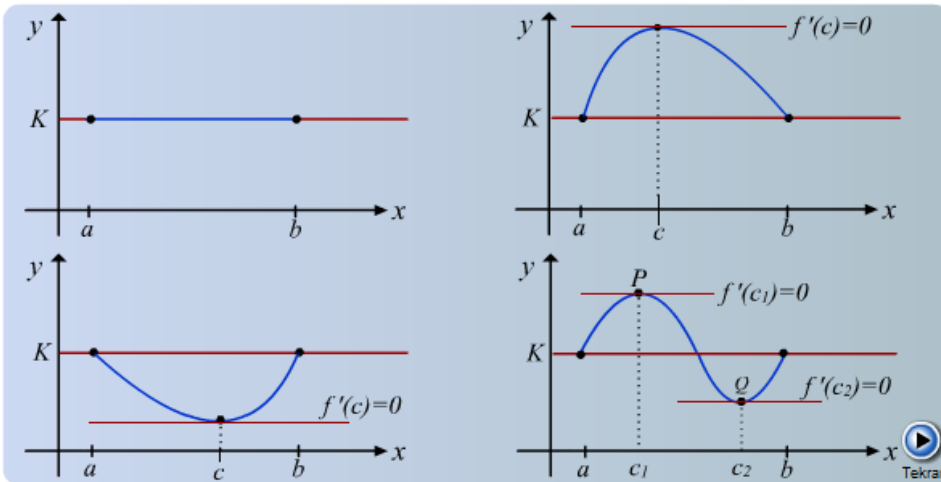
Teorem 3 (Ortalama Değer Teoremi) :

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevi olan bir fonksiyon ise;

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

Geometrik olarak aşağıdaki şekillerden de izlenebildiği gibi $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevi olan fonksiyonlar olduğu için $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$ olan x_0, x_1 gibi noktalar daima vardır.



11.1.1 Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Teorem :

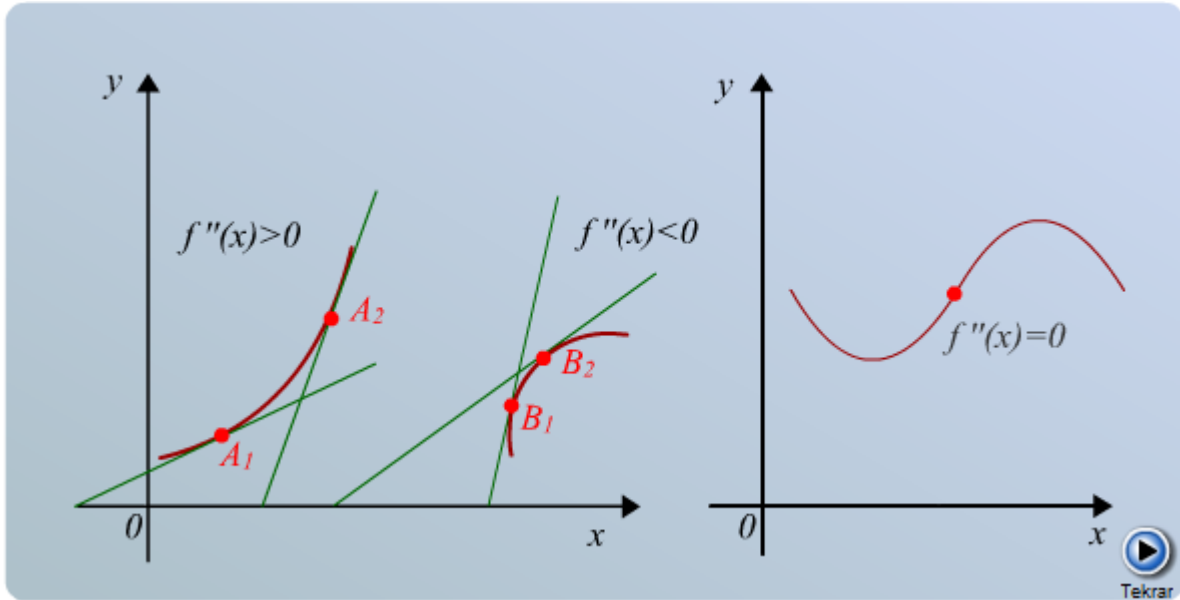
$[a, b]$ kapalı aralığında türevi daima pozitif olan $f'(x) > 0$ fonksiyon bu aralıkta artan, türevi daima negatif olan $f'(x) < 0$ fonksiyon ise bu aralıkta azalandır.

Karşıt Teorem :

$[a, b]$ aralığında artan bir fonksiyonun türevi varsa bu türev pozitiftir. Benzer şekilde azalan bir fonksiyonun türevi varsa bu negatiftir. Herhangi bir fonksiyonun türevi sıfır olsa da fonksiyon her zaman sıfır değildir.

11.1.2 Dış Bükey Eğriler, İç Bükey Eğriler ve Büküm Noktası

Bir eğrinin bükülme yönü OY ekseninin pozitif yönünde ise eğriye OY eksenine göre **dış bükey (konveks)**, negatif yönünde ise **iç bükey (konkav)** denir.



İlk eğride (dış bükey) A_1 noktasından A_2 noktasına gidildikçe teğetlerin eğimleri gitgide artar. Yani bu eğrinin türev fonksiyonu artan bir fonksiyondur ve $f''(x_0) > 0$ dir.

İkinci eğride ise (iç bükey) B_1 noktasında B_2 noktasına gidildikçe teğetlerin eğimleri gitgide azalır. Yani bu eğrinin türev fonksiyonu azalan bir fonksiyondur ve $f''(x_0) < 0$ dir.

Eğrinin yön değiştirdiği yani $f''(x) = 0$ olduğu noktaya ise **büküm noktası** denir. Eğri bu noktada dış bükeylikten iç bükeyliğe ya da iç bükeylikten dışbükeyliğe geçer. Yani eğrinin bükülme yönü değişir.

Bu bilgiler ışığında ekstremum noktaları ile ilgili olarak şu sonuçlara varabiliriz :

$f(x)$ fonksiyonu maksimum olduğu $x = x_0$ noktasında ;

$$f'(x_0) = 0 \text{ ve } f''(x_0) < 0$$

Yani

eğri bu noktada iç bükeydir.

Minimum olduğu $x = x_1$ noktasında ise ;

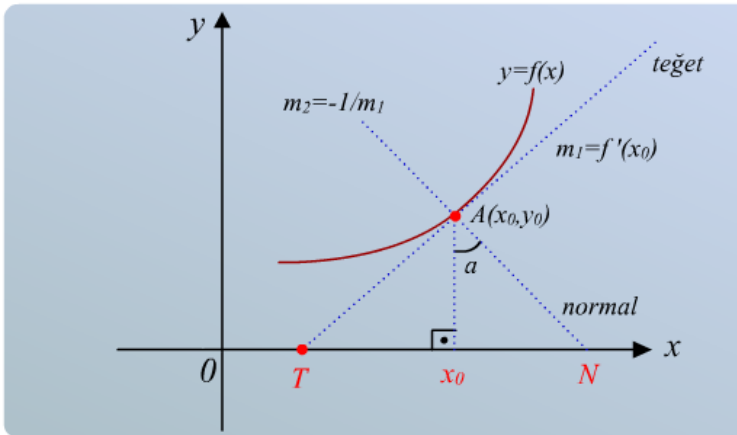
$$f'(x_0) = 0 \text{ ve } f''(x_0) > 0$$

Yani

eğri bu noktada dış bükeydir.

11.1.3 Teğet - Normal

Bir $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktasındaki eğimi $f'(x_0)$ olsun.



Eğrinin bu noktadaki teğetinin denklemi;

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

veya

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

olur. Buradan teğet denklemi;

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

olarak yazılabilir.

$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve bu noktadaki teğete dik olan doğruya ise **normal(N)** denir. Dik iki doğrunun eğimleri arasında (m_1 ve m_2 eğimleri göstermek üzere)

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ ve } m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

bağıntısı vardır. Buna göre normal denklemi;

$$f(x) = f(x_0) + \frac{-1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

olarak elde edilir.

11.2 Belirsiz Şekiller

Bağımsız değişkenin belli bir değeri için bazı fonksiyonların limitleri belirsizdir. Bu gibi limitlere **belirsiz şekiller** denir. Belirsiz şekilleri bazı türev işlemleri yardımıyla belirli hale getirmek mümkündür. Bunun için verilen ifadenin ne türden bir belirsiz şekil olduğunu saptamak ve bu belirsiz şekle uygun işlemleri uygulamak gereklidir. Belirsiz şekiller yandaki gibi sıralanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

11.2.1 (0/0) Şeklindeki Belirsizlik ve L'hospital Kuralı

Kesirli rasyonel bir fonksiyonun $x \rightarrow x_0$ için limiti $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsiz ise, pay ve paydanın $x = x_0$ için ayrı ayrı türevleri alınarak belirsizlik giderilmeye çalışılır. Yani;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

olarak yazılabilir.

Bu kurala **L'hospital kuralı** denir. Eğer $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ oranı da $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsiz ise bu defa ikinci türevlerinin $x = x_0$ noktasındaki değerleri bulunarak ;

$\frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$ oranı hesaplanır. Eğer yine belirsizlik varsa ardışık türevler alınarak belirsizlik giderilene kadar türev alma işlemi sürdürülür.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$x \rightarrow 1$ iken $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{0}{0}$ olduğu için L'hospital kuralı uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$x \rightarrow 0$ iken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$ olduğu için L'hospital kuralı uygulanabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a}{1} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$$x \rightarrow 0 \text{ iken } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x} = \frac{0}{0} \text{ olduğu için L'hospital kuralı uygulanabilir.}$$

11.2.2 (∞/∞) eklindeki Belirsizlikler

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ şeklinde belirsiz ise limiti belirli hale getirmek için;}$$

$$\frac{1}{f(x)} = F(x) \text{ ve } \frac{1}{g(x)} = G(x) \text{ dönüşümleri yapılarak belirsizlik,}$$

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ şeklinden } \frac{0}{0} \text{ ekline dntrlr.}$$

Bylece, bu belirsizlik eklinde de **L'hospital kuralı** uygulanarak belirsizlik giderilmeye alıılır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - x \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}}{-\cos x + \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} (1 - x \cdot \sin x)}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e}{1} \\ &= -e \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a, b \text{ sabit iken } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{\ln(1+e^{bx})} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{\ln(1+e^{bx})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a \cdot e^{ax}}{1+e^{ax}}}{\frac{b \cdot e^{bx}}{1+e^{bx}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot e^{ax} (1+e^{bx})}{b \cdot e^{bx} (1+e^{ax})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{ax} \cdot e^{bx} (e^{\frac{1}{bx}+1})}{e^{bx} \cdot e^{ax} (e^{\frac{1}{ax}+1})} \\
&= \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

11.2.3 (0.∞) Şeklindeki Belirsizlikler

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$$

şeklinde belirsiz ise limiti belirli bir hale getirmek için ;

$$F(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{veya} \quad G(x) = \frac{1}{g(x)}$$

yazılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{G(x)} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{F(x)} \\
&& \text{veya} &&
\end{aligned}$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{veya} \quad \frac{0}{0}$$

elde edilir ve belirsizlik $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ şekillerinden birine dönüştürülmüş olur. Bu şekillerden biri ile sonucu ulaşılamaması halinde, diğer şekli denemek gerekir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-2x} \text{ limitinin değerini bulunuz.}$$

$x \rightarrow \infty$ iken $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-2x} = \infty \cdot 0$ olduğu için önce $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinden birisine dönüştürülerek çözülür.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2e^{2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$ limitinin değerini bulunuz.

$x \rightarrow 0$ iken $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty$ olduğu için önce $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinden birisine dönüştürülerek çözülür.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

11.2.4 0^0 , ∞^0 , 1^∞ Şeklindeki Belirsizlikler

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = 0^0, \infty^0, 1^\infty$ şeklinde belirsiz ise limiti belirli hale getirmek için ;

$y = [f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonunda her iki tarafın logaritması alınarak ;

$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının limitleri alınarak ;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x) = 0 \cdot \infty$ şekline dönüştürülür.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Daha sonra $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ yazılarak belirsizlik $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ şekline dönüştürülür.

Böylece;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = A$ limiti bulunur. Burada aranan limit olarak

$\lim_{x \rightarrow x_0} y = e^A$ elde edilir.

$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ limitinin değerini bulunuz.

$x \rightarrow 0$ iken $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$ olduğu için önce fonksiyonun logaritması alınır daha sonra limiti alınır.

$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$ $y = x^x$ yazılarak; $\ln y = x \cdot \ln x$ elde edilir

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

O halde;

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1$ işlemin sonucu olarak elde edilir.

$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x}$ limitinin değerini bulunuz.

$x \rightarrow 1$ iken $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x} = 0^0$ olduğu için önce fonksiyonun logaritması alınır daha sonra limiti alınır.

$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x} = 0^0$ $y = (\ln x)^{\ln x}$ yazılarak, $\ln y = \ln x \cdot \ln(\ln x)$ elde edilir.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(\ln x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x}}{\frac{-1}{x \cdot (\ln x)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-\ln x)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = 0 \quad \text{ve sonuç} \quad \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x} = e^0 = 1 \quad \text{olarak elde edilir.}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$ limitinin değerini bulunuz.

$x \rightarrow 0$ iken $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = 0^0$ olduğu için önce fonksiyonun logaritması alınır daha sonra limiti alınır.

$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = 0^0$ $y = (\sin x)^x$ yazılarak, $\ln y = x \cdot \ln \sin x$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada sonuç

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1 \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x \quad \text{limitinin değerini bulunuz.}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ iken } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x = 1^\infty \quad \text{olduğu için nce fonksiyonun logaritması alınır daha sonra limiti alınır.}$$

$$y = \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

$$\frac{0}{0} \quad \text{belirsizliği olduğu için L'hospital kuralı uygulanır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^x + \frac{1}{x}} = 2 \quad \text{elde edilir. Buradan aranan sonuç}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^2 \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x} \quad \text{limitinin değerini bulunuz.}$$

$$x \rightarrow 0 \text{ iken } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x} = 1^\infty \quad \text{olduğu için önce fonksiyonun logaritması alınır daha sonra limiti alınır.}$$

$y = (1 - \sin 3x)^{1/x}$ yazılarak her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{x} \cdot \ln (1 - \sin 3x) \\ &= \frac{\ln (1 - \sin 3x)}{x}\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 - \sin 3x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\cos 3x / (1 - \sin 3x)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\cos 3x}{1 - \sin 3x} \\ &= \frac{-3}{1} \\ &= -3\end{aligned}$$

Yani;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 - \sin 3x)}{x} = -3 \quad \text{bulunur.}$$

Buradan sonuç ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \quad \text{elde edilir.}$$

11.2.5 ($\infty - \infty$) Şeklindeki Belirsizlikler

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$ olması halinde limiti belirli hale getirmek için;

$$\frac{1}{f(x)} = F(x), \quad \frac{1}{g(x)} = G(x) \quad \text{koyarak}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{G(x)} = \frac{G(x) - F(x)}{F(x) \cdot G(x)} = \frac{G(x) \left[1 - \frac{F(x)}{G(x)} \right]}{F(x) \cdot G(x)}$$

şeklini alır. Bu ifade $x \rightarrow x_0$ için

$\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şekline dönüştürülür. Daha sonra L'hospital kuralı uygulanır.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(x-1)}$ limitinin değerini bulunuz.

$x \rightarrow 1$ iken $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(x-1)} = \infty - \infty$ olduğu için belirsizlikten kurtulunur.

Paydalar eşitlenirse;

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot \ln x}{(x-1) \cdot \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{x+1} \right) = 1/2 \text{ olarak elde edilir.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$ limitinin değerini bulunuz.

$x \rightarrow 0$ iken $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \infty - \infty$ olduğu için belirsizlikten kurtulunur.

Paydalar eşitlenirse;

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cdot \ln x}{x} \\ &= \frac{1}{0} \\ &= \infty\end{aligned}$$

Açıklama :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$