

# AYRIK MATEMATİK DERS NOTLARI

## İÇİNDEKİLER

1.	Önerme Mantığı ve İspatlar.....	2
1.1	Önermeler ve Doğruluk Tabloları.....	2
1.2	Mantıksal Bağlılıklar ve Doğruluk Tabloları.....	2
1.3	Tutolojiler ve Çelişkiler.....	6
1.4	Mantıksal Eşdeğerlilik ve Mantıksal Anlam.....	7
1.5	Önermeler Cebri.....	8
1.6	Matematiksel İspat.....	12
1.7	İspat Yöntemleri.....	13
1.8	Matematiksel İndüksiyon.....	17
1.9	Alıştırmalar.....	20
2	Küme Teorisi.....	22
2.1	Kümeler ve Üyeler.....	22
2.2	Alt Kümeler.....	24
2.3	Kümeler Üzerinde İşlemler.....	25
2.4	Sayma Teknikleri.....	27
2.5	Kümeler Cebri.....	28
2.6	Kümelerin Aileleri.....	29
2.7	Kartezyen Çarpım.....	30
2.8	Alıştırmalar.....	33
3	Bağıntılar ve Fonksiyonlar.....	34
3.1	Bağıntılar ve Gösterimleri.....	34
3.2	Bağıntıların Özellikleri.....	35
3.3	Kesişimler ve Bağlıntıların Birleşimi.....	36
3.4	Eşdeğerlik Bağlıntısı ve Bölmelemeler.....	37
3.5	Sıra Bağlıntıları.....	39
3.6	n-ögelî(n-tuple) bağıntılar ve uygulamaları.....	40
3.7	Fonksiyonlar ve Tanımları.....	44
3.8	Alıştırmalar.....	50
4	Cebrik Yapılar.....	53
4.1	İkili İşlemler ve Özellikleri.....	53
4.2	Cebrik Yapılar.....	55
4.3	Alıştırmalar.....	57
5	Gruplar ve Yarı-Gruplar.....	59
5.1	Gruplar ve Bazı Grup Aileleri.....	59
5.2	Permutasyon Grupları.....	63
5.3	Morfizm ve Grup Kodları.....	65
5.4	Alıştırmalar.....	72
6	Kombinatorik Teori.....	73
6.1	Kombinatorik ve temel sayma kuralları.....	73
6.2	Permutasyonlar.....	74
6.3	Kombinasyonlar.....	75
6.4	Alıştırmalar.....	78
7	Kafes Yapıları ve Boole Cebri.....	79
7.1	Kafes Yapıları ve Özellikleri(Lattice Structures).....	80
7.2	Boole Cebri'nin Özellikleri.....	83
7.3	Boole Cebri'nin Fonksiyonları.....	83
7.4	Boole İfadelerinin Minimize Edilmesi.....	85
7.5	Alıştırmalar.....	87
8	Graf Teorisi.....	88
8.1	Graflar ve Tanımlar.....	88
8.2	Yollar ve Devreler.....	95
8.3	Grafların İzomorfizmi.....	98
8.4	Düğüm Boyama, Ağaçlar ve Düzlemsel Graflar.....	100
	Alıştırmalar.....	105
9	Yineleme (Recurrence) Bağlıntıları.....	107
9.1	Alıştırmalar.....	111
10	Algoritmalar ve Sonlu Durumlu Makinalar.....	112
10.1	Algoritmalar ve Karmaşıklık.....	112
10.2	Sonlu Durumlu Makinalar ve Turing Makinaları.....	117
10.3	Alıştırmalar.....	120

# 1. Önerme Mantığı ve İspatlar

Mantık önermelerin doğruluğunu kanıtlamak için kullanılır. Önermenin ne olduğu ile ilgilenmek yerine bazı kurallar koyar ve böylece önermenin genel formunun geçerli olup olmadığını yargılar. Mantığın bize sağladığı kurallar, belirtilen aşamalardan çıkan sonucun tutarlı olup olmadığını veya sonucun doğruluğunun ispatlanması aşamasındaki basamaklarda hatalı bir kısmın bulunup bulunmadığını değerlendirmemizi sağlar.

## 1.1 Önermeler ve Doğruluk Tabloları

**Önerme**, doğru veya yanlış değerinden sadece ve sadece birini alabilen ifadedir. Fakat aynı anda iki değeri birden alamaz. Örneğin aşağıdaki ifadeler birer önermedir.

1. Bu gül beyazdır.
2. Üçgenin dörtkenarı vardır.
3.  $3 + 2 = 6$ .
4.  $6 < 24$
5. Yarın benim doğum günüdür.

Aynı önermenin nerede, ne zaman ve kim tarafından söylendiğine bağlı olarak bazen doğru bazen yanlış olabileceğine dikkat ediniz. Yarın doğum günü olan biri için 5. önerme doğru iken, başka biri tarafından ifade edildiğinde yanlış olacaktır. Hatta bugün herhangi biri için doğru olan bir önerme başka bir gün için yanlış olabilir.

Ünlemler, sorular ve istekler doğru veya yanlış diye ifade edilemediklerinden birer önerme değildirler. Bu nedenle aşağıdakiler önerme değildir.

6. Çimlerden uzak durun.
7. Çok yaşa kraliçe!
8. Jane'in partisine gittin mi?
9. Öyle söyleme.

Bir önermenin doğruluğu (T) veya yanlışlığı (F) önermenin **doğruluk değeri** şeklinde adlandırılır. 4. önerme doğru (T) doğruluk değerini taşıırken, 2 ve 3. önermeler yanlış (F) doğruluk değerini taşır. 1 ve 5 numaralı önermenin doğruluk değerleri ifade edildikleri duruma bağlıdır.

Geleneksel olarak önermeler p,q,r... harfleri kullanılarak sembolize edilirler. Örneğin p: Manchester İskoçya'dadır, q: Dinosaurlar hala yaşamaktadır.

## 1.2 Mantıksal Bağlılıklar ve Doğruluk Tabloları

Bundan önceki konudaki 1-5 numaralı ifadeler basit birer ifade oluşturduklarından **basit önermeler**dir. Bu bölümde basit önermelerin nasıl bağlanarak **bileşik önermeler** şeklinde adlandırılan daha karışık önermeler oluşturulacağı anlatılacaktır. Önerme çiftlerini bağlamaya yarayan araçlara mantıksal bağlayıcılar denir ve herhangi bir bileşik önermenin doğruluk değeri tamamen ( a ) kendisini oluşturan basit önermelerin doğruluk değerleri ( b ) bunları bağlayan özel bağlayıcı veya bağlayıcılar tarafından belirlenir.

En çok kullanılan bağlaçlara geçmeden önce, basit bir önerme üzerinde gerçekleştirilebilen bir işleme bakalım. Bu işleme **tersini alma** denir ve önermenin doğruluk değerini tersine çevirme

etkisi yapar. Tersini alma sonucunda önerme eğer doğru ise yanlış, yanlış ise doğru değerini alır. Bu işlemi bir tablo ile özetleyebiliriz. Eğer  $p$  bir önermeyi sembolize ediyorsa,  $\bar{p}$  ( $\sim p$ ,  $\neg p$  veya  $\neg p$ )  $p$ 'nin tersini temsil eder. Aşağıdaki tablo  $p$  ve  $\bar{p}$  'nün doğruluk değerleri arasındaki ilişkiyi gösterir.

$p$	$\bar{p}$
T	F
F	T

Soldaki sütun  $p$  için tüm olası doğruluk değerlerini verirken sağ sütun  $p$ 'nin tersi  $\bar{p}$  için karşılık gelen doğruluk değerlerini verir. Bu şekilde, önermelerin doğruluk değerlerini özetleyen tabloya **doğruluk tablosu** denir.

Bir önermenin tersini ifade etmenin çeşitli yolları vardır. “Bütün köpekler vahşidir” önermesini düşünersek, bu önermenin tersi şunlar olabilir:

Bütün köpeklerin vahşi olması söz konusu değildir.  
 Köpeklerin hepsi vahşi değildir.  
 Bazı köpekler vahşi değildir.

Dikkate edilirse “Hiçbir köpek vahşi değildir” önermesi “Bütün köpekler vahşidir” önermesinin tersi değildir. Tersini alma işleminde, ilk ifadenin doğru olduğu her durumda ikinci ifade yanlış olmalı ya da tam tersi olmalıdır. “Bütün köpekler vahşidir” önermesi sadece bir köpek bile vahşi olduğunda yanlıştır ancak “Hiçbir köpek vahşi değildir” önermesi bu durumda doğru değildir.

Mantıksal bağlayıcılar önerme çiftlerini bağlamaya yararlar. Burada çok kullanılan beş mantıksal bağlayıcıdan bahsedilecektir: kesişim, dahili birleşim, harici birleşim, koşullu önerme ve iki yönlü koşullu önerme.

### 1.2.1 Kesişim (Conjunction)

İki basit önerme aralarına ‘ve’ kelimesi koyarak bağlanabilir. Bunun sonucunda oluşan bileşke önermeye iki basit önerme bileşeninin kesişimi denir. Eğer  $p$  ve  $q$  iki basit önerme ise  $p \wedge q$  (veya  $p.q$ )  $p$  ve  $q$  ‘nün birleşimini temsil eder.

$p$ : Güneş Parlıyor.  
 $q$ : Köpekler havlar.  
 $p \wedge q$ : Güneş parlıyor ve köpekler havlar.

Altındaki doğruluk tablosu  $p$  ve  $q$  ‘nün tüm olası doğruluk değerleri için  $p \wedge q$  ‘nün doğruluk değerlerini gösterir.

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Yukarıdaki tablodan da görülebildiği gibi  $p \wedge q$  sadece  $p$  ve  $q$  ‘nün her ikisinin de doğru olduğu zaman doğrudur.

### 1.2.2 Birleşim (Disjunction)

Veya kelimesi iki basit önermeyi birleştirmek için kullanılabilir. Oluşan bileşke

önerme iki basit önermenin birleşimi olarak adlandırılır. Mantıkta iki çeşit birleşim vardır: dahili ve harici. Gerçek hayatta kullandığımız veya kelimesi bazen kafa karıştırıcı olabilir.

$p$  ve  $q$  birer önerme ise  $p \vee q$ ,  $p$  ve  $q$  'nun dahili birleşimini temsil eder. Bu bileşke önerme bileşenlerinden herhangi birisi veya her ikisinin doğru olması durumunda doğru aksi halde yanlıştır.  $p \vee q$  için doğruluk tablosu aşağıdadır.

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$p$  ve  $q$  'nun harici birleşimi ise  $p \underline{\vee} q$  şeklinde gösterilir. Bu bileşke önerme sadece bir bileşenin doğru olması durumunda doğrudur.  $p \underline{\vee} q$  'nun doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

$p$	$q$	$p \underline{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

İki basit önerme “veya” kullanılarak bağlanırken hangi tip birleşimin kullanılacağı cümlelerin genel durumundan anlaşılır. Örneğin, ‘Yarın yüzmeye gideceğim veya golf oynayacağım’ cümlesi iki işin birden yapılmayacağı anlamı taşıdığından harici birleşimdir. Diğer taraftan, ‘Adaylar 25 yaşın üzerinde veya en az 3 yıllık tecrübeye sahip olmalıdır’ cümlesinde iki koşuldan birini sağlayan adaylar dikkate alınacakmış izlenimi verdiği için dahili birleşimdir.

### 1.2.3 Koşullu Önergeler

Koşullu önerme bağlayıcısı  $\rightarrow$  işareti ile sembolize edilir. Koşullu önermenin normal dildeki karşılığı örnekte de görüleceği gibi ‘Eğer ...’ dir.

$p$ : Kahvaltı yaparım.

$q$ : Öğlen yemeği yemem.

$p \rightarrow q$ : Eğer kahvaltı yaparsam, öğlen yemeği yemem.

Yukarıdaki örnekteki  $p \rightarrow q$  için diğer alternatifler:

Sadece eğer öğlen yemeği yemezsem kahvaltı yaparım.

Kahvaltı yapmam öğlen yemeği yemeyeceğim anlamına gelir.

Ne zaman kahvaltı yaparsam öğlen yemeği yemem.

Aşağıdaki tablo  $p \rightarrow q$  'nun doğruluk tablosudur.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Dikkat edilirse ‘p ise q’ önermesi sadece p’ nin doğru q’ nun yanlış olması durumunda yanlıştır.(örneğin doğru bir ifade yanlıştır bir ifade anlamına gelemez.) Eğer p yanlıştır ise bileşke önerme q’nun doğruluk değeri ne olursa olsun doğrudur. Şu önermeye bakalım: ‘Eğer derslerimi geçersen çok sevineceğim’. Bu ifade eğer sınavlarımı geçemezsem ne yapacağım hakkında hiçbir şey söylemiyor. Belki sevinirim, belki sevinmem ama hiçbir durumda söylenen ifade yanlıştır değildir. Önermenin yanlıştır olabileceği tek durum sınavlarımı geçip sevinmediğim durumdur.

Koşullu önermelerde, p önermesi önceki ve q önermesi sonraki olarak adlandırılır. p önermesi q için **yeterli** koşul, q ise p için **gerekli** koşuldur.

### 1.2.4 Çift Yönlü Koşullu Önermeler

Çift yönlü koşullu bağlayıcı  $\leftrightarrow$  ile gösterilir ve ‘sadece ve sadece .... ise .....’ şeklinde ifade edilir. Önceki örneğe tekrar dönersek:

p: Kahvaltı yaparım.

q: Öğlen yemeği yemem.

$p \leftrightarrow q$  : Sadece ve sadece öğlen yemeği yemezsem kahvaltı yaparım.(alternatif olarak sadece ve sadece kahvaltı yaparsam öğlen yemeği yemem.)

$p \leftrightarrow q$  ‘nin doğruluk tablosu şu şekildedir:

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Dikkat edilirse  $p \leftrightarrow q$  nun doğru olabilmesi için p ve q nun her ikisinin de aynı doğruluk değerine sahip olması gerekir.

**Örnek 1.1:** p, ‘Bugün Pazartesi’ ve q ‘İstanbul’a gideceğim’ önermeleri olsun. Buna göre aşağıdaki önermeleri sembollerle ifade ediniz.

- (i) Eğer bugün Pazartesi ise İstanbul’a gitmeyeceğim.
- (ii) Bugün Pazartesi veya İstanbul’a gideceğim fakat ikisi birden değil.
- (iii) Bugün İstanbul’a gideceğim ve bugün Pazartesi değil.
- (iv) Sadece ve sadece bugün Pazartesi değilse İstanbul’a gideceğim.

### Çözüm 1.1:

- (i)  $p \rightarrow \bar{q}$
- (ii)  $p \vee q$
- (iii)  $q \wedge \bar{p}$
- (iv)  $\bar{p} \leftrightarrow q$ .

**Örnek 1.2:** Aşağıdaki bileşik önermeler için doğruluk tabloları oluşturunuz.

- (i)  $\bar{p} \vee q$

(ii)  $\bar{p} \wedge \bar{q}$

(iii)  $\bar{q} \rightarrow p$

(iv)  $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$

**Çözüm 1.2:**

(i)

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(ii)

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(iii)

$p$	$q$	$\bar{q}$	$\bar{q} \rightarrow p$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

(iv)

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

### 1.3 Tutolojiler ve Çelişkiler

Bileşenlerinin doğruluk değeri ne olursa olsun her zaman doğru olan birçok bileşik önerme mevcuttur. Benzer şekilde bileşenlerinden bağımsız olarak her zaman yanlış olanlar da vardır. Her iki durumda da bu özellik bileşke önermenin yapısının sonucudur.

**Tutoloji**, basit bileşenlerinin doğruluk değeri ne olursa olsun doğru olan bileşke önermedir. Örnek : insanlar erkektir veya kadındır önermesi her zaman doğrudur. O nedenle bu önerme bir tutolojidir.

**Çelişki** ise, basit bileşenlerinin doğruluk değeri ne olursa olsun yanlış olan bileşke önermedir.

Tutoloji  $t$  ile, çelişki ise  $f$  ile gösterilir.

**Örnek 1.3 :**  $p \vee \bar{p}$  'nin tutoloji olduğunu gösteriniz.

**Çözüm1.3 :** Eğer  $p \vee \bar{p}$  'in doğruluk tablosunu yaparsak:

$p$	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
T	F	T
F	T	T

Dikkat edilirse  $p \vee \bar{p}$  her zaman doğru değerini verir (p yerine hangi önerme konulursa konulsun) ve bu sebeple tutolojidir.

**Örnek 1.4 :**  $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$  'nin tutoloji olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1.4 :** Verilen önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Doğruluk tablosunun en son sütunu sadece T doğruluk değerini gösterir ve bu nedenle  $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$  ifadesi bir tutolojidir.

Son örnekte, ilk örnekten elde ettiğimiz 'herhangi bir önermenin tersinin dahili birleşimi bir tutolojidir' sonucunu kullanabilirdik. İkinci örnekte elimizde  $p \wedge q$  önermesi ve tersi  $\overline{p \wedge q}$  var. Bu nedenle önceki sonuca göre  $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$  bir tutolojidir.  $(p \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$  önermesi,  $p \vee \bar{p}$  önermesinin **yedek örneği**dir denir. Açıkça görülüyor ki, bir tutolojinin yedek örneği kendi başına bir tutolojidir ve dolayısıyla bir önermenin tutoloji olduğunu göstermenin bir yolu da bu önermenin tutoloji olduğu bilinen başka bir önermenin yedek örneği olduğunu göstermektir. Tıpkı tutolojilerde olduğu gibi bir çelişkinin de yedek örneği bir çelişkidir.

## 1.4 Mantıksal Eşdeğerlilik ve Mantıksal Anlam

İki önerme, kendilerini oluşturan bileşenlerinin tüm doğruluk değeri kümesi için aynı doğruluk değerine sahipse bu iki önerme **mantıksal eşdeğer**dir denir. P ve Q iki bileşik önerme olsun, P ve Q mantıksal eşdeğerse  $P \equiv Q$  şeklinde gösterilir. Tutolojiler ve çelişkilerde olduğu gibi mantıksal eşdeğerlilik de P ve Q' nun yapılarının sonucudur.

**Örnek 1.5 :**  $\bar{p} \vee \bar{q}$  ve  $\overline{p \wedge q}$  'nun mantıksal eşdeğer olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1.5 :**  $\bar{p} \vee \bar{q}$  ve  $\overline{p \wedge q}$  için doğruluk tablosunu çizelim.

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

$\overline{p \vee q}$  ve  $\overline{p \wedge q}$  için hesaplanan sütunlardaki doğruluk değerleri karşılaştırılırsa aynı olduklarını görülür. Bu nedenle bu iki önerme mantıksal eşdeğerdir denilebilir.

Eğer iki bileşke önerme mantıksal eşdeğerse, bu iki önermenin çift yönlü koşullu bağlayıcı ile bağlanmasıyla oluşan önerme bir tutoloji olmalıdır. ( $P \equiv Q$  ise  $P \leftrightarrow Q$  tutoloji olmalı) Bunun nedeni, iki mantıksal eşdeğer önermenin ikisi de aynı anda ya doğrudur ya yanlıştır. Her iki durumda da çift yönlü koşullu önerme doğrudur. Bu durumun tersi de yani  $P \leftrightarrow Q$  bir tutoloji ise  $P \equiv Q$ . Bunun nedeni şu gerçeğe dayanır: Çift yönlü koşullu önerme  $P \leftrightarrow Q$  sadece P ve Q' nun her ikisinin de aynı doğruluk değerine sahip olduğu zaman doğrudur.

İki önerme arasında oluşabilecek bir diğer yapıya-bağımlı ilişki de mantıksal anlamdır. Eğer bir P önermesi her doğru olduğunda Q önermesi de doğru oluyorsa, P önermesi mantıksal olarak Q önermesi anlamına gelir. Ancak bunun tersi doğru değildir yani Q, P yanlış olduğunda da doğru olabilir. Mantıksal anlam  $\vdash$  ile sembolize edilir.  $P \vdash Q$ , P mantıksal olarak Q anlamına gelir demektir.

**Örnek 1.6:**  $q \vdash (p \vee q)$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1.6:** q'nun her doğru olduğu anda  $(p \vee q)$  nun da doğru olduğunu göstermek gerekir. Doğruluk tablosunu yaparsak:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

q'nun doğru olduğu her durumda (1 ve 3. satırlar)  $p \vee q$  da doğrudur.  $p \vee q$ , q yanlış olduğunda da doğrudur (2. satır) fakat bunun q,  $p \vee q$  ile mantıksal anlamdır ifadesinin sağlanmasıyla bir alakası yoktur.

' $P \vdash Q$ ' ile ' $P \rightarrow Q$  bir tutolojidir' ifadeleri benzer ifadelerdir.  $P \vdash Q$  ise P doğru iken Q hiçbir durumda yanlış değildir. Bu da sadece  $P \rightarrow Q$ ' nun yanlış olduğu durumda mümkün olduğundan  $P \rightarrow Q$  bir tutoloji olmalıdır.

## 1.5 Önermeler Cebri

Aşağıdaki liste bir önceki konudaki teknikler kullanılarak ispatlanabilecek mantıksal eşitlikleri içerir. Bu kurallar p, q ve r gibi basit önermeler ve bunların yerine konabilecek yedek örneklerin tamamı için geçerlidir.

### Aynılık (Tek Kuvvet) Özelliği(idempotence)

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p.$$

### Değişme Özelliği(Commutativity)

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \searrow q \equiv q \searrow p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p.$$



### Birleşme Özelliği(Associativity)

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \wedge r &\equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r &\equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r) \\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r &\equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r).\end{aligned}$$

### Yutan Eleman(absorbtion)

$$\begin{aligned}p \wedge (p \vee q) &\equiv p \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p.\end{aligned}$$

### Dağılma Özelliği(Distributivity)

$$\begin{aligned}p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\end{aligned}$$

### Çift ters Özelliği((Involution)

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

### De Morgan Kuralları

$$\begin{aligned}\overline{p \vee q} &\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \\ \overline{p \wedge q} &\equiv \overline{p} \vee \overline{q}.\end{aligned}$$

### Özdeşlik Özelliği(identity)

$$\begin{aligned}p \vee f &\equiv p \\ p \wedge t &\equiv p \\ p \vee t &\equiv t \\ p \wedge f &\equiv f.\end{aligned}$$

### Tamamlama Özelliği(Complement)

$$\begin{aligned}p \vee \overline{p} &\equiv t \\ p \wedge \overline{p} &\equiv f \\ \overline{\overline{f}} &\equiv t \\ \overline{\overline{t}} &\equiv f\end{aligned}$$

### 1.5.1 Eşlik Kuralı (Duality Principle)

Sadece  $\vee$  ve  $\wedge$  bağlayıcılarını içeren herhangi bir P önermesi verilmiş ise, bu önermenin eşi  $\vee$  yerine  $\wedge$ ,  $\wedge$  yerine  $\vee$ ,  $t$  yerine  $f$  ve  $f$  yerine  $t$  koyarak elde edilir. Örneğin,  $(p \wedge q) \vee \overline{p}$ ' nin eşi  $(p \vee q) \wedge \overline{p}$  olmalıdır.

Dikkat edilirse kesişim ve dahili birleşim dışındaki bağlayıcılarla bağlanmış bileşik önermelerin eşinin nasıl elde edildiğinden bahsedilmedi. Bunun önemi yoktur çünkü diğer bağlayıcılara sahip önermelerin hepsi sadece tersini alma ve kesişim bağlayıcılarını içeren mantıksal eşdeğer

formunda yazılabilir. Eşlik kuralına göre eğer iki önerme mantıksal eşdeğerse, eşleri de mantıksal eşdeğerdir.

### 1.5.2 Yerine Koyma Kuralı

Diyelim ki, elimizde mantıksal eşdeğer  $P_1$  ve  $P_2$  önermeleri ile  $P_1$  'i içeren  $Q$  bileşik önermesi var. Yerine koyma kuralına göre  $P_1$  yerine  $P_2$  koyarsak sonuçta oluşan önerme  $Q$  ile mantıksal eşdeğerdir. Bu sebeple mantıksal eşdeğer önermeleri birbirinin yerine koymak sonuçta oluşan önermenin doğruluk değerini değiştirmez. Bunun ispatı şu şekilde yapılabilir: Doğruluk tablosunda  $P_1$  sütunu yerine  $P_2$  sütununu koyarsak sonuç değişmez zira  $P_1$  ve  $P_2$  'nin doğruluk tabloları aynıdır.

Yerine koyma kuralı ve önermeler cebri kuralları doğruluk tabloları çizmeden önermeler arasında mantıksal eşitlikler kurabilmemizi sağlar.

**Örnek 1.7:**  $(\bar{p} \wedge q) \vee (\overline{p \vee q}) \equiv \bar{p}$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm 1.7:**  $(\bar{p} \wedge q) \vee (\overline{p \vee q}) \equiv (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$  (De Morgan Kuralı)

$$\equiv \bar{p} \wedge (q \vee \bar{q}) \quad (\text{Dağılma özelliği})$$

$$\equiv \bar{p} \wedge t$$

$$\equiv \bar{p}$$

### 1.5.3 Koşullu önermeler ile ilgili diğer özellikler

Verilen  $p \rightarrow q$  koşullu önermesi için;

a)  $p \rightarrow q$  'nün karşıtı( converse)  $q \rightarrow p$

b)  $p \rightarrow q$  'nün tersi( inverse)  $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$

a)  $p \rightarrow q$  'nün ters pozitif( contrapositive)  $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$

Doğruluk Tablosu

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Tablodan  $p \rightarrow q$  'nün ters pozitif olan,  $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$  'nin mantıksal eşdeğer oldukları görülmektedir.

$$p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

Koşullu önermenin karşıtı veya tersi kendisi ile mantıksal eşdeğer değildir. Hâlbuki karşıt ve zıttı

birbiriyle mantıksal eşdeğerdir.

Örnek:  $p$  : bu gün salı  $q$ : bu gün bir sınavım var

$p \rightarrow q$  : eğer bugün salı ise bugün bir sınavım var

a)  $p \rightarrow q$  'nün karşıtı( converse)  $q \rightarrow p$  : Eğer bugün sınavım var ise bugün salı.

b)  $p \rightarrow q$  'nün tersi( inverse)  $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$  : Eğer bu gün salı değil ise bugün sınavım yok

a)  $p \rightarrow q$  'nün ters pozitif(contrapositive)  $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$  : Eğer bugün sınavım yok ise bugün salı değil.

Tez(Argument): birbirini oluşturan önemleri dayanak olarak alan önemler kümesine denir ve sonunda bir sonuca ulaşır. Dayanak noktalarındaki önermeler bağlaç ile birbirine bağlanırlar ve sonunda mantıksal bir sonuca ulaşırlar. Aksi halde tez geçersizdir.

Eğer dayanak noktasındaki önermeler  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ve sonucu  $Q$  ise tez,

Eğer  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \vdash Q$  veya  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q)$  bir tutolojidir.  $P_1, P_2, \dots, P_n$  doğru olduğunda,  $Q$  doğru olmalıdır.

## 1.5.4 Yüklemler mantığı(Predicate Logic)

Yüklem, bir veya birkaç nesnenin veya bireylerin özelliklerini açıklar.

.... kırmızı,

.....nın uzun dişleri var

.....Başı üzerinde durmaktan hoşlanır . gibi.

Yüklemi ifade etmek için büyük harf ile semboller kullanırız.

M: kırmızıdır

B: uzun dişleri var

G: başının üzerinde durmaktan hoşlanır

Küçük harf semboller ise bireyleri ifade etmekte kullanılır.

a : bu gül

b: Ahmet

Basit önerme aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

M(a) : Bu gül kırmızıdır

M(b) :Ahmet kırmızıdır

G(b) : Ahmet başı üzerinde durmaktan hoşlanır.

Eğer M , kırmızıdır yüklemi olarak ifade edilirse M 'yi  $M(x)$  olarak ifade ederiz ve “x kırmızıdır” anlamına gelir. Burada x değişkeni, herhangi bir nesne veya birey adı ile yer değiştirilebilir. Bu nedenle  $M(x)$  önermesel fonksiyon olarak adlandırılır. Önermesel fonksiyonun tersi ,

Eğer  $M(x)$  : “x kırmızıdır” ise  $\overline{M(x)}$  : “x kırmızı değildir” anlamına gelir.

**Evrensel Niteleyici :**”Bütün sıçanlar gridir” önermesini düşünelim. Bunu ilk yolu

bütün sıçanlar için ; eğer x bir sıçan ise x gridir . önermesi ifade edilebilir. Bu bize yeni bir gösterim tanımlamayı getirir.

$R(x)$  : x bir sıçandır ,  $G(x)$  : x gridir. Her x için ‘i  $\forall x$  olarak ifade edip

$(\forall x)[R(x) \rightarrow G(x)]$  şeklinde yazılır. Burada  $\forall$  evrensel niteleyici olarak adlandırılır.

**Varlık Niteleyici** :Eğer aynı önermede “Enaz bir adet x” vardır ‘i  $\exists x$  şeklinde ifade ederek, “Bazı sıçanlar gridir” önermesini ; vardır şeklinde yazarız.

$(\exists x)[R(x) \rightarrow G(x)]$  olarak yazabiliriz burada  $\exists$  ye varlık niteleyici denir ve en az bir x vardır veya bazı x’ler için şeklinde söylenir.

### **Yüklem mantığında Düşünceler**

Yüklem mantığında bir tezin geçerliliği sağlanır. Bütün yüklemeler doğruluğunun sağlandığı durumda sonuçta doğrudur. Aşağıdaki dört kural yüklem mantığında geçerlidir.

**1. Evrensel tanım** : Eğer önerme  $(\forall x)F(x)$  doğru ise  $F(a)$  ‘da evrendeki her a için doğrudur.

**2. Evrensel Genelleştirme:** Eğer önerme  $F(a)$ , evrendeki her a için doğru ise  $(\forall x)F(x)$  ‘da doğrudur.

**3. Varlık tanımı** : Eğer önerme  $(\exists x)F(x)$  doğru ise, evrende,  $F(a)$ ‘yı doğru yapan bir a vardır.

**4. Varlık genelleştirmesi** : Eğer önerme evrendeki bazı a’lar için  $F(a)$  doğru oluyorsa ‘ $(\exists x)F(x)$  doğrudur.

Örnek : Yeşil gözlü olan herkese güvenilmez. Ali’nin yeşil gözleri var. Öyleyse Ali’ye güvenilmez. Tezinin geçerliliğini gösterelim.

Eğer  $G(x)$  : x’in yeşil gözleri var ve  $T(x)$  : x güvenilir ve a , ali’yi gösterirse;

$(\forall x)[G(x) \rightarrow \overline{T(x)}]$  ve  $G(a) \rightarrow \overline{T(a)}$  şeklindedir.

## **1.6 Matematiksel İspat**

Matematiksel ispatın popüler görünümü genellikle sembollerle yazılan birtakım adımların ard arda sıralanması şeklindedir. Her bir adım mantıksal olarak ispatın bir önceki adımını takip eder ve son satır ispatlanacak ifadedir. Bu imaja bağlı olarak ortak kanı, ispatın matematiksel doğruluğunun mutlak ve sıkı bir testi olmasıdır. Fakat sürpriz bir biçimde, kendi aralarında ortak bir kanı olmamasına rağmen, bu görüş çoğu profesyonel matematikçinin görüşü değildir. Çoğu ispatın sosyolojik boyutunun olduğu görüşünü savunur ve ispatı, fikirlerin açıklanması ve iletimi için bir şart olarak kabul eder.

Aslında her iki görüş de doğrudur. İspat kelimesi geniş bir yelpazeyi kapsar. Bu yelpazenin bir ucunda birinci bölümdeki mantıksal işaretlerle ifade edilen çok resmi ispatlar bulunur. Her bir adım bir önceki adımı mantık kuralları çerçevesinde takip eder. Aslında, ispat yapmak için sadece semboller kullanmak mümkündür fakat bu tabii ki takip etmesi zor bir olaydır. Daha az resmi ispatlar ise kelimelerin, sembollerin ve diyagramların karışımıyla gerçekleştirilir. Matematik ile ilgili kitaplardaki ispatlar genellikle az resmi ispatlardır.

Matematikte onay verilmeyen bir şey varsa o da gözlemlere dayanarak sonuca gitmektir. Öte yandan, birçok kez bir çift sayının karesini aldığımızda sonucun bir çift sayı olduğunu gözlememize rağmen bu çift sayıların karesinin çift sayı olduğunu kanıtlamaz. Ancak

buna inancımızı kuvvetlendirir ve bu gözleme geçerli bir kanıt aramaya teşvik eder. Gözlemlere dayanarak çeşitli gerçekler hakkında yargılarda bulunmaya tümevarım denir. Mantıksal çıkarımlarla sonuca varılan yargıya ise tümdengelim denir.

### 1.6.1 Aksiyomlar ve Aksiyom Sistemleri

Matematikselsel bir teori, örneğın küme teorisi, sayı teorisi veya grup teorisi değişik bileşenler içerir. Bunların en önemlileri:

1. Tanımlanmamış terimler.
2. Aksiyomlar.
3. Tanımlar.
4. Teoremler.
5. İspatlar.

3, 4 ve 5. maddelerde sıralananlar hakkında herkes bilgi sahibi olabilir. Matematikte tanımlanmamış terimlere ihtiyaç duymamız sürpriz gelebilir fakat biraz düşünülürse bunun gerekliliği anlaşılabilir.

Diyelim ki, küme teorisi üzerine eksiksiz bir çalışma yapmak istiyoruz. Açıktır ki başlangıç noktası kümenin ne olduğunu anlatmaktır: Tanım 1: Küme .....- Yani? Problem şu ki, kümeyi tarif etmek için başka bir terime ihtiyacımız var (örneğin topluluk) ancak bu sefer de diğer terim tanımlanmamış durumdadır. Diğer terimi tanımlayabilmek için yine başka bir tanımlanmamış terime ihtiyacımız var ve bu böyle devam eder. Açık ki, sonsuz bir tanım dizisinden uzak durmamız gerekiyor. Bu da bizi bazı terimleri tanımlanmamış bırakmaya zorlar. Tabi ki, hala aklımızdakini sezgisel biçimde ifade edebiliriz ancak bu sezgisel tanımlama teorimizin bir parçası olmak zorunda değildir.

Listedeki 2 numaralı eleman olan aksiyomların da biraz açıklanmaya ihtiyacı var. Matematikselsel bir teorideki bütün terimleri tanımlayamadığımız gibi aynı sebeple teorideki her ifadeyi de kanıtlayamayız. Bir yerden başlamak için kanıtlanmayacak bazı ifadelere ihtiyaç vardır. Bu ifadelere **aksiyom** denir. Aksiyomlar teoremin temel özelliklerini temsil ederler.

Bilmek gerekir ki, aksiyomların doğruluğundan veya yanlışlığında söz edilmez; onlar sadece teoremin ilerleyebilmesini sağlayan tanımlanmamış terimler hakkındaki ifadelerdir. Öte yandan kendi aralarında tutarlı olmalıdırlar ve aynı anda hepsinin doğru olma imkanı olmalıdır. Kendi aralarında çelişen aksiyomlar kabul edilemez. Matematikselsel bir ifadeyi uygulamaya gelince, tanımlanmamış terimler yorumlanırlar ve aksiyomlar doğru veya yanlış şeklinde önermeler haline gelir.

Bir aksiyomatik teori tanımlar yaparak ve teorem ispatlanarak gelişir. Tanımlar, tanımlanmamış terimlerin yanlış şeylerle ilişkilendirilmemeleri için yapılırlar. Teorem ise birinci bölümde anlatılan mantıksal yargıları kullanan aksiyomları takip eden, sistemdeki çeşitli terimler hakkındaki ifadelerdir. Teorem orijinal aksiyomlardan gittikçe uzaklaşarak yayılır fakat sonuçta onlar üzerine inşa edilir. Teoremler ve ispatları saf matematiğın kalbini oluşturur.

## 1.7 İspat Yöntemleri

Görüldüğü gibi, resmi matematik, aksiyomatik yöntem üzerine inşa edilmiştir. Tanımlanmamış terimler ve aksiyomlar ile başlar, mantık kurallarını kullanarak teoremleri ispatlayarak gelişir. Bu bölümde ispatın temel özellikleri ve bazı ispat yöntemlerinin genel yapısından bahsedilecektir.

Diyelim ki,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  bir aksiyom sistemi verildi. Teorem, aksiyomların birleşimi ile

mantıksal olarak anlamlandırılan sistem terimleri hakkındaki ifadelerdir. Bu sebeple, sistem içindeki bir teoremi resmi olarak bir T önermesi şeklinde öyle ki;

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \vdash T.$$

Hatırlarsak  $P \vdash Q$ , P' nin doğru olduğu her durumda doğrudur. Aksiyom sisteminin herhangi bir modelinde aksiyomlar doğru önermeler şeklinde yorumlara sahiptir böylece her teorem doğru önerme şeklinde bir yoruma sahiptir. Bu nedenle teoremler, aksiyom sistemindeki her modelde doğru olan önermeleridir.

O halde bir teoremin ispatını ne oluşturur? Gayri resmi olarak ispat, sonucu teorem olan mantıklı düşüncelerdir. Bir teorem bir kez ispat edildiğinde diğer teoremlerin ispatı için diğer aksiyomlar ile birlikte kullanılabilir. Bundan dolayı,  $A_i$  ( $i=1,2, \dots,n$ ) aksiyomlar;  $T_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) ispatlanmış teoremler olmak üzere T teoremini ispat etmek için

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_m) \vdash T$$

olduğunu göstermek gerekir. Bunu aksiyomların doğruluğunu varsayarak ve bunun T' nin doğruluğunu garantilediğini göstererek yaparız.

### 1.7.1 Koşullu Önermelerin Doğrudan İspatı

Birçok matematiksel varsayım koşullu önerme ( $P \rightarrow Q$ ) biçiminde ifade edilebilir. Bu sebeple bunların ispatları,  $A_i$  ve  $T_j$  aksiyomlar ve teoremler olmak üzere

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_m) \vdash (P \rightarrow Q)$$

olduğunu göstermeyi içerir. Bu

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_m) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

ifadesinin bir tutoloji olduğunu ve  $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$  ve  $(R \wedge P) \rightarrow Q$  mantıksal eşdeğerliliğini kullanarak

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_m \wedge P) \rightarrow Q$$

ifadesinin bir tutoloji olduğunu veya

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_m \wedge P) \vdash Q$$

olduğunu göstermeye denktir. O halde,  $P \rightarrow Q$  şeklindeki teoremlerin direkt ispatı için aksiyomların doğruluğunu ve bundan dolayı tüm ispatlanmış teoremlerin doğruluğunu varsayabiliriz.

**Örnek 1.8:** Tüm n tamsayıları için, n çift ise  $n^2$ 'nin de çift olduğunu kanıtlayınız.

**İspat:** n çift bir tamsayı olsun. Bu halde 2, n'in çarpanlarından biridir ve n, m bir tamsayı olmak üzere  $n=2m$  şeklinde ifade edilebilir. Buradan yola çıkarak  $n^2=(2m)^2=4m^2$  olur.  $4m^2$  ifadesi  $2m^2$  tamsayı olmak üzere  $2(2m^2)$  şeklinde yazılabilir. Bu sebeple  $n^2$  çifttir.

Dikkat edilirse birçok adımda sebepler göz ardı edilmiştir. Örneğin,  $(2m)^2=4m^2$  eşitliğinin doğruluğu için herhangi bir sebep belirtilmedi. Bunun nedeni bu adımın çok açık olması.Öte yandan ciddi bir ispatta eksik detaylar sağlanmalıdır.

## 1.7.2 Koşullu Önermelerin Ters Pozitif(contrapositive) Kullanarak İspatı

Hatırlarsak ters pozitif  $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$ ,  $P \rightarrow Q$  koşullu önermesi ile mantıksal eşdeğerdir. Bu nedenle, ters pozitifin doğruluğunu sağlarsak koşullu önermenin de doğru olduğu sonucuna varabiliriz. Bu da  $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$  'nun kendisi de koşullu bir önerme olduğundan direkt ispatını kullanabilmemize rağmen  $P \rightarrow Q$  'nun dolaylı ispatını oluşturur.

**Örnek 1.9:** Ters pozitifini sağlayarak, her  $n$  tamsayısı için  $n^2$  çift ise  $n$  de çifttir ifadesini ispatlayınız.

**İspat:** İspatlanacak ifade  $P(n)$  ' $n^2$  çifttir',  $Q(n)$  ' $n$  çifttir' ve  $n$  seçilmiş bir tamsayı olmak üzere,  $P(n) \rightarrow Q(n)$  'dir. Ters pozitif ise  $\sim Q(n) \rightarrow \sim P(n)$ :  $n$  tek ise  $n^2$  tektir. Bu ifadeyi ' $n$  tektir' in doğru olduğunu varsayarak ve  $n^2$  'nin tek olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz.

$n$  tek bir tamsayı olsun.

$$\begin{aligned} n &= 2m+1 && m \text{ tamsayı} \\ \Rightarrow n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2+4m+1 \\ &= 2(2m^2+2m)+1 && (2m^2+2m) \text{ tamsayı} \\ \Rightarrow n^2 &\text{ tektir.} \end{aligned}$$

**Örnek 1.10:**  $m$  ve  $n$  birer pozitif tamsayı ve  $mn=100$  ise,  $m \leq 10$  veya  $n \leq 10$  olduğunu ispatlayınız.

**İspat:**  $P(m,n)$ , ' $m$  ve  $n$ ,  $mn=100$  olan iki rastgele pozitif tamsayı' ve  $Q(m,n)$ , ' $m \leq 10$ ' ve ' $n \leq 10$ ' önermelerinin dahili birleşimi olmak üzere  $P(m,n) \rightarrow Q(m,n)$  olduğunu göstermek gerekir. De Morgan kuralından  $\overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$  böylece  $Q(m,n)$ 'nin tersi ' $m > 10$ ' ve ' $n > 10$ ' dur. Ters pozitif  $\sim Q(m,n) \rightarrow \sim P(m,n)$ , bu nedenle ' $m$  ve  $n$  rastgele tamsayılar olmak üzere  $m > 10$  ve  $n > 10$  ise  $mn \neq 100$ '.

$m$  ve  $n$  pozitif tamsayılar olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} & m > 10 \text{ ve } n > 10 \\ \Rightarrow & mn > 100 \\ \Rightarrow & mn \neq 100 \end{aligned}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

## 1.7.3 Çelişki(contradiction) ile İspat

Bir doğruluk tablosu kullanarak  $f$  bir çelişki olmak üzere  $P$  ve  $\overline{P} \rightarrow f$  'nin mantıksal eşdeğerliklerini kolayca sağlayabiliriz. Bu sebeple T teoremini ispatlamak için bunun yerine  $\overline{T} \rightarrow f$  koşullu önermesini ispat edebiliriz. Bu da aksiyomların ve teoremlerin ve de  $\overline{T}$  'nün doğruluğunu ( $T$ ' nin yanlışlığını) varsayarak gerçekleştirilebilir. Daha sonra bunun daima yanlış olan bir önerme yani bir çelişki anlamına geldiğini gösterebiliriz. Çoğunlukla, çelişki bir önerme ve tersinin kesişimi  $Q \wedge \overline{Q}$  şeklindedir.  $\overline{T} \rightarrow f$  'nin doğru olduğu sonucuna varabiliriz ve bu nedenle T teoremi doğrudur.

**Örnek 1.11:**  $\sqrt{2}$  'nin rasyonel olmadığını ispatlayınız. ( $p$  ve  $q$  tamsayı ve  $q \neq 0$  olmak üzere  $p/q$  biçiminde yazılabilen tamsayılara rasyonel sayı denir.)

**İspat:** Bu teoremin ispatı çelişki ile ispatlamanın bilinen bir örneğidir.  $\sqrt{2}$  nin rasyonel olduğunu varsayarak bunun bir çelişkiye neden olduğunu göstermemiz gerekir.

Diyelim ki,  $\sqrt{2}$  rasyonel bir sayı ve m ile n tamsayı ve  $n \neq 0$  olmak üzere  $\sqrt{2} = m/n$ .  $m/n$  kesrinin en sadeleşmiş halinde yani m ve n'nin ortak çarpanlarının olmadığını varsayabiliriz. Eğer ortak çarpanları varsa sadeleştiririz. Şimdi,

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} = m/n \\ \Rightarrow & 2 = m^2/n^2 \\ \Rightarrow & 2n^2 = m^2 \\ \Rightarrow & m^2 \text{ çifttir.} \\ \Rightarrow & m \text{ çifttir. (Örnek 1.9)} \\ \Rightarrow & m = 2p \quad \text{herhangi bir p tamsayısı için} \\ \Rightarrow & m^2 = 4p^2. \end{aligned}$$

Bu sonucu  $2n^2 = 4p^2$  eşitliğinde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} & 2n^2 = 4p^2 \\ \Rightarrow & n^2 = 2p^2 \\ \Rightarrow & n^2 \text{ çifttir} \\ \Rightarrow & n \text{ çifttir.} \end{aligned}$$

Böylece hem m hem de n'nin çift olduğunu yani 2'nin ortak çarpan olduğunu göstermiş olduk. Ancak m ve n hiçbir ortak çarpana sahip değildi çünkü böyle bir çarpan en başta sadeleştirildi. Bu nedenle bir önerme ve tersinin birleşimini yani bir çelişkiyi ortaya çıkardık ve bu da teoremi ispatlamaktadır.

### 1.7.4 Çift Yönlü koşullu Önermelerin İspatı

Çift yönlü bir önermeyi  $P \leftrightarrow Q$ , ispat etmek için genellikle  $P \leftrightarrow Q$  ve  $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$ ' nin mantıksal eşdeğerliliğine başvururuz. Bu nedenle çift yönlü koşullu önermelerin ispatı iki ayrı bölüm içerir: biri  $P \rightarrow Q$ 'yu diğeri  $Q \rightarrow P$ ' yi ispatlamak.

**Örnek 1.12:** Herhangi x ve y tamsayıları için xy çarpımının, sadece ve sadece 'x çiftse' veya 'y çiftse' çift olduğunu ispatlayınız.

**İspat:** Önce direkt ispat kullanarak x çiftse veya y çiftse xy' nin çift olduğunu kanıtlarız.

x çift olsun. Örneğin n bir tamsayı olmak üzere  $x = 2n$ . O halde  $xy = 2ny$  yani xy çifttir. Eğer y çift olsaydı benzer bir argüman xy' nin çift olduğunu gösterebilir.

Şimdi tersini ispatlayalım: Eğer xy çift ise x çifttir veya y çifttir. Bunun için ters pozitifin direkt ispatını kullanabiliriz: x ve y tek ise xy de tektir.

O halde x ve y tek olsun.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & x = 2n+1, y = 2m+1 \quad m \text{ ve } n \text{ tamsayı olmak üzere} \\ \text{Öyleyse} & xy = (2n+1)(2m+1) \end{aligned}$$



$$=4mn+2n+2m+1$$

$$=2(2mn+n+m)+1$$

⇒ xy tektir. Bu da ispat demektir.

### 1.7.5 Aksine Örneklerin Kullanımı

Birçok matematiksel konjektür, ‘tüm A lar B dir’ veya ‘A özelliğine sahip tüm nesnelere B özelliğine sahiptir’ biçimindedir. Bu ifade şu şekilde de yazılabilir:  $A(x)$  ‘x, A dır(A özelliğine sahiptir)’ ve  $B(x)$  ‘x B dir (B özelliğine sahiptir)’ olmak üzere  $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$ .

Önerme şu şekilde de yazılabilir:  $x$  A evreni ile sınırlandırılmış olmak üzere  $(\forall x)[B(x)]$ . Daha önce söylenildiği gibi B özelliğine sahip olmayan bir x bulamamak teoremin ispatını oluşturmaz. Öte yandan B özelliğine sahip birçok x bulmak da bu özelliğe sahip olmayan x bulamayacağımızı garanti etmez. Ancak, evren sonlu bir evrense ve yeterli zaman varsa bütün elemanları kontrol edip özelliğin olup olmadığı sorusunun cevabını bulabiliriz. Eğer tüm elemanlarda bu özellik varsa teorem ispatlanmış olur. Bu yöntem **tüketme ile ispat** denir çünkü x’ in bütün olasılıkları tüketilir.

Diğer yandan,  $(\forall x)[B(x)]$  biçiminde bir konjektürün yanlış olduğunu ispat etmek için evrendeki sadece bir üyenin B özelliğine sahip olmadığını bulmamız gerekir. Bu aksine örnekle ispatın esasıdır.

## 1.8 Matematiksel İndüksiyon

Aslında matematiksel indüksiyon diye bilinen ispat yöntemi tümevarımsal bir ispat değildir. Olmamasının nedeni kabul edilen ispatlar sadece tümdengelimsel yargılar barındırır. İndüksiyonun doğruya yakın olan bilgiyi sağlama görevi vardır. Herhangi bir ispatla ilgili problem, onu ispatlamadan önce sonucu bilmemiz gerektiğidir.

Birçok matematiksel konjektür pozitif tamsayıların özellikleri ile ilgilidir. Örneğin şu problem: ilk n tek tamsayının toplamı için bir formül bulun. Başlama noktası olarak n’ in küçük bir değerleri için toplamı yazmak ve bunun bize olası konjektür hakkında bir fikir verip vermediğini gözlemektir.

n=1 için, toplam 1’ dir.

n=2 için, toplam 1+3=4’ tür.

n=3 için, toplam 1+3+5=9’ dur.

n=4 için, toplam 1+3+5+7=16’ dır.

Bu aşamada n’ in her değeri için toplamın  $n^2$  olduğunu fark ederiz. Birkaç tane daha deneyip daha da emin olmak isteriz.

n=5 için, toplam 16+9=25’ dur.

n=6 için, toplam 25+11=36’ dır.

Tümevarımsal yargı bizi ilk n tek tamsayının toplamı  $n^2$ ’dir konjektürüne götürür. Bunun tüm pozitif n tamsayıları için doğru olduğunu tümdengelimle dayanarak ispatlamalıyız.

Matematiksel indüksiyon sonucun tüm pozitif tamsayılar için geçerli olduğunu ispatlamak için uygundur ve şu adımları içerir:

( a ) Konjektürün  $n=1$  için geçerli olduğunu ispatla

( b ) Her  $k \geq 1$  için, eğer sonuç  $n=k$  için sağlanıyorsa  $n=k+1$  için de sağlanmalıdır. Bu adım tümevarımsal adım olarak bilinir.

(b) şıkkındaki koşullu önermeyi ispatlamak için bir önceki konuda anlatılan teknikler kullanılır. Öte yandan, tümevarımsal adım genellikle direkt ispat kullanılarak sağlanır. Sonucun  $n=k$  için sağlandığını varsayalım. (Bu varsayım bazen tümevarımsal hipotez şeklinde adlandırılır.) Bundan  $n=k+1$  için de sağlandığı sonucunu çıkarırız.  $n=1$  için sağlandığına göre tümevarımsal adım bizi  $n=2$ ,  $n=3$  vs. için de sağladığı sonucuna götürür. Matematiksel induksiyonun prensibi, sonucun tüm  $n$  pozitif tamsayıları için sağlandığını gösterir.

**Örnek 1.13:** İlk  $n$  tane pozitif tek tamsayının toplamının  $n^2$  olduğunu ispatlayınız.

**İspat:** İspatlamak istediğimiz şey:  $1 + 3 + 5 + \dots = n^2$ .

←—n terms—→

Dizideki son eleman  $2n-1$  'dir ve bu nedenle konjektürümüzü şu şekilde yazabiliriz:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Daha sonra aşağıdaki adımları izleriz.

( a ) Konjektürün  $n=1$  için doğru olduğunu ispatla.

$n=1$  için,  $1=n^2$ . O halde  $n=1$  için konjektür doğrudur.

( b )  $k \geq 1$  olmak üzere konjektürün  $n=k$  için doğru olduğunu varsay ve bunun  $n=k+1$  için konjektürün doğruluğuna yol açtığını göster.

Varsayalım ki,  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$ . Bir sonraki tamsayı olan  $2k+1$ 'i eşitliğin iki tarafına eklersek,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) &= k^2 + (2k+1) \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sol tarafı ilk  $k+1$  tane tek tamsayının toplamıdır ve tümevarımsal hipotezi kullanarak gösterdik ki, bu toplam  $(k+1)^2$ 'dir. Böylece konjektürün eğer  $n=k$  için sağlanıyorsa,  $n=k+1$  için de sağlandığını göstermiş olduk. Ayrıca  $n=1$  için de sağlandığını gösterdik ve matematiksel induksiyon kuralına dayanarak teorem tüm pozitif  $n$  tamsayıları için sağlanır diyebiliriz.

### 1.8.1 Matematiksel İndüksiyon Prensibinin Değişimleri

Tümevarımsal prensip üzerinde değişik modifikasyonlar yapılabilir. Örneğin,  $S(n)$  önermesinin sabit bir  $N$  tamsayısından büyük veya eşit tüm tamsayılar için sağlandığını ispat etmek isteyelim. Tümevarım prensibi üzerinde bazı modifikasyonlar yaparsak şunu elde ederiz:

( a )  $S(N)$ ' in doğru olduğunu ispatla.

( b )  $k \geq N$ ' yi sağlayan her tamsayı için, eğer  $S(k)$  doğru ise  $S(k+1)$  de doğrudur.

Bu tümevarım ile ispatın standart metodudur sadece 1 yerine  $N$  ile başlanmıştır.

Tümevarımsal ispatın daha önemli bir modifikasyonu 'indüksiyonun ikinci prensibi' ile sağlanır.

Bunun önemi şudur: Tümevarımsal adıma geldiğimizde  $S(n)$ ' nin sadece  $k$  yerine,  $k$ ' dan küçük ve eşit tüm pozitif  $r$  tamsayıları için doğru olduğunu varsayabiliriz.

### İndüksiyonun İkinci Prensibi

$S(n)$  doğal  $n$  sayısı ile ilgili bir ifade ve  $q$  sabit bir doğal sayı olsun.  $S(n)$  'in tüm  $n \geq q$  için doğruluğunun induksiyon ile ispatı için adımlar;

- ( a ) Temel adım : $S(q)$  nin doğruluğunu ispatla ve,
- ( b ) eğer  $k \geq q$  için,  $S(q), S(q+1), S(q+2), \dots, S(k)$  doğru ise (tüm  $q \leq k$  için  $S(q)$ ' nin doğruluğu  $S(k+1)$ 'in doğruluğu anlamına gelir.

İndüksiyonun bu ikinci prensibi ilk başta ilkinden daha genel gibi gözükür çünkü  $S(k+1)$ 'in doğru olduğu sonucuna varmak için daha fazla varsayımda bulunuruz. Ancak, ' $S(q), q \leq k$ ' yı sağlayan tüm pozitif tamsayılar için doğrudur' önermesine  $T(n)$  dersek, ikinci prensibin iki kısmı:

- ( a )  $T(q)$  doğrudur, ve
- ( b )  $k \geq q$  için  $T(q)$ 'nin doğruluğu  $T(k+1)$ 'in doğruluğu anlamına gelir.

Bu durumda induksiyonun ikinci adımında öncekine göre daha fazla bilgi gerekir. Buna induksiyonun kuvvetli prensibi denir. Bu şekle **tam induksiyon** denir.

Örnek: birden büyük olan herhangi bir doğal sayının asal sayıların çarpımı şeklinde gösterilebileceğini ispatlayın.

$S(n)$ ,  $n$ , birden büyük doğal sayı ise  $n$ 'in asal sayıların çarpımı olduğunu induksiyon ile tüm  $n$ 'ler için gösterelim.

a) Temel adım.  $S(2)$  için doğru. 2 asal sayıların çarpımı şeklinde gösterilebilir

b) İndüksiyon adımı:  $S(2), S(3), \dots, S(k)$  nin doğruluğu  $S(k+1)$ 'in doğruluğunu kanıtlar. Şimdi eğer  $k+1$  asal sayı ise doğrudur, eğer  $k+1$  asal sayı değil ise  $m, n < k$  olmak üzere  $k+1 = m \cdot n$  şeklinde gösterilebilir. İndüksiyon adımı ile  $m$  ve  $n$  'nin her ikisinde asal sayıların çarpımı olarak gösterilebilir.. Böylece  $k+1$  asal sayıların çarpımı olarak gösterilebilir.

### 1.8.2 Tümevarımsal Tanımlar (Kümelerin ve fonksiyonların, yinelemeli(rekürsif) tanımları)

Tümevarımsal prensibin kullanımı sadece pozitif tamsayılar hakkındaki önermelerin ispatı ile sınırlandırılmamıştır; matematiksel nesnelerin ve özelliklerin tanımı için de kullanılırlar. Bazı durumlarda nesnelerin açık olarak tanımlanması zordur. Bu durumlarda nesneler kendileri cinsinden tanımlanırlar. Böyle tanımlamaya yinelemeli(rekürsif) tanımlama denir. Yinelemeli tanım, seri, fonksiyon ve kümelerin tanımında kullanılabilir. Örnek olarak,  $a_n = 2^n$  ( $n=0,1,2, \dots$ ) olarak verilen 2'nin kuvvetleri dizisi verilsin. Bu diziyi ilk terimi  $a_0 = 1$  ve sonraki elemanların öncekiler cinsinden tanımı için bir kural vererek  $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$  ( $n=0,1,2, \dots$ ) şeklinde tanımlanır.

Kümelerin tümevarımla tanımlanması bazı problemlerin çözümünü kolaylaştırır. Bu tanıma induktif veya yinelemeli(recursive) tanımlama denir. Bir kümenin yinelemeli tanımı üç adımdan oluşur.

1. Temel adım. Tanımlanacak kümenin belirli elemanı kümeye ait olduğu ifade edilir.
2. İndüktif(yinelemeli) adım. Bu adımda kümenin içindeki mevcut elemanları kullanarak

kümenin daha fazla eleman bulundurabileceğini söyler.

3. Kapalı parça. Kümenin içinde 1 ve 2 adımda tanımlanan elemanlar olduğunu söyler.

Örnek: 5 ile bölünebilen tamsayılarda oluşan A kümesinin tanımı aşağıdaki adımlardan oluşur.

- i. 5 sayısı A'nın bir elemanıdır.
- ii. Eğer  $n \in A$ , A'nın elemanı ise,  $n+5$ 'de A'nın elemanıdır.
- iii. A'daki bir nesne ancak ve ancak (a) ve (b) adımlarının tekrarlanmasıyla elde edilebilir.

**Fonksiyonların yinelemeli tanımı:** Eğer bir fonksiyon  $f(n)$  ondan önce gelen elemanlar  $f(i)$  ler cinsinden tanımlanıyorsa buna yinelemeli (rekürsif) tanım denir.  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(k)$ 'ya da başlangıç değerleri denir. Bir başka ifade ile;

- a) Fonksiyonun sıfırdaki değerini ata.
- b) Fonksiyonun değerini bir tamsayı olarak hesaplayan ve kendisinden küçük sayılar cinsinden ifade eden bir kural tanımla.

Örnek :  $F(n) = n!$  Faktöriyel fonksiyonunu yinelemeli olarak tanımlayalım.

- a) fonksiyonun sıfırdaki değeri  $F(0) = 1$
- b)  $F(n+1)$  'i  $F(n)$  cinsinden hesaplayan kural,  $(n+1)!$  'in  $n!$ 'den hesaplanabilmesi  $(n+1)$  ile çarpılarak olacaktır. Bu durumda kural:

$F(n+1) = (n+1) \cdot F(n)$  şeklinde olacaktır.

**Aşağıdaki Fibonacci sayıları dizisini ele alırsak:**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Dizideki her bir sayı kendinden önceki iki sayının toplamıdır.  $f_n$  n. Fibonacci sayısını temsil ediyorsa, diziyi şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ ve } n \geq 3 \text{ için, } f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Fark edileceği gibi tümevarımsal tanım induksiyon prensiplerine uymaz. Tümevarımsal tanıma başlamak için, ilk iki Fibonacci sayısını tanımlamamız gerekir, sadece ilkinin değil. Aşağıda pozitif n tamsayısına dayanan  $A_n$  matematiksel nesne ve özelliğine ait tümevarımsal tanımın genel formu gösterilmiştir.

Tüm pozitif tamsayılar için  $A_n$  'i tanımlamak için:

- (a)  $k=1, 2, \dots, r$  için ayrı ayrı  $A_k$ 'yi tanımla
- (b)  $k > r$  için  $A_k$ 'yi  $A_1, \dots, A_{k-1}$  biçiminde tanımla

Bazı nesnelere veya tümevarımsal olarak tanımlanmış bazı özellikleri içeren önermeleri ispatlamak için matematiksel induksiyonu kullanmak doğaldır.

## 1.9 Alıştırmalar

1- Aşağıdaki mantıksal eşdeğerlilikleri sağlayınız.

(i)  $(p \leftrightarrow q) \equiv (\overline{p \wedge q}) \wedge (\overline{q \wedge p})$

(ii)  $(p \vee q) \equiv (\overline{\overline{p \wedge q}}) \wedge (\overline{\overline{q \wedge p}})$

2- Aşağıdaki argümanların doğruluğunu test ediniz.

- (i) Okulu bırakırsam bankada işe başlayacağım. Okulu bırakmıyorum o halde bankada işe başlamayacağım.
- (ii) James polis veya futbolcudur. Eğer polisse tabancası vardır. James'in tabancası yoktur o halde James futbolcudur.

3-  $n > 0$  olmak üzere  $n^3 + 2n$  'in 3 ile bölünebildiğini tümevarım ile ispatlayınız.

4- Herhangi üç ardışık tamsayının çarpımının 6 ile bölünebildiğini ispatlayınız.

5- İlk  $n$  pozitif tamsayının karelerinin toplamının  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  olduğunu ispatlayınız.

## 2 Küme Teorisi

### 2.1 Kümeler ve Üyeler

Küme notasyonu matematikteki temel konseptlerden biridir. Bir kümenin kusursuz bir tanımı burada verilmeyecektir zira küme teorisine göre küme çoğunlukla tanımsızdır. Ancak bu terimle ne demek istediğimizi açıklayabiliriz: hangi tip olursa olsun objeler topluluğu küme olarak düşünülür. Objeler her şey olabilir ve bunlara kümenin elemanları denir. Bir kümedeki elemanların ortak özelliği olmasına gerek yoktur (aslında en bariz ortak noktaları aynı küme içinde bulunmalarıdır). Benzer şekilde eleman sayısında da belli bir kısıtlama yoktur; sonsuz sayıda, sonlu sayıda veya hiç eleman olmayabilir. Diğer yandan tek bir sınırlama vardır: verilen bir küme ve obje ile objenin kümenin elemanı olup olmadığına karar verebilmemiz gerekir.

#### Örnek 2.1:

1. Bir küme Picasso'yu, Eyfel Kulesini ve  $\pi$  sayısını içerecek şekilde tanımlanmış olabilir. Bu (biraz garip olsa da) sonlu bir kümedir.
2. Tüm pozitif çift tamsayıları içeren küme açıkça sonsuz bir kümedir.
3. Gelmiş geçmiş en iyi 10 şarkıyı içeren kümeyi düşünelim. Eğer en iyinin tanımını vermezsek bu küme geçerli bir küme olmaz. Kime göre en iyi? Bu tanım bir elemanın bir kümenin elemanı olup olmadığına karar verebilmemiz koşuluna uymaz.

#### 2.1.1 Notasyon

Genellikle kümeleri ifade etmek için büyük harfler, elemanları ifade etmek için küçük harfler kullanılır.  $\in$  sembolü '-e ait' veya '-nin elemanıdır' anlamına gelir. Bu nedenle

$\alpha \in A$  'nın anlamı  $\alpha$  elemanı A kümesine aittir ve

$\alpha \notin A$  'nın anlamı  $\sim(\alpha \in A)$  veya  $\alpha$  A'ya ait değildir.

#### 2.1.2 Kümeleri Tanımlamak

Kümeler değişik biçimlerde tanımlanabilir. En basiti elemanları köşeli parantezler  $\{\}$  arasına listelemektir. Örnek 2.1' deki iki kümeyi bir daha yazarsak:

$$A = \{\text{Picasso, Eyfel Kulesi, } \pi\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

İkinci kümede bütün elemanları listelemeyiz. Bu yüzden '...' kullanarak listenin daha böyle devam ettiğini belirtiriz. Diğer küme gösterim örnekleri şunlardır:

Sabit bir pozitif  $n$  tamsayısı için,  $C_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , ilk  $n$  pozitif tamsayının kümesidir. Yine sonlu sayıda olmasına rağmen arada birçok elemanın var olduğunu göstermek için '...' kullandık.

$D=\{\}$ , **boş kümedir** yani hiçbir elemanı yoktur. Bu küme genellikle  $\emptyset$  ile gösterilir.

Bir kümenin elemanlarını listelemek küçük veya belli bir kalıba sahip elemanlı kümeler haricinde pek pratik değildir. Alternatif bir yol küme elemanlarını bir özellik ile tanımlamaktır. Daha açık bir ifadeyle,  $P(x)$  tek değişkenli bir önermesel fonksiyon ise elemanları,  $\alpha$  için  $P(\alpha)$ 'nın doğru bir önerme olduğu tüm  $\alpha$  objeleri olan kümeyi oluşturabiliriz.

Bu şekilde tanımlanan bir küme;  $A=\{x:P(x)\}$  şeklinde ifade edilir. (Bu şu şekilde okunur:  $P(x)$ 'i sağlayan tüm  $x$ 'lerin kümesi)

### 2.1.3 Kümelerin Eşitliği

İki küme sadece ve sadece aynı elemanları içeriyorsa eşit olarak tanımlanır; şöyle ki, eğer  $(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B]$  doğru ise  $A=B$ ' dir yada tersi. Listelenen elemanların sırası önemsizdir.

Şunu da unutmamak gerekir ki; sadece bir boş küme vardır veya tüm boş kümeler eşittir. Çünkü tüm boş kümeler aynı elemanı içerir yani hiçbir elemanı.

Ayrıca, eğer  $P(x)$  ve  $Q(x)$  aynı  $x$  objeleri için doğru olan önermesel fonksiyonlar ise tanımladıkları kümeler eşittir.

$$\{x:P(x)\}=\{x:Q(x)\}.$$

**Tanım:** Eğer  $A$  sonlu bir küme ise kardinalitesi,  $|A|$ , içerdiği (farklı) elemanların sayısıdır.

Eğer  $A$  sonsuz sayıda elemana sahipse, sonsuz kardinalitesi vardır deriz ve şu şekilde ifade ederiz:  $|A|=\infty$ .

$A$ 'nın kardinalitesi için kullanılan diğer notasyonlar  $n(A)$ ,  $\#(A)$  ve  $\overline{A}$ .

#### Örnek 2.2:

4.  $|\emptyset|=0$  çünkü  $\emptyset$ 'nin hiçbir elemanı yoktur.
5.  $|\{\pi, 2, \text{Einstein}\}|=3$ .
6. Eğer  $X=\{0, 1, \dots, n\}$  ise  $|X|=n+1$ .
7.  $|\{2, 4, 6, 8, \dots\}|=\infty$

Kardinalite basit bir konsept gibi görünse de verilen bir kümenin kardinalitesini hesaplamak bazen pratikte zor olabilir. Bu durum genellikle verilen kümenin elemanlarından bazıları kendileri birer küme olduğunda gerçekleşir. Küme elemanlarının kendi başlarına bir küme olması geçerli bir yapıdır.

Örneğin,  $X=\{\{1, 2\}\}$  olsun. Bu durumda  $X$  sadece tek bir eleman içerir yani  $\{1, 2\}$  kümesini ve  $|X|=1$ ' dir. Kardinalitesi 2 olan  $\{1, 2\}$  kümesi ile tek elemanı  $\{1, 2\}$  kümesi olan  $X$  kümesini ayırt etmek son derece önemlidir. Benzer şekilde  $\emptyset$  ve  $\{\emptyset\}$  kümeleri de farklıdır zira  $|\{\emptyset\}|=1$ ' dir.

**Örnek 2.3:**

$$|\{1, 2, \{1, 2\}\}|=3,$$
$$|\{\emptyset, \{1, 2\}\}|=2,$$
$$|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|=2,$$

$$|\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1,2\}\}|=3,$$

$$|\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|=2.$$

## 2.2 Alt Kümeler

**Tanım:** A' nın tüm elemanları aynı zamanda B' nin de elemanları ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve  $A \subseteq B$  şeklinde gösterilir. Sembolik olarak,  $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$  ise  $A \subseteq B$  dir.

Eğer A B' nin alt kümesi ise B, A 'nın süper kümesidir (superset) veya kapsar deriz ve  $B \supseteq A$  yazarız.  $A \subset B$  notasyonu 'A, B 'nin tam alt kümesidir' ifadesi için kullanılır. Bu nedenle sadece ve sadece  $A \subseteq B$  ve  $A \neq B$  ise  $A \subset B$  dir. Ayrıca tüm A kümeleri için  $\emptyset \subseteq A$  ' dir.

İki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak için her birinin diğerinin alt kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Esasen bu, aşağıdaki bileşik önemelerin mantıksal eşdeğerliliğinden kaynaklanır.

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv (p \leftrightarrow q).$$

Alt kümenin tanımı ile  $A \subseteq B$  ' nin anlamı  $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$  doğrudur ve  $B \subseteq A$  'nin anlamı  $(\forall x)[x \in B \rightarrow x \in A]$  doğrudur, bu durumda  $A \subseteq B$  ve  $B \subseteq A$  sadece ve sadece  $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge (\forall x)[x \in B \rightarrow x \in A]$  ise doğrudur.  $(\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B]$  ' nin ve  $(\forall x)[x \in B \rightarrow x \in A]$  ' nin doğruluğu  $(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B]$  'nin doğruluğunu garantiler ve tam tersi. Bu sebeple,  $A=B$  olduğu zaman  $A \subseteq B$  ve  $B \subseteq A$  ifadelerinin ikisi de doğrudur. Özet olarak:

**Teorem 2.1:** İki küme; A ve B sadece ve sadece  $A \subseteq B$  ve  $B \subseteq A$  ise eşittir.

**Örnek 2.4:**  $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$  ve B  $\{1,2\}$  ' nin boş olmayan tüm alt kümeleri olsun.  $A=B$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $A \subseteq B$  'dir çünkü A' nın 3 elemanının her biri  $\{1,2\}$  'nin boş olmayan alt kümesidir ve bu nedenle B' nin bir elemanıdır.

$B \subseteq A$  'dır çünkü  $\{1,2\}$  ' nin boş olmayan tüm alt kümeleri A' da yer alır. Yukarıdaki teoremi kullanarak  $A=B$  sonucuna varabiliriz.

Küme konsepti çok geniş olduğundan çoğunlukla belirli konteks için gerekli olan kümelere önem verilir. Mevcut görevi veya çalışmayı ilgilendiren kümeleri içine alan evrensel bir küme tanımlamak uygundur. Evrensel kümenin dışında kalan her şey göz ardı edilir. Evrensel küme her zaman için sabit olan bir şey değildir- kontekse göre değişir.

Evrensel küme olarak kullanılan bazı özel sayı kümeleri aşağıdadır.

$N = \{0,1,2,3,\dots\}$  doğal sayılar kümesi.

$Z = \{\dots, -2,-1,0,1,2,\dots\}$  tam sayılar kümesi.

$Q = \{p/q:p,q \in Z \text{ ve } q \neq 0\}$  rasyonel sayılar kümesi.

$\mathcal{R}$  = reel sayılar kümesi; reel sayılar sayı doğrusu üzerindeki noktalar veya ondalık şeklinde yazılan sayılar şeklinde düşünülebilir.



$C = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1\}$  kompleks sayılar kümesi.

Açıkça görüldüğü gibi bu kümeler arasında şu alt küme ilişkileri vardır:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Ayrıca  $\mathbb{Z}^+$ ,  $\mathbb{Q}^+$  ve  $\mathbb{R}^+$  sırasıyla pozitif tamsayıları, rasyonel sayıları ve reel sayıları ifade etmek için kullanılır. Dikkat edilirse  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}^+$  'ya eşit değildir zira 0 ilkinde dahil olmasına rağmen ikincisine değildir. Ek olarak, bazen çift ve tek sayıları ifade etmek için E ve O'yu kullanırız:

$$E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$O = \{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}.$$

Eğer evrensel bir küme  $\{x : P(x)\}$  notasyonu ile tanımlanmış ise bunun anlamı  $P(x)$ 'i sağlayan evrensel kümedeki tüm  $x$ 'lerin kümesidir. Bu nedenle eğer mevcut evrensel kümemiz  $Z$  ise  $X = \{x : 2x^2 + 3x - 2 = 0\}$ ,  $\{-2\}$  kümesidir fakat  $U$ ,  $Q$  veya  $R$  ise  $X = \{-2, 1/2\}$ . İlk durumda sınırlandırmayı daha belirgin yapabiliriz ve şekilde yazabiliriz:

$$X = \{x : x \in Z \text{ ve } 2x^2 + 3x - 2 = 0\} \text{ veya } X = \{x \in Z : 2x^2 + 3x - 2 = 0\}.$$

## 2.3 Kümeler Üzerinde İşlemler

Venn şeması kümelerin yararlı bir görsel gösterimidir. Böyle bir şemada kümeler, düzlemdeki bölgeler olarak temsil edilir ve verilen kümeye ait elemanlar kendisini temsil eden bölgenin içine yerleştirilir. Bazen tüm kümeler evrensel kümeyi temsil eden bir kutuya yerleştirilir. Eğer bir eleman iki kümenin birden elemanı ise iki küme iç içe çizilir ve bu elemanlar iç içe geçmiş kısma konur.

Verilen A ve B kümeleri ile aşağıdaki gibi yeni iki küme tanımlayabiliriz.

A ve B'nin **kesişimi**, A ve B'nin her ikisine birden ait olan tüm elemanların kümesidir ve  $A \cap B$  şeklinde gösterilir.

A ve B'nin **birleşimi**, A' ya, B' ye veya her ikisine ait olan tüm elemanların kümesidir ve  $A \cup B$  şeklinde gösterilir.

Sembolik olarak;

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

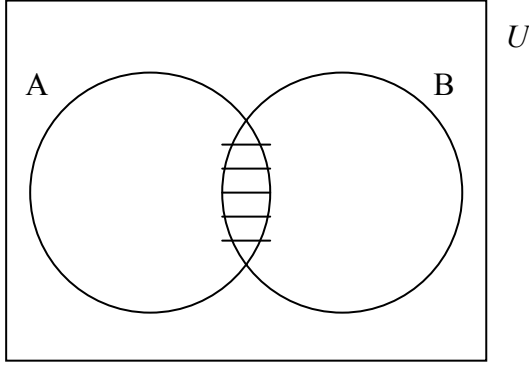
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B \text{ veya her ikisi birden}\}.$$

Kümelerin kesişimi ile önermelerin kesişimi arasında açık bir bağlantı vardır tıpkı kümelerin birleşimi ve önermelerin dahili birleşimi arasında olduğu gibi. Eğer A ve B, sırasıyla  $P(x)$  ve  $Q(x)$  önermesel fonksiyonları ile tanımlanmışlar ise;

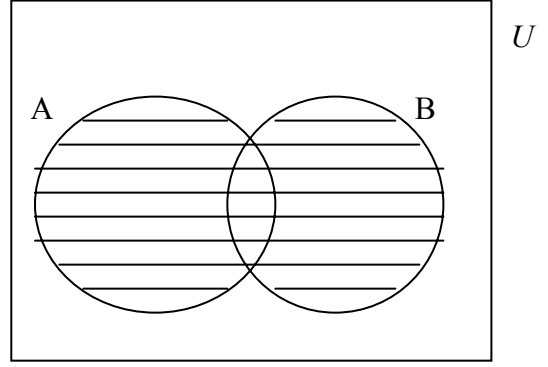
$$A \cap B = \{x : P(x) \wedge Q(x)\} \text{ ve}$$

$$A \cup B = \{x : P(x) \vee Q(x)\}.$$

Bu kümeler en iyi aşağıdaki Venn şemaları ile gösterilebilir. Taralı bölgeler kesişim ve birleşimi gösterir.



Şekil 2.1:  $A \cap B$



Şekil 2.2:  $A \cup B$

Kesişim ve birleşimin tanımlarını ikiden fazla kümeye genişletebiliriz.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  küme olsun.

Bunların kesişimi:

$$\begin{aligned} \bigcap_{r=1}^n A_r &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \\ &= \{x: x \in A_1 \text{ ve } x \in A_2 \text{ ve } \dots \text{ ve } x \in A_n\} \\ &= \{x: x, r=1,2,\dots,n \text{ olmak üzere her bir } A_r \text{ kümesine aittir.}\} \end{aligned}$$

Birleşimi ise;

$$\begin{aligned} \bigcup_{r=1}^n A_r &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x: x \in A_1 \text{ veya } x \in A_2 \text{ veya } \dots \text{ veya } x \in A_n\} \\ &= \{x: x, r=1,2,\dots,n \text{ olmak üzere en az bir } A_r \text{ kümesine aittir.}\} \end{aligned}$$

A ve B kümeleri ortak elemana sahip değilse **ayrıktır** denir yani  $A \cap B = \emptyset$ . Venn şemasında bu iç içe geçmemiş kümeler şeklinde gösterilir.

Verilen bir A kümesinin **tümleyeni**, A 'ya ait olmayan fakat U'da yer alan tüm elemanlardır. A'nın tümleyeni  $\bar{A}$  (veya A') şeklinde gösterilir. Tümleyen ile tersini alma arasında açık bir ilişki vardır; eğer  $A = \{x: P(x)\}$  ise  $\bar{A} = \{x: \sim P(x)\}$ ' tir.

Bir kümenin tümleyeni ile bağlantılı olarak A ve B kümelerinin **farkı** A-B veya  $A \setminus B$  şeklinde gösterilir ve bu küme A'nın B'de yer almayan tüm elemanlarını içerir:

$$A - B = \{x: x \in A \text{ ve } x \notin B\}.$$

A'nın tümleyeni  $A' = U - A$ 'dır.

**Örnek 2.5:**  $U = \{1,2,3,\dots,10\} = \{n: n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } n \leq 10\}$ ,  $A = \{n \in U : 1 \leq n < 7\}$ ,  $B = \{n \in U: n \text{ 3'ün katları}\}$  olsun. O halde;  $A = \{1,2,3,4,5,6\}$  ve  $B = \{3,6,9\}$ . Bu nedenle:

$$A \cap B = \{3,6\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,9\}$$

$$A - B = \{1,2,4,5\}$$

$$B - A = \{9\}$$

$$\overline{A} = \{7,8,9,10\}$$

$$\overline{B} = \{1,2,4,5,7,8,10\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{7,8,10\} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1,2,4,5,7,8,9,10\} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

## 2.4 Sayma Teknikleri

Bazı kompleks matematiksel sonuçlar sayma argümanlarının ispatlarına bağlıdır: çeşitli kümelerin eleman sayılarını saymak, belli bir sonucun kaç değişik yolla elde edilebileceğini saymak gibi. Sayma kısmen kolay bir olay gibi görünse de, pratikte çok kompleks olabilir. Matematikçiler sayma problemleri için birçok teknik ve sonuç üretmişlerdir ve konuya sayma teorisi adını vermişlerdir.

Saymanın en basit sonuçlarından biri şudur: iki ayrık A ve B kümesinin toplam eleman sayısını bulmak için A'nın elemanlarını, B'nin elemanlarını sayıp toplarız.

**Sayma Prensibi 1:** Eğer A ve B ayrık iki küme ise  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

Çoğu uygulama doğal olarak ikiden fazla küme içerir. Yukarıdaki prensip aşağıdaki şekilde genelleştirilir.

**Sayma Prensibi 2:** Eğer  $A_1, A_2, \dots, A_n$  küme ise ve bu kümelerin hiçbir çifti ortak bir elemana sahip değilse  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$ .

Bazen, elemanları sayılacak kümeler yukarıdaki sayma prensiplerinin katı kuralını-herhangi bir çiftin ayrık olması- sağlamayabilir. Öte yandan, bu durumda kümeyi sayma prensiplerinin koşullarını sağlayacak alt kümeler bölmek mümkündür. Bu şekilde ispatlanabilecek en basit sonuç şudur:

**Teorem 2.2(Ekleme(inclusion)-Çıkarma(exclusion) Prensibi):** Eğer A ve B sonlu kümeler ise  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

**İspat:**  $A \cup B$ 'yi sayma prensibi 2'yi sağlayan alt kümelerine böleriz: A-B,  $A \cap B$  ve B-A.

Sayma prensibi 2' den,

$$|A \cup B| = |A-B| + |A \cap B| + |B-A|. \quad (1)$$

A ve B kümelerinin kendileri sırasıyla A-B,  $A \cap B$  ve B-A,  $A \cap B$  şeklinde ayrık alt kümelere bölünebilir. Böylece;

$$|A| = |A-B| + |A \cap B| \quad (2)$$

$$|B| = |B-A| + |A \cap B|. \quad (3)$$

Bu durumda (1), (2) ve (3) eşitliklerini birleştirerek istenilen sonucu elde etmek çok

kolay bir işlemdir. Ekleme-çıkarma prensibi bu şekilde adlandırılır çünkü  $A \cup B$ 'nin elemanlarını saymak için  $A$ 'nın elemanlarını ve  $B$ 'nin elemanlarını ekledik ve böylece  $A \cap B$ 'nin elemanlarını iki kere eklemiş olduk.  $A \cup B$ 'nin doğru eleman sayısını elde etmek için  $A \cap B$ 'yi bir kere çıkarmak gerekir.

İki kümeden fazla durumlar için benzer sayma teknikleri vardır. Üç küme için sonuç aşağıdaki teoremdaki gibi bulunur.

**Teorem 2.3:**  $A, B$  ve  $C$  sonlu kümeler ise

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

## 2.5 Kümeler Cebri

Açıktır ki, kesişim, birleşim ve tümleyen işlemleri birbiriyle ilişkilidir. Örneğin;

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Aşağıdaki kurallar tüm  $A, B$  ve  $C$  kümeleri için geçerlidir.

### Aynılık (Tek Kuvvet) Özelliği

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A. \end{aligned}$$

### Değişme Özelliği

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

### Birleşme Özelliği

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

### Yutan Eleman

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A. \end{aligned}$$

### Dağılma Özelliği

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

### Çift ters Özelliği ((Double negation))

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

### De Morgan Kuralları

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{(A \cap B)} &= \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

## Özdeşlik Özelliği

$$\begin{aligned}A \cup \emptyset &= A \\A \cap U &= A \\A \cup U &= U \\A \cap \emptyset &= \emptyset.\end{aligned}$$

## Tamlama Özelliği

$$\begin{aligned}A \cup \overline{A} &= U \\A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= U \\ \overline{U} &= \emptyset.\end{aligned}$$

Bu kurallar uygun önermeler arasındaki mantıksal eşitliklerden de türetilbilmesine rağmen en iyi Venn şemaları ile gösterilir.

### 2.5.1 Eşlik Kuralı (Duality Principle)

$\wedge, \vee$  ve tersini alma bağlayıcılarını içeren bileşik önermelerin eşli önermeye sahip olduğu gibi  $\cap, \cup$  ve tümlenme içeren kümeler hakkındaki ifadeler de eşlidir. Böyle bir ifadenin eşi orijinal ifadedeki tüm  $\cap$ 'lerin  $\cup$  ile; tüm  $\emptyset$ 'lerin  $U$  ile değiştirilmesi ile elde edilir. Örneğin;

$$(A \cap \emptyset) \cup (B \cap U) \cup \overline{B} = U \text{ 'in eşi } (A \cup U) \cap (B \cup \emptyset) \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Kümeler cebirinin her bir kuralının eşi de ayrıca bir kuraldır. Bunun sonucu olarak kümeler için aşağıdaki eşlik kuralı ortaya çıkmıştır.

**Kümeler için eşlik kuralı:** Eğer kümeler ile ilgili bir ifade tüm kümeler için doğruysa bunun eş ifadesinin de tüm kümeler için doğru olması gerekir.

## 2.6 Kümelerin Aileleri

Kümelerin ailesi veya kümelerin toplanması terimiyle, kümelerin kümesi kastedilmekte ise de her iki terimde sıklıkla kullanılmaktadır.

$I = \{1, 2, \dots, n\}$  verilsin ve  $\forall i \in I$  için,  $A_i$  kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\{A_i : i \in I\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

$I$  kümesine gösterge kümesi denir ve  $A_i$ 'leri birleşme için göstergeler. Eğer,  $I = \{1, 2, n\} = Z^+$  ise,  $\{A_i : i \in I\} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  dir.

Bu notasyonu kullanarak, kümelerin keyfi bir ailesine kesişim ve birleşimi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$F = \{A_i : i \in I\}$  kümelerin bir ailesi olarak verilsin burada,  $I$  herhangi bir gösterge kümesidir.

F ailesinin Kesişim ve birleşimi :  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ bütün } i \in I \text{ için}\}$ ;  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ bazı } i \in I \text{ için}\}$

Örnek:  $I = \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,\dots\}$  ve her bir  $i \in \mathbb{Z}^+$  için  $A_i = \{i\}$ . Böylece,  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{2\}$ , .....

Bu nedenle:  $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = \emptyset$ ; ve  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i = \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{Z}^+$  dir.

### 2.6.1 Kuvvet Kümesi

Verilen bir A kümesinin bütün alt kümelerinin kümesine A'nın kuvvet kümesi denir ve  $P(A)$  ile gösterilir.  $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$  dir

Örnek1 :  $A = \{a,b\}$  ise  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$  dir.

Örnek2 : A herhangi bir küme olsun ve kümelerin sırası  $A, P(A), P(P(A)), P(P(P(A))), \dots$  dir.

$P^*(A)$  bu ailede A'nın tüm elemanlarının kümesinin ailesini temsil eder.

$P^*(A) = \{x : x \in A \text{ veya } x \subseteq y \text{ burada } , y \in P^*(A)\}$  dir ve  $P^*(A)$  sonsuz bir kümedir.

### 2.6.2 Bir Kümenin Bölmelenmesi

A bir küme olsun. A'nın bölmelenmesi, A'nın boş olmayan alt kümeleri  $\{S_i : i \in I\}$  dir öyleki;

i)  $\bigcup_{i \in I} S_i = A$ , ve

ii)  $S_i \cap S_j = \emptyset$  eğer, bütün  $i, j \in I$  için  $i \neq j$  ise) dir

Örnek 1:  $a = \{1,2,3,4,5,6\}$  ise A'nın bölmelenmesi  $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}\}$  dir.

Örnek 2: her bir  $\alpha$  gerçel sayısı için  $L_\alpha$ ,  $(\alpha, 0)$  noktasından geçen düşey çizgi üzerindeki noktaların kümesi olsun:

$L_\alpha = \{x = \alpha \text{ ve } y \text{ gerçel bir sayıdır}\} = \{(\alpha, y) : y \in \mathbf{R}\}$  dir

$\{L_\alpha : \alpha \in \mathbf{R}\}$  kümelerinin ailesi düzlemi bölmeler :  $L_\alpha$  çizgileri üzerindeki her bir nokta ve herhangi iki çizgi birbirinden ayrıdır.

## 2.7 Kartezyen Çarpım

Bir kümenin elemanlarının hangi sıra ile listelendiği önemsizdir. Öte yandan bazı durumlarda sıra çok önemlidir. Örneğin, koordinat geometride  $(1,2)$  noktası ile  $(2,1)$  noktası farklıdır.

Sıranın önemli olduğu durumlarla başa çıkmak için x ve y objelerinin **sıralı ikili**  $(x,y)$ 'yi tanımlarız.

$(x,y) = (x',y')$  sadece ve sadece  $x=x'$  ve  $y=y'$  ise.

Bu tanımla birlikte açıktır ki  $(x,y)$  ile  $(y,x)$  farklıdır ( $x=y$  değilse) ve sıra önemlidir.

Şu an ileriki bölümlerde temel teşkil edecek iki kümenin kartezyen çarpımı kavramını tanımlayabilecek durumdayız.

**Tanım:** X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı  $X \times Y$ ,  $x \in X$  ve  $y \in Y$  ye ait olmak üzere tüm  $(x,y)$  sıralı ikililerinin kümesidir.

$$X \times Y = \{(x,y): x \in X \text{ ve } y \in Y\}.$$

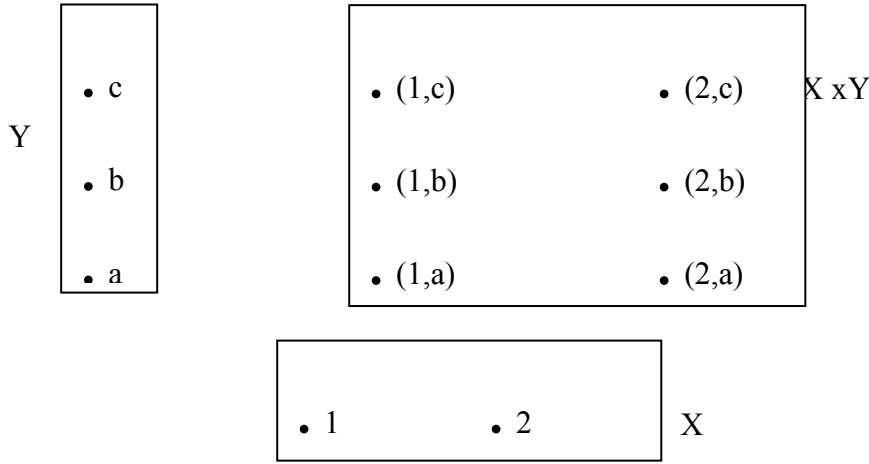
$X=Y$  olması durumunda  $X \times X$ ,  $X^2$  ile gösterilir ve ‘X iki’ şeklinde okunur, ‘X kare’ şeklinde değil.

Eğer X veya Y (veya her ikisi de) boş küme ise  $X \times Y$  de boş kümedir. X ve Y’ nin her ikisi de boş olmayan kümeler ise sadece ve sadece  $X=Y$  ise  $X \times Y = Y \times X$  ‘dir.

**Örnek 2.6:** Eğer  $X=\{1,2\}$  ve  $Y=\{a,b,c\}$  ise

$$X \times Y = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}.$$

X, Y ve  $X \times Y$ ’ nin elemanları basit bir Venn şeması ile sistematik olarak gösterilebilir. Bu Venn şeması Şekil 2.3’ teki gibidir.



**Şekil 2.3**

Şekil 2.3 gibi diyagramlar ve  $R^2 = R \times R$  düzleminin koordinat geometri resimleri Kartezyen çarpımının yararlı gösterimleridir. Farklı bir gösterimde ise X ve Y kümeleri Venn diyagramlarındaki gibi iki boyutlu bölgeler yerine tek boyutlu bölgeler olarak çizilir. X ve Y doğru segmentleri olarak çizilir ve elemanları bu doğru segmentinin üzerine yerleştirilir. Uygun olan X’i temsil eden doğrunun yatay olarak çizilmesi ve doğruların birbirine dik olmasıdır. Kartezyen çarpım X ‘in üzerinde, Y’ nin sağında bulunan dikdörtgensel bölgedir ve  $(x,y)$  sıralı ikilileri bu dikdörtgenin içine noktalar dikey olarak x’ in üzerine, yatay olarak y’ nin sağına gelecek şekilde yerleştirilir.

$(x,y)$  sıralı ikilisi aşağıdaki özellik yardımıyla sıralı n-elemanlı (ordered n-tuple) şekle genelleştirilebilir.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1', x_2', \dots, x_n') \quad \text{sadece ve sadece } x_1 = x_1', x_2 = x_2', \dots, x_n = x_n' \text{ ise.}$$

n tane kümenin kartezyen çarpımı iki kümedeki durumun doğal genelleştirilmesidir.

**Tanım:**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  kümelerinin kartezyen çarpımı  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  ‘dir.

$$\begin{aligned} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2 \text{ ve } \dots \text{ ve } x_n \in X_n\} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in X_i \quad i=1, 2, \dots, n \text{ olmak üzere} \}. \end{aligned}$$

**Örnek 2.7:**  $A=\{1,2\}$ ,  $B=\{a,b\}$  ve  $C=\{\alpha, \beta\}$  ise

$A \times B \times C = \{(1,a, \alpha), (1,a, \beta), (1,b, \alpha), (1,b, \beta), (2,a, \alpha), (2,a, \beta), (2,b, \alpha), (2,b, \beta)\}$ .

Üç kümeden oluşan Kartezyen çarpımları göstermek kolay değildir fakat üç boyutlu bölgeler ile gösterilebilecekleri açıktır.

X ve Y sonlu kümeler olmak üzere  $|X|=n$  ve  $|Y|=m$  ise açıktır ki Kartezyen çarpım  $X \times Y$   $mn$  elemana sahiptir. Öyle ki;

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

Bu sonuç aşağıdaki gibi n tane küme için genelleştirilebilir.

**Teorem 2.4:**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sonlu kümeler ise  $|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n|$ .

Kartezyen çarpım işleminin kesişim ve birleşim gibi diğer küme teoremi işlemleri ile nasıl davranacağına geçmeden önce aşağıdaki örneğe bakalım.

**Örnek 2.8:**  $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $X=\{x,y,z\}$ ,  $Y=\{y,z,t\}$  olsun. Bu durumda

$X \cap Y = \{y,z\}$  olur ve

$A \times (X \cap Y) = \{(a,y),(a,z),(b,y),(b,z), (c,y),(c,z), (d,y),(d,z)\}$  'dır. Şimdi,

$A \times X = \{(a,x),(a,y),(a,z), (b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z), (d,x),(d,y),(d,z)\}$  ve

$A \times Y = \{(a,y),(a,z),(a,t), (b,y),(b,z),(b,t),(c,y),(c,z),(c,t), (d,y),(d,z),(d,t)\}$  olur. Bu nedenle,

$(A \times X) \cap (A \times Y) = \{(a,y),(a,z), (b,y),(b,z), (c,y),(c,z), (d,y),(d,z)\}$  olur.

O halde bu örnekteki kümeler için;

$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$  olduğuna göre bu özelliğin diğer A, X ve Y kümeleri için de doğru olup olmadığına bakabiliriz.

Aslında yukarıdaki örnekte elde ettiğimiz sonuçlar tüm A, X ve Y kümeleri için geçerlidir. Aşağıdaki teoremden Kartezyen çarpımın kesişim ve birleşim işlemlerinde nasıl davrandığını belirten özellikler listelenmiştir.

**Teorem 2.5 (i)** Tüm A, X ve Y kümeleri için

$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$  ve

$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A)$ . (Bunun anlamı Kartezyen çarpım kesişim üzerine dağılıbilir.)

**(ii)** Tüm A, X ve Y kümeleri için

$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$  ve

$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A)$ . (Bunun anlamı Kartezyen çarpım birleşim üzerine dağılıbilir.)

**İspat:** (i). kısmın ispatı şu şekildedir.

$(a,x) \in A \times (X \cap Y)$  olsun. Kartezyen çarpımın tanımından bunun anlamı  $a \in A$  ve  $x \in (X \cap Y)$  'dır. Bu sonuçla,  $x \in X$  'tir, öyleyse  $(a,x) \in A \times X$  'e aittir;  $x \in Y$  'tir, öyleyse  $(a,x) \in A \times Y$  'e aittir. Bu nedenle,  $(a,x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$  'dir ki bu da  $A \times (X \cap Y) \subseteq (A \times X) \cap (A \times Y)$  olduğunu ispatlar.



Alt küme ilişkisini diğer taraftan ispatlamak için;  $(a,x) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$  olsun.

Bu durumda  $(a,x) \in (A \times X)$  'tir öyleyse  $a \in A$  ve  $x \in X$ ; ayrıca  $(a,x) \in (A \times Y)$  'tir öyleyse  $a \in A$  ve  $x \in Y$  ' dir. Bu nedenle  $a \in A$  ve  $x \in (X \cap Y)$  ' dir ve bunun anlamı  $(a,x)$  sıralı ikilisi  $A \times (X \cap Y)$  kartezyen çarpımına aittir. Bundan dolayı  $(A \times X) \cap (A \times Y) \subseteq A \times (X \cap Y)$  olmalıdır.

Şu halde  $A \times (X \cap Y)$  ve  $(A \times X) \cap (A \times Y)$  kümelerinin eşit olduğu sonucu sağlanmış olur zira her iki küme de birbirinin alt kümesidir.

Son olarak Kartezyen çarpımın alt küme ilişkilerinde nasıl davranacağına ilişkin bir teorem yazabiliriz.

**Teorem 2.6: (i)** Tüm  $A, B$  ve  $X$  kümeleri için  $A \subseteq B, (A \times X) \subseteq (B \times X)$  anlamına gelir.

**(ii)** Eğer  $X$  boş olmayan bir küme ise  $(A \times X) \subseteq (B \times X), A \subseteq B$  anlamına gelir.

## 2.8 Alıştırmalar

1-  $A$  ve  $B$  'nin ortak elemanı yoksa ve  $C = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$  ise  $C$  'nin boş küme olduğunu kanıtlayınız.

2-  $\{x: 2x^2 + 5x - 3 = 0\} \subseteq \{x: 2x^2 + 7x + 2 = 3/x\}$  olduğunu ispatlayınız.

3- Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu göstermek için Venn şemalarını çiziniz.

(i)  $\overline{(A - B)} = B \cup \overline{A}$

(ii)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

4-  $[0,1] = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$        $(0,1) = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1\}$

$[0,1) = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 1\}$        $(0,1] = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 1\}$

olsun. Bu durumda aşağıdaki kümeleri geometrik olarak tanımlayınız.

(i)  $[0,1] \times [0,1)$

(ii)  $[0,1) \times (0,1]$

5-  $X \times Y = X \times Z$  ise  $Y = Z$  olmak zorunda mıdır? Açıklayınız.

### 3 Bağıntılar ve Fonksiyonlar

Bağıntı notasyonu kümeler gibi çok genel bir notasyondur. Bu konu matematiğin anahtar konularından biridir ve başka birçok konuda da kullanılır. Üç özel tip bağıntı çok önemlidir: fonksiyonlar, eşitlik bağıntıları ve sıra bağıntıları.

#### 3.1 Bağıntılar ve Gösterimleri

İkili yüklemeler yani “...daha ağırdır” şeklindeki cümleleri önermesel fonksiyona çevirmek için iki tane değişkene ihtiyaç vardır. Örneğin, H ‘...daha ağırdır’ anlamına geliyorsa  $H(x,y)$  “x, y’ den daha ağırdır” önermesel fonksiyonunu ifade eder. İki değişkenli önermesel fonksiyonları iki değişkeni arasındaki ilişkiyi tanımlamak gibi düşünebiliriz. a ve b objeleri verilmiş ise,  $H(a,b)$  sadece ve sadece objeleri uygun biçimde ilişkilendirilmiş ise doğrudur.

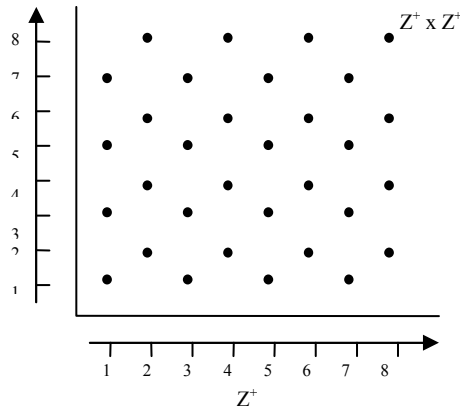
Hatırlanması gereken ilk şey, iki değişkenli önermesel fonksiyon  $F(x,y)$ ’de değişkenlerin sırasının önemli olduğudur. Özel a ve b objeleri için  $F(a,b)$  ile  $F(b,a)$  farklı doğruluk değerine sahip olabilir. Önemli olan bir başka şey de x ve y değişkenlerinin farklı tip objeler olabileceğidir. Örneğin,  $C(x,y)$  önermesel fonksiyonunu düşünelim: x, y’nin başkentidir. Burada x bir şehir ismi fakat y bir ülke ismidir. O halde,  $C(a,b)$ ’yi sağlayan (a,b) sıralı ikililerinin kümesi,  $A=\{\text{şehirler}\}$   $B=\{\text{ülkeler}\}$  olmak üzere  $A \times B$  kartezyen çarpımının alt kümesidir.

Aşağıdaki bağıntı tanımını şaşırtıcı şekilde basit ve geneldir. Bazıları buna ikili bağıntı da der çünkü iki objeyi ilişkilendirir.

**Tanım:** A ve B iki küme olsun. A’dan B’ye bir bağıntı  $A \times B$  kartezyen çarpımının bir alt kümesidir.

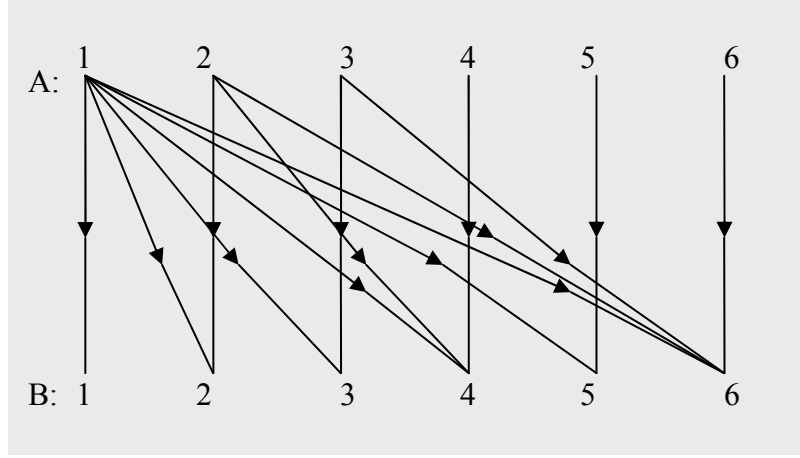
Tanıma bakıldığında ilk göze çarpan bağıntının bir küme olduğudur(sıralı ikililerden oluşan bir küme).  $R$ , A’dan B’ye bir bağıntı ise eğer  $(a,b) \in R$  ise  $a \in A$ ,  $b \in B$  ile ilişkilidir deriz. Bu sebeple,  $R$  bağıntısının kendisi basitçe tüm ilişkili eleman çiftlerinin kümesidir. Genellikle kullanılan notasyon ‘a, b ile ilişkilidir’ için  $a R b$ ’ dir.

Bağıntıları görsel olarak ifade etmenin çeşitli yolları vardır, özellikle sonlu kümeler arasındaki bağıntıları. Şekil 3.1’de  $R$ ’nin elemanları  $A \times B$  kartezyen çarpımının koordinat çizelgesi diyagramı üzerinde işaretlenmiştir. Bu tip diyagramlar  $R$ ’nin  $A \times B$ ’nin alt kümesi olduğunu açıkça gösterir fakat bağıntının diğer özelliklerini göstermede iyi değildir.



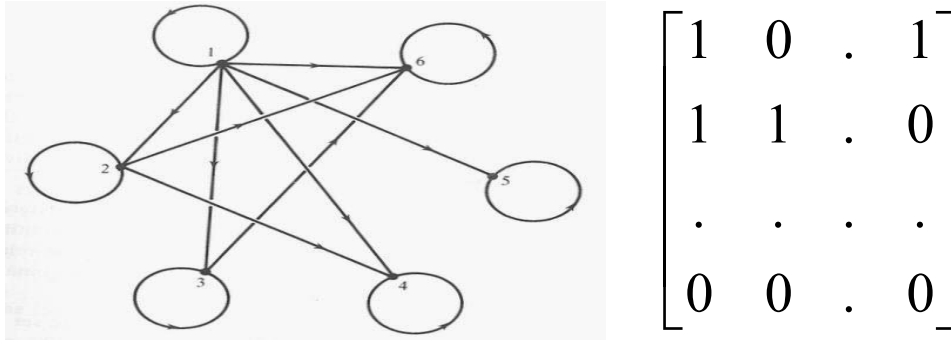
Şekil 3.1

Sonlu kümeler için başka bir alternatif A ve B' nin elemanlarını üst üste yatay şekilde sıralamak ve  $a \mathbf{R} b$  olduğunda  $a \in A$  dan  $b \in B$  'ye bir ok çizmektir. Şekil 4.2' de bu çeşit bir diyagram gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Bağıntının diyagram olarak gösterilimi

Şekil 3.2'deki gösterim büyük kümeler için karmaşık hale gelebilir. Öte yandan bir küme üzerindeki bağıntılarda (yani  $A=B$  olanlarda), şekil daha basitleştirilebilir. A'daki elemanları iki kere listelemek yerine bu elemanları düzlemde birer nokta olarak temsil edebiliriz. Aynı şekilde a'dan b'ye yönlü bir ok sadece ve sadece  $a \mathbf{R} b$  olması durumunda çizilir. Sonuçta ortaya çıkan diyagrama (şekil 3.3) **digraph** denir.



Şekil 3.3: Bağıntının digraf ve matris gösterilimi

Diğer üçüncü bir bağıntı gösterim biçimi de ikili matristir.  $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ve  $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  sonlu kümeler ve  $R$ , A'dan B'ye bağıntı olsun. R'nin ikili matrisi n satırlı ve m sütunlu 0 ve 1'lerden oluşan dizi şeklindedir.

### 3.2 Bağıntılarının Özellikleri

Bağıntıların önemi, ek özellikleri sağlayan özel bir takım bağıntılar yüzündendir. Bu özel bağıntıların ikisi eşlik bağıntıları ve sıra bağıntılarıdır ki bunların ikisi de kümeler üzerindeki bağıntılardır.

**Tanım:**  $R$ , A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. O halde  $R$ ;

- (i) Tüm  $a \in A$  için, sadece ve sadece  $a \mathbf{R} a$  ise **yansıyandır**. (reflexive).

- (ii) Tüm  $a, b \in A$  için, sadece ve sadece  $a R b$ ,  $b R a$  anlamına geliyorsa **simetriktir**.
- (iii) Tüm  $a, b \in A$  için sadece ve sadece  $a R b$  ve  $b R a$ ,  $a=b$  anlamına geliyorsa **ters simetriktir**.
- (iv) Tüm  $a, b, c \in A$  için sadece ve sadece  $a R b$  ve  $b R c$ ,  $a R c$  anlamına geliyorsa **geçişlidir**(transitive).

**Örnek 3.1:**  $A=\{a,b,c,d\}$  ve  $R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(d,d)\}$  olsun.

$R$  bağıntısı yukarıdaki tanımdaki hiçbir özelliği sağlamaz.

$R$  yansıyan değildir çünkü  $c R c$  değildir; bu nedenle tüm  $x \in A$  için  $x R x$  doğru değildir.

$R$  simetrik değildir zira örneğin  $a R c$ 'dir fakat  $c R a$  değildir.

$R$  ters simetrik değildir zira  $a R b$  ve  $b R a$  'dır fakat  $a=b$  değildir.

$R$  geçişli değildir çünkü  $a R b$  ve  $b R d$  'dir fakat  $a R d$  değildir.

Verilen digraphlar veya ikili matrisler ile bağıntı özelliklerinin anlaşılması mümkündür. Eğer bağıntı yansıyan bağıntı ise  $R$ 'nin digraphının her noktasından kendisine bir yönlü ok vardır. İkili matrisinde ise diyagonal elemanların hepsi 1' dir.

Eğer  $R$  simetrik ise digraphtaki okların tamamı iki-yönlüdür. Ters simetrik ise okların hiçbiri iki yönlü değildir. Öte yandan geçişli bağıntıların digraphlarından veya ikili matrislerinden özellik tanımlamak zordur.

### 3.3 Kesişimler ve Bağıntıların Birleşimi

$A$  ve  $B$  arasındaki  $R$  bağıntısı  $A \times B$  kartezyen çarpımının alt kümesi olduğuna göre bağıntıların kesişim ve birleşimini tanımlayabiliriz.

$R$  ve  $S$ ,  $A$  kümesinden  $B$  kümesine iki bağıntı olsun. Hem  $R \cap S$  hem de  $R \cup S$   $A \times B$  'nin alt kümesidir. O halde,  $A$ 'dan  $B$ 'ye iki bağıntının hem kesişimi hem de birleşimi de aynı zamanda  $A$ 'dan  $B$ 'ye bağıntılardır.

$R$  ve  $S$  bağıntılarının farklı küme çiftleri arasında olması durumu ise biraz daha karışıktır.  $R$ 'nin  $A$ 'dan  $B$ 'ye;  $S$ 'nin ise  $C$ 'den  $D$ 'ye bağıntı olduğunu düşünelim.  $R$  ve  $S$  sıralı ikililerden oluşan kümeler olduğundan  $R \cap S$  ve  $R \cup S$  birer bağıntıdır fakat hangi kümelerin  $R \cap S$  ile hangilerinin  $R \cup S$  ile ilişkili olduğu çok açık değildir.

Doğal olarak burada,  $R$  ve  $S$ ,  $A$ 'dan  $B$ 'ye bağıntı olduğuna göre kesişim veya birleşimleri bu bağıntıların özelliklerini miras alır mı sorusu akla gelir. Bağıntıların dört özelliğine  $R$  ve  $S$ 'nin aynı  $A$  kümesi üzerinde bağıntılar olduğunu varsayarak bakalım:

Yansıma özelliğine bakarsak: Hem  $R$  hem de  $S$  yansıyan ise tüm  $a \in A$  için  $(a,a) \in R$  ve  $(a,a) \in S$  olmalıdır. Bu nedenle,  $(a,a)$  tüm  $a \in A$  için  $R \cap S$  ve  $R \cup S$ 'ye aittir, öyleyse  $R$  ve  $S$  'nin kesişimi ve birleşimi de yansıyandır.

İkinci olarak  $R$  ve  $S$ 'nin simetrik olduğunu düşünelim.  $a, b \in A$  öyle ki  $(a,b) \in R \cap S$  olsun. O halde,  $a R b$  ve  $a S b$  'dir.  $R$  ve  $S$  simetrik olduğundan  $b R a$  ve  $b S a$  'dır ve bunun anlamı da  $(b,a) \in R \cap S$  'dir. O halde  $R \cap S$  de simetriktir. Aynı durum  $R \cup S$  için de geçerlidir.

Anti-simetriklik durumu biraz daha karmaşıktır.  $R \cap S$  'nin ters simetrik olduğu yukarıdaki argümanlar ile gösterilebilir fakat birleşim her zaman ters simetrik olmayabilir. Tersine

örnekle bunu gösterebiliriz.  $A=\{a,b\}$  ve  $R=\{(a,b)\}$  ve  $S=\{(b,a)\}$  olsun.  $R$  ve  $S$  bağıntıları ters simetrik olduğu açıktır. Fakat  $R \cup S = \{(a,b), (b,a)\}$  ters simetrik değildir çünkü  $a$   $b$  ile,  $b$  de  $a$  ile ilişkilidir fakat  $a$  ve  $b$  eşit değildir.

Geçişlilik durumu ise ters simetriye benzer. Geçişli iki bağıntının kesişimi de geçişlidir. Ancak birleşimi geçişli olmayabilir. Aşağıdaki teorem bu özellikleri özetlemektedir.

**Teorem 3.1:**  $R$  ve  $S$  aynı  $A$  kümesi üzerinde iki bağıntı olsun.

- Hem  $R$  hem de  $S$  yansıyan ise  $R \cap S$  ve  $R \cup S$  de yansıyandır.
- $R$  ve  $S$  simetrik ise  $R \cap S$  ve  $R \cup S$  de simetriktir.
- $R$  ve  $S$  ters simetrik ise  $R \cap S$  de ters simetriktir fakat  $R \cup S$  ters simetrik olmayabilir.
- $R$  ve  $S$  geçişli ise  $R \cap S$  de geçişlidir fakat  $R \cup S$  geçişli olmayabilir.

### 3.4 Eşdeğerlik Bağıntısı ve Bölmelemeler

Yaşayan insanlar kümesi üzerinde  $x R y$  sadece ve sadece  $x, y$  ülkesinde yaşıyorsa şeklinde tanımlanan bir bağıntıyı düşünelim. Her insanın sadece bir ülkede yaşadığını varsayarsak bağıntı şu üç özelliği sağlar:

$x, x$  ile aynı ülkede yaşamaktadır, o halde yansıyandır.

$x, y$  ile aynı ülkede yaşıyorsa;  $y$  de  $x$  ile aynı ülkede yaşıyor demektir, o halde simetriktir.

$x, y$  ile aynı ülkede;  $z$  de  $y$  ile aynı ülkede yaşıyorsa  $x, z$  ile aynı ülkede yaşıyor demektir, o halde  $R$  geçişlidir.

**Tanım:**  $A$  kümesi üzerindeki  $R$  bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişli ise bu bağıntı **eşdeğerlik bağıntısıdır**.

**Örnek 3.2:**  $A=\mathbb{R}$ (reel sayılar kümesi) olsun ve  $A$  üzerinde

$$x R y \text{ sadece ve sadece } x^2=y^2 \text{ ise}$$

şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. O halde;

$R$  yansıyandır zira tüm  $x$  reel sayıları için  $x^2=x^2$  'dir.

$R$  simetriktir zira  $x^2=y^2, y^2=x^2$  anlamına gelir.

$R$  geçişlidir çünkü  $x^2=y^2$  ve  $y^2=z^2$  ise  $x^2=z^2$  'dir.

O halde  $R$  eşdeğerlik bağıntısıdır.

**Tanım:**  $R, A$  kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı ve  $x \in A$  olsun.  $x$ ' in **eşdeğerlik sınıfı**  $[x]$  ile gösterilir ve  $A$  üzerinde  $x$  ile ilişkili tüm elemanların kümesidir öyle ki  $[x]=\{y \in A: x R y\}$ .

Eğer iki eleman ilişkili ise eşdeğerlik sınıfları eşittir. Bunu göstermek için diyelim ki  $R, A$  üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı ve  $A$ ' nın  $x$  ve  $y$  elemanları için  $x R y$  olsun.  $[x]=[y]$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $z \in [x]$  dersek  $x R z$  olur.  $x R y$  ve  $R$  simetrik ise aynı zamanda  $y R x$  olduğunu biliyoruz. O halde,  $y R x$  ve  $x R z$  ise geçişlilik özelliğinden  $y R z$  yani  $z \in [y]$  'dir. Bu

$[x] \subseteq [y]$  olduğunu gösterir.  $[y] \subseteq [x]$  'in ispatı da benzer şekilde yapılabilir. Öyleyse,  $[x]=[y]$  sonucuna varılabilir.

**Teorem 3.2:**  $R$ , bir  $A$  kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı ve  $x,y \in A$  olsun. Bu durumda sadece ve sadece  $x R y$  ise  $[x]=[y]$ ' dir.

Bir küme üzerindeki eşdeğerlik bağıntısının eşdeğerlik sınıfları topluluğu, o kümenin bir bölmelemesini oluşturur.

**Teorem 3.3:**  $R$ , boş olmayan bir  $A$  kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı olsun. Birbirinden farklı  $R$ -eşdeğerlik sınıfları topluluğuna  $A$ 'nın bölmelemesi denir.

**Örnek 3.3:**  $R$ , reel sayılar üzerinde; tamsayı( $x$ )  $x$ 'ten küçük veya eşit en büyük tamsayı olmak üzere  $x R y$  sadece ve sadece tamsayı( $x$ )=tamsayı( $y$ ) ise şeklinde tanımlanmış bir bağıntı olsun.

$R$ ' nin reel sayılar kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı olduğunu kontrol etmek oldukça basittir. Örneğin;  $\frac{1}{2} \in R$ : tamsayı( $\frac{1}{2}$ )=0, öyleyse eşdeğerlik sınıfı

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2}] &= \{x \in R: \text{tamsayı}(x)=0\} \\ &= \{x \in R: 0 \leq x < 1\}. \end{aligned}$$

Bu kümeye yarı-açık aralık denir ve  $[0,1)$  şeklinde ifade edilir.

Bir küme üzerinde verilen eşdeğerlik bağıntısından eşdeğerlik sınıfları ile bölmeleme tanımlayabileceğimiz gibi bir küme üzerinde verilen bir bölmelemeden de eşdeğerlik sınıfları bölmelemeyi oluşturan orijinal alt kümeler olacak şekilde bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlayabiliriz.

**Teorem 3.4:**  $\{S_i: i \in I\}$  bir  $A$  kümesinin bölmelemesi olsun. O halde,  $i \in I$  için,  $x R y$  sadece ve sadece  $x,y \in S_i$  ise eşdeğerlik sınıfları bölmelemedeki  $S_i$  kümeleri olan  $A$  üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlar.

**Modulo Aritmetik :**  $n$  pozitif bir tamsayı olarak verilsin.  $Z$  tamsayılar kümesi üzerinde ,modulo  $n$  bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$a \equiv_n b \text{ ancak ve ancak eğer bazı } k \in Z \text{ için } a-b = k.n \text{ ise}$$

$a \equiv_n b$  için alternatif tanım  $a \equiv b \pmod n$  şeklindedir.

Örnek :  $\pmod 5$  'de  $n=5$  dir.  $a \equiv_5 b$  yi kısa olsun diye  $a \equiv b$  şeklinde yazarız. Bu durumda ancak ve ancak  $a-b = 5k$  ise  $a \equiv_5 b$  dir.  $k$  gibi bir tamsayı vardır öyleki,  $a=5k+b$  dir. Bu yüzden

$[p] = \{q \in Z : q=5k +p, \text{ bazı } k \in Z \text{ için}\}$  Eşdeğerlik sınıfları sonsuzdur bazıları:

$$[0] = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$$

$$[3] = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$$

$$[4] = \{\dots, -6, -1, 4, 7, 12, 19, \dots\} \text{ Bunlar beş adet farklı eşdeğerlik sınıfıdır.}$$

### 3.5 Sıra Bağlılıları

Birçok küme doğal olarak sıralanmış elemanlara sahiptir. Örneğin büyüklüğe göre sıralanmış reel sayılar kümesi. Benzer şekilde bir küme topluluğu eleman sayısına göre sıralanabilir. Örneğin,  $A \subseteq B$  ise  $A$ ,  $B$ ' den küçüktür deriz.

Eşdeğerlik bağıntılarından farklı olarak birçok farklı tip sıra bağıntısı vardır. En genel sıra bağıntısı 'parçalı sıra' bağıntısıdır.

**Tanım:** Bir kümedeki **parçalı sıra**, yansıyan, ters simetrik ve geçişli olan bir bağıntıdır.

Bir kümede parçalı sıra varsa bu kümeye **parçalı sıralı küme** denir.

**Örnek 3.4:** Reel sayılar kümesi üzerinde  $x \mathbf{R} y$  sadece ve sadece  $x \leq y$  ise şeklinde tanımlanan  $\mathbf{R}$  bağıntısı parçalı sıradır.

Öte yandan,  $x \mathbf{S} y$  sadece ve sadece  $x < y$  ise şeklinde tanımlanan  $\mathbf{S}$  bağıntısı parçalı sıra değildir çünkü yansıyan değildir.

**Teorem 3.5:**  $\mathbf{R}$ ,  $A$  kümesi üzerinde parçalı bir sıra ve  $B$  de  $A$ 'nın herhangi bir alt kümesi olsun. Bu durumda,  $\mathbf{S} = \mathbf{R} \cap (B \times B)$   $B$  üzerinde bir parçalı sıradır.

Topyekûn sıra: (Doğrusal sıra) : Kümenin her hangi iki elemanı arasında sıralama yapılabilirse topyekûn sıra bağıntısı vardır. (Doğal sayılarda büyüklük, küçüklük bağıntısı )

Sözlük sırası :  $S$  ve  $T$  topyekûn sıralı kümeler ise  $S \times T$  (kartezyen çarpım) kümesinde sözlük sırası:

$a, a' \in S; b, b' \in T$  olmak üzere;

$(a,b) < (a',b') \Rightarrow a < a'$  yada  $a=a', b < b'$  dür.

Örnek:  $A = \{1,2,3,4,6,8,12\}$  kümesinde bölünebilirlik bağıntısıyla kısmi bir sıralama yapılırsa, bağıntı matrisi Tablo 1.4'deki şekilde olacaktır.

	1	2	3	4	6	8	12
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	1

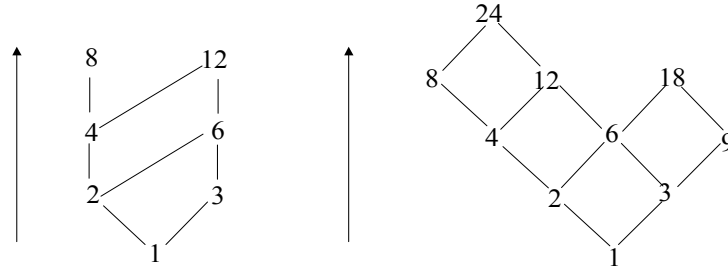
Tablo 3.1.

Halef-Selef(Predecessor-Successor, ilk öndegelen- ilk izleyen) Bağıntısı:

$b$ ,  $a$ 'nın halefi ise  $a < c < b$  olamaz. Yani  $a$  ile  $b$  arasında sıralanabilen bir  $c$  elemanı bulmak mümkün değildir, yani  $a \ll b$ 'dir.

Bu durumda kısmi sıralı küme için yeni bir graf tanımı(hasse diyagramı) yapılarak çizilir.

Hasse Diyagramı:  $a \ll b$  şeklindeki çiftleri birleştiren ve en önde gelenin en alta konulduğu graftır. Örnek: Şekil 3.4..



Şekil 3.4.

### 3.5.1 En büyük ve en küçük eleman

Teorem 3.5' e göre reel sayıların her hangi bir alt kümesi  $\leq$  bağıntısı ile parçalı sıralıdır. Bu şekilde sıralanmış bazı reel sayı kümeleri en büyük veya en küçük elemana sahip olabilir, bazıları da olmayabilir. Örneğin, tam sayılar kümesinin en büyük veya en küçük elemanı yokken, pozitif tamsayıların en küçük elemanı 1' dir fakat en büyük elemanı yoktur.

En büyük veya en küçük eleman bir tane olmayabilir. Örneğin,  $\{a,b,c\}$  kümesinin öz alt kümelerini eleman sayısına göre sıralarsak, en küçük eleman  $\emptyset$  iken en büyük eleman üç tanedir çünkü üç tane iki elemanlı alt küme vardır.

**Tanım:**  $R$ ,  $A$  kümesi üzerinde bir parçalı sıra olsun.  $A$ ' nın **en büyük elemanı**, tüm  $a \in A$  için  $a R \alpha$  olmak üzere  $\alpha$  elemanıdır.

Benzer şekilde,  $A$ ' nın **en küçük elemanı**, tüm  $a \in A$  için  $\beta R a$  olmak üzere  $\beta$  elemanıdır.

Yeniden  $\{a,b,c\}$ ' nin öz alt kümeleri örneğine dönersek iki elemanlı her bir alt küme en büyük eleman olacaktır. O halde bu düşünceyi maksimal eleman tanımını ile formülize edebiliriz.

**Tanım:**  $A$ ,  $R$  sıra bağıntılı bir parçalı sıralı küme olsun. Tüm  $a \in A$  için  $x R a$   $x=a$  anlamına geliyorsa  $A$ ' daki  $x$  elemanı **maksimaldir**.

Benzer şekilde, tüm  $a \in A$  için  $a R y$   $a=y$  anlamına geliyorsa  $y$  elemanı **minimaldir**.

## 3.6 n-ögel(n-tuple) bağıntılar ve uygulamaları

### 3.6.1 n-ögel(n-tuple) bağıntılar

Birden fazla kümeler arasındaki bağıntılar sık sık karşımıza çıkar. Örneğin, öğrenci adı, öğrencini bölümü, öğrencinin başarı notunu içeren kümeler arasında bir bağıntı vardır. Bu bölümde birden fazla kümeler arasında olan ve n-ögel(n-tuple) bağıntılar olarak adlandırılan bağıntılar açıklanacaktır.

**Tanım:**  $A_1, A_2, \dots, A_n$ : kümesi verilsin. Bu kümeler üzerindeki bir n-ögel bağıntı,  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  kartezyen çarpımının bir alt kümesidir.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kümelerine bağıntının alanı(domain) ve n'e derecesi denir.

Örnek: 5 ögel(B, N, A, D,N) bir R bağıntısı B: Bölümü, N :Numarası, A: Öğrencini adı, D : Dersin adı, N: Notu 'nu göstermek üzere veriliyor. Örneğin, Bilgisayar mühendisliği bölümü 01104115 numaralı Ali nin Ayrık Matematik dersi notu BA'nın anlamı (Bilgisayar,01104115,



Ahmet, Ayrik matematik,BA) R bağıntısına aittir. Bu durumda derecesi 5 olan R bağıntısının alanı olan kümeler, Bölümler,Öğrenci numaraları, Öğrenci adları, Dersler ve Notlar şeklinde olacaktır.

### Uygulama: İlişkisel Veritabanları

Bilgiyi saklamak ve işlemek için tasarlanmış bilgisayar sistemine veritabanı sistemi denir. Saklanmış verilerin işlenmesinin kontrol eden yazılıma da veritabanı yönetim sistemi (database management system) veya DBMS denir.

Tüm veritabanı yönetim sistemleri, verinin özel bir tip yapıya sahip olduğunu ve DBMS' in saklı veriyi, verinin kendi teorik modeline göre işlediğini varsayar. Bu yüzden birçok değişik tip DBMS bulunur: ilişkisel, ağ ve hiyerarşik. Bu bölümde matematiksel bağıntıları esas alan ilişkisel veritabanı sistemlerinden bahsedilecektir.

Bir veri birçok kısımdan oluşur. Örneğin, adres defterindeki bir kayıt isime, adrese, telefon numarasına göre sınıflandırılabilir. Verinin her bir parçası 'attribute (nitelik)' olarak adlandırılır. Verilerin her zaman belli bir nitelik kümesine sahip olduğunu varsayarız ve bu nitelik kümesine kayıt tipi(record type) adı verilir. Bir kayıt dosyası (record file), verilen kayıt tipine ait verilerin toplamıdır. Tüm verilerin aynı tip olduğu kayıt dosyalarına **birincil normal formdadır (first normal form)** denir. İlişkisel veritabanlarının temel kuralı tüm kayıt dosyalarının birincil normal formda olmasıdır.

**Tanım:** Veri **attribute** adı denilen bileşenlerine ayrılır. Bir **kayıt tipi** bir attribute'lar(veya **fieldlar**) kümesidir. Bir **kayıt örneği** (record instance), belli bir kayıt tipinin gerçek verisidir ve **kayıt dosyası** aynı kayıt tipinden olan kayıt örneklerinin kümesidir.

**Örnek 3.5:** GYTE isimli bir yardım derneği kendisine yapılan bağışları yapan kişileri, isimlerini, adreslerini, telefon numaralarını ve bağışla ilgili diğer detayların bilgilerini tutmak istediğini varsayalım.

Öncelikle bu dernek; bağışlayanın\_adi, bağışlayanın\_adresi, bağışlayanın\_telefonu, bağış\_miktari ve bağış\_tarihi şeklinde adlandırabileceğimiz attribute' ları belirler. Bu beş attribute kayıt tipini tanımlar. Tablo 3.2' de bazı kayıt örnekleri gösterilmiştir.

<i>bağışlayanı_adi</i>	<i>bağışlayanın_adresi</i>	<i>bağışlayanın_tel efonu</i>	<i>bağış_miktari</i>	<i>bağış_tarihi</i>
Kaya, R	Çayırova, Kocaeli	262 614-3939	100	Ocak 1997
Kaya, R	Çayırova, Kocaeli	262 614-3939	150	Mart 1999
Beyaz, S	Gebze, Kocaeli	262 578-4108	300	Ekim 1998
Verir,S	Pendik,İstanbul	216 467-1297	250	Kasım 2000
Verir, S	Pendik,İstanbul	216 467-1297	500	Aralık 1999

Tablo 3.2

Bağış yapanın açık adresi sadece bir attribute ile etiketlendiğinden bu kayıt dosyasından coğrafik bilgiyi elde etmek kolay olmayabilir. Örneğin dernek, İstanbul'dan bağış yapanları bulmak isterse şehir adı tek başına bir attribute olarak istenmediğinden çok zor olacaktır. bağışlayanın\_adresi isimli tek bir attribute cadde ve şehir olarak ikiye ayrılırdı şirketin işi çok daha kolay olurdu.

Bu örnek, attribute tanımlamak için önemli bir noktayı göstermiştir. Bir kayıt örneğindeki potansiyel yararlı bilgi parçalarının her biri bir attribute ile belirtilmelidir. Bu mecburi bir kural değildir zira 'potansiyel yararlı bilgi parçası' verinin kullanıldığı yere göre değişir.

Yukarıdaki örnekte eğer coğrafik konumun bir önemi yoksa adresleri tek bir attribute olarak belirtmek daha mantıklıdır.

İlişkisel veritabanı modelinde kayıt dosyası bir tablo olarak gösterilir. Tablonun sütunları attribute isimlerini, satırları ise her bir kayıt örneğini oluşturur.

Bir kayıt tipinin  $A_1, A_2, \dots, A_n$  şeklinde n tane attribute' ten oluştuğunu düşünelim. Bu durumda herhangi bir  $A_i$  attribute' u için bir veri girişleri kümesi olacaktır.  $X_i$ ' ye de  $A_i$  attribute' u ile elde edilen değerler kümesi diyelim.  $X_i$  kümeleri zamana bağımlıdır ve kayıt dosyasına yeni girişler oldukça veya kayıt silindikçe değişir.

Bu notasyona göre; verilen bir kayıt örneği her bir  $x_i, X_i$  kümesine ait olmak üzere n-tuple' dir  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Bunun anlamı tüm kayıt örnekleri n tane aynı tip bilgi parçasından oluşur.  $x_i \in X_i$  olmak üzere tüm n-tuple' ların  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kümesi  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  kartezyen çarpımıdır. Bu yüzden R kayıt dosyası kartezyen çarpımın alt kümesidir ( $R \subseteq (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ ).

**Örnek 3.6:**  $A_1 \dots A_5$  sırasıyla bağışlayanın\_adi, bağışlayanın\_adresi, bağışlayanın\_telefonu, bağış\_miktarı ve bağış\_tarihi olsun. Her bir  $A_i$  attribute' u için bu attribute'a karşılık gelen  $X_i$  kümesi olduğunu varsayalım. O halde, bir kayıt örneği  $x_i \in X_i$  olmak üzere 5 ögeli (5-tuple)' dir.

Bu kayıt tipine göre önemli sayıda bilgi yinelenmesi olur. Örneğin, bağış yapanın ismi, adresi ve telefonu her bağış yaptığında tekrar kaydedilir. Bu bilginin tutulduğu yerden kayıplara yol açacağı gibi kayıt dosyasının güncellenmesini de zorlaştırır. Mesela, iki bağış yapmış Bay Kaya adres değiştirdi diyelim. Bu durumda, kayıt dosyasını güncelleştirmek için iki kayıta da adresi değiştirmek gerekecektir.

Bu sebeplerle veriyi aşağıdaki gibi iki ayrı kayıt dosyasına bölmek daha mantıklıdır.

$A_1, A_2, A_3$ : bağışlayanın\_adi, bağışlayanın\_adresi, bağışlayanın\_telefonu

$A_1, A_4, A_5$ : bağışlayanın\_adi, bağış\_miktarı, bağış\_tarihi

Bu durumda orijinal veritabanındaki yineme probleminden kurtulmuş oluruz ve daha kolay güncelleme yapabiliriz. Mevcut durumda veritabanı iki ilişkili kayıt dosyası içerir; birisi  $X_1 \times X_2 \times X_3$  'ün, diğeri  $X_1 \times X_4 \times X_5$  'ün alt kümesidir. Tabii ki, iki kayıt dosyasını bağışlayanın\_adi attribute' u bağlar.

Tablo 3.3 ve tablo 3.4, tablo 3.2' deki bilginin nasıl iki kayıt dosyasına ayrıldığını göstermektedir.

<i>bağışlayanın_adi</i>	<i>bağışlayanın_adresi</i>	<i>bağışlayanın_telefonu</i>
Kaya, R	Çayırova, Kocaeli	262 614-3939
Verir, S	Pendik, İstanbul	216 467-1297
Beyaz, S	Gebze, Kocaeli	262 578-4108

Tablo 3.3

<i>bağışlayanın_adi</i>	<i>bağış_miktarı</i>	<i>bağış_tarihi</i>
Kaya, R	100	Ocak 1997
Kaya, R	150	Mart 1999
Beyaz, S	300	Ekim 1998
Verir, S	250	Kasım 2000
Verir, S	500	Aralık 1999

Tablo 3.4

**Tanım:**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  attribute' ler topluluğu olsun ve her bir  $A_i$ ' ye ilişkin bir  $X_i$  veri kümesi olduğunu düşünelim. **İlişkisel veritabanı** her biri bazı  $X_i$  kümeleri arasındaki bağıntılar topluluğudur. Her bir bağıntı bir **kayıt dosyasıdır**.

Kayıt dosyasındaki kayıt örneklerine anahtar (key) ile erişilir. Key, tek bir kayıt örneğini belirten attribute' lar kümesidir, fakat bu kümenin hiçbir öz alt kümesi tek bir kayıt örneğini belirtme özelliğine sahip değildir.

Pratikte birçok olası anahtar seçme imkânı vardır. Key olarak kullanılabilir attribute' lar kümesine **candidate key** denir. Bunlardan biri gerçek key olarak seçilir ve buna **primary (birincil) key** denir.

Örneğimizde, {bağışlayanın\_adı} herhangi iki bağış yapanın adının aynı olmaması durumunda Tablo 1 için bir candidate keydir. Bu durumda her bir kayıt örneği bağış yapanın adı ile belirtilebilir. Öte yandan iki farklı bağış yapan kişinin aynı adı taşıması durumunda {bağışlayanın\_adı} key olmaz bunun yerine {bağışlayanın\_adı, bağışlayanın\_telefonu} attribute kümesi key olarak kullanılabilir.

İlişkisel veritabanları üzerinde beş çeşit işlem yapılabilir.

### 3.6.2 Selection (Seçme)

Selection işlemi kayıt dosyasından verilen kriter kümesini sağlayan kayıt örneklerini listeler. Örneğin, X şehrinde yaşayan müşterilerin tüm isim ve adres kayıtlarını listelemek bir selection örneğidir.

Selection işlemini yeni kayıt dosyaları tanımlamak yani veri tabanındaki kayıt dosyalarının alt kümeleri şeklinde düşünebiliriz. Bu yeni kayıt dosyaları muhtemelen geçicidir ve veritabanını oluşturan kayıt dosyaları kümesine eklenmezler. Aynı zamanda selection kayıt dosyasının tablo gösterimi şeklinde de tanımlanabilir. Bu yeni kayıt dosyaları gerekli attribute' lara sahip satırları çekerek elde edilir.

Örneğin; GYTE veritabanında 'Ocak 1999'dan sonraki tüm bağışları seçmek' istediğimizde tablo 3.3 'te gösterilen kayıt dosyasından ikinci, dördüncü ve beşinci satırlar elde edilecektir.

### 3.6.3 İzdüşüm (Projection)

Selection tablodaki belli satırları geri döndürürken projection işlemi sütunları döndürür. Sütunlar attribute' lara karşılık geldiğinden sonuçta ortaya çıkan kayıt dosyası orijinalden daha az sayıda attribute' lu kayıt tipine sahiptir.

Projection işleminin resmi tanımı şöyledir:  $R, (A_1, \dots, A_p)$  tipinde bir kayıt dosyası ve  $q \leq p$  ve her bir  $B_i$  aynı zamanda  $R$ ' nin attribute' u olmak üzere  $(B_1, \dots, B_q)$  kayıt tipi olsun. Yani, her bir  $B$  bir  $j$  için  $A_j$ ' ye eşit olsun. Projection, kayıt örnekleri  $R$ ' nin her bir kayıt örneklerinin  $B_i$  attribute' larından oluşan  $(B_1, \dots, B_q)$  tipinde yeni kayıt dosyası tanımlar.

### 3.6.4 Doğal Birleşim (Natural Join)

GYTE veritabanının örnek 3.6 'daki gibi ikiye ayrıldığını düşünelim. Bu durumda bağış yapanların isimlerini, telefon numaralarının ve bağış miktarlarını nasıl alabiliriz? Buradaki problem bağış yapanın telefon numarası ile bağış miktarlarının farklı kayıt dosyalarında olmalarıdır. O halde kayıt dosyalarını birleştirerek üç attribute 'u da içeren yeni bir kayıt dosyası üretmemiz gerekir. İki dosyada ayrıca bağışlayanın\_adresi ve bağış\_tarihi de bulunur

ve sonuçta oluşacak birleşmiş tabloda bu attributeler de bulunacaktır. Ancak bu bir sorun değildir zira projection ile bu dosyadan gerekli kayıt tipleri çekilebilir.

Natural join işleminin matematiksel temeli şöyledir:  $R$  ve  $S$ ,  $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$  ve  $(A_1, \dots, A_p, C_1, \dots, C_r)$  tipinde kayıt dosyaları olsun.  $R$  ve  $S$ ' nin doğal birleşimi  $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q, C_1, \dots, C_r)$  tipinde yeni bir kayıt dosyasıdır. Doğal birleşimim oluşturan kayıt örneklerinin hepsi  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in R$  ve  $(x_1, \dots, x_p, z_1, \dots, z_r) \in S$  özelliğine sahip  $(p+q+r)$ -tuple  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r)$  'dır.

### 3.6.5 Birleşim ve Fark (Union and Difference)

Verilen iki aynı kayıt tipinde  $R$  ve  $S$  kayıt dosyasının birleşimi ve farkı, bildiğimiz küme teorisindeki birleşim ve fark işlemlerine karşılık gelir. Bu yüzden  $R \cup S$ , ve  $R$  ve  $S$  'deki kayıt örneklerinin tamamını (listeyi tekrarlamadan) içeren kayıt dosyasıdır.  $R-S$  ise  $R$  de bulunan fakat  $S$  ' de bulunmayan kayıt örneklerini içeren kayıt dosyasıdır.

## 3.7 Fonksiyonlar ve Tanımları

$x^2+5x-8$ ,  $1/(x+3)^3$ ,  $\cos(x)$ ,  $\log(x)$  vs. gibi ifadeler genellikle  $f(x)$  ile gösterilir ve "x' in fonksiyonu" olarak adlandırılır. İfadenin kendisinden daha önemli olan verilen herhangi bir  $x$  değeri için fonksiyonun değerini hesaplamak için bir kural tanımlamasıdır. İki farklı ifade  $f(x)$  ve  $g(x)$ , tüm  $x$  reel sayıları için aynı değerleri verebilir ve biz bu iki ifadenin aynı fonksiyonu tanımladığını söyleyebiliriz. Örneğin  $f(x)=x^2+4x-5$  ve  $g(x)=(x+2)^2-9$ .

**Tanım:**  $A$  ve  $B$  iki küme olsun.  $A$  ' dan  $B$  ' ye bir  $f$  fonksiyonu;  $f: A \rightarrow B$  şeklinde yazılır ve her bir  $a \in A$  'yı tek bir  $f(a) \in B$  elemanı ile eşleştiren bir kuraldır.

**Örnek 3.7:**  $x^2+4x-5$  ifadesi tek başına bir fonksiyon değildir zira tanımımıza göre  $A$  ve  $B$  kümeleri belirtilmemiştir. Öte yandan, bu ifade şu şekilde tanımlanabilir:  $f: R \rightarrow R$  olmak üzere  $f(x)=x^2+4x-5$ .

**Tanım:**  $A$  ve  $B$  küme olsun.  $f$ ,  $A$  ' dan  $B$  ' ye bir fonksiyon  $f: A \rightarrow B$  şeklinde yazılır ve  $f \subseteq (A \times B)$  'nin alt kümesidir ve şu kuralı sağlar:

Her bir  $a \in A$  için  $(a, b) \in f$  olmak üzere tek bir  $b \in B$  vardır.

$A$  kümesi  $f$  'nin tanım kümesi ve  $B$  kümesi de  $f$  'nin değer kümesi denir.  $(a, b) \in f$  ise  $b \in B$  elemanı  $a \in A$  elemanının görüntüsüdür denir ve  $b=f(a)$  veya  $f: a \rightarrow b$  şeklinde yazılır.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: A' \rightarrow B'$  fonksiyonları

(i)  $A=A'$

(ii)  $B=B'$

(iii)  $f(a)=g(a)$  ( $A=A'$  'ne ait tüm  $a$  elemanları için)

ise eşittir.

Bir fonksiyonun grafiği  $R^2 = R \times R$  düzleminde  $y=f(x)$  'i sağlayan  $(x, y)$  noktalarını içeren eğridir. Ancak unutulmaması gereken nokta  $x-y$  düzlemindeki her eğri her hangi bir  $f: A \rightarrow R$  ( $A \subseteq R$ ) fonksiyonun grafiği değildir. Örneğin, merkezi orijin  $(0,0)$ , yarıçapı 1 olan çemberin denklemi

$x^2+y^2=1$  ' dir. -1 ve 1 arasındaki her bir x değeri için iki tane y değeri vardır.

(x,y)-düzleminde verilen bir eğrinin bir fonksiyonun grafiği olup olmadığını anlamak kolaydır.  $x=a$  dikey doğrusu sadece ve sadece eğriyi tek bir yerde kesiyorsa, verilen  $a \in A$  için  $y=f(a)$  olacak şekilde tek bir  $y \in \mathbb{R}$  vardır.

Bir fonksiyonun tanımında karışıklığa sebep olan iki özellik vardır. Birincisi, tanım kümesinin iki veya daha fazla elemanı değer kümesinde aynı görüntüye sahipse. İkincisi ise, değer kümesindeki tüm elemanların, tanım kümesindeki bir elemanın görüntüsü olmak zorunda olmadığıdır.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.  $f$  'nin görüntüsü (aralığı)

$$\text{im}(f) = \{b \in B: (a,b) \in f, a \in A \text{ için}\} \text{ kümesidir.}$$

Dikkat edilirse  $\text{im}(f)$  değer kümesi  $B$  'nin alt kümesidir ve  $a \in A$  elemanının görüntüsü  $f(a)$  ile karıştırılmamalıdır. Bir elemanın görüntüsü bir elemandır fakat bir fonksiyonun görüntüsü bir kümedir ; bir başka deyişle tanım kümesindeki elemanların görüntülerinin tamamını içeren kümedir.

$$\text{im}(f) = \{f(a): a \in A\}.$$

**Örnek 3.8:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$  fonksiyonunun görüntüsünü bulunuz.

**Çözüm:** Tanıma göre  $y \in \text{im}(f)$  sadece ve sadece  $x \in \mathbb{R}$  için  $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$  ise.

Bu eşitlik şuna eşittir:  $yx^2 + y = 3x$  veya

$$yx^2 - 3x + y = 0.$$

Bu durumda  $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4y^2}}{2y}$  olur.

Bu nedenle gerçek çözüm  $y \neq 0$  ve  $9 - 4y^2 \geq 0$  olmalıdır.

Böylece  $y^2 \leq 9/4$  yani  $-3/2 \leq y \leq 3/2$  (ve  $y \neq 0$ ) elde edilir.

Bu durumda  $-3/2 \leq y \leq 3/2$ ,  $y \neq 0$  sağlandığında  $y = f(x)$  olacak şekilde bir x reel sayısı bulunabilir.  $y=0$  özel bir durumdur fakat açıkça  $f(0)=0$  'dır o halde,  $0 \in \text{im}(f)$  ' dir.

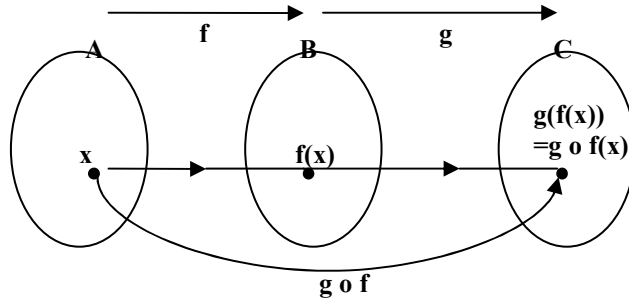
Böylece,  $\text{im}(f) = [-3/2, 3/2] = \{y \in \mathbb{R}: -3/2 \leq y \leq 3/2\}$ .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibi bir fonksiyonun grafiği verilmişse bu fonksiyonun görüntüsü kolayca bulunabilir.  $A$  'nın her bir elemanının görüntüsü  $f(a)$ ;  $a$  'dan grafiği kesene kadar dikey doğru çizerek ve sonra kesişim noktasından da y-eksenine yatay bir doğru çizerek bulunabilir.

### 3.7.1 Bileşik Fonksiyonlar, Birebir(injective) ve Örten(Surjektive) fonksiyonlar

$f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  iki fonksiyon olsun.  $x$ ,  $A$  'nın elemanı ise  $y = f(x)$   $B$  'ye aittir. Bu nedenle  $g(y) = g(f(x))$   $C$  'nin elemanıdır.  $A$  'dan  $C$  'ye bir fonksiyon tanımlamak için  $f$  ve  $g$  'nin

bileşkesi dediğimiz ve  $g \circ f$  ile gösterdiğimiz  $x \mapsto g(f(x))$  ortaklığını kullanabiliriz.  $g \circ f$  bileşik fonksiyonu Şekil 1.15'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.15. Bileşik fonksiyon

Tanıma göre  $g \circ f$  fonksiyonu  $z = g \circ f(x)$  olacak şekilde tüm  $(x, z)$  elemanlarını içeren  $A \times C$  kartezyen çarpımının alt kümesi olmalıdır.  $y = f(x) \in B$  dersek  $(x, y) \in f$  ve  $(y, z) \in g$  'dir. Bu nedenle, bileşik fonksiyonları şu şekilde tanımlarız.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  iki fonksiyon olsun. **Bileşik fonksiyon**  $g \circ f: A \rightarrow C$ :

$$g \circ f = \{(x, z) \in A \times C : (x, y) \in f \text{ ve } (y, z) \in g \text{ (} y \in B \text{ için)}\}$$

İki rastgele fonksiyonun bileşkesi  $g \circ f$  olmayabilir. Yukarıdaki tanıma göre  $g$ 'nin tanım kümesi,  $f$ 'in değer kümesine eşittir. Ancak bu kati bir kural değildir.  $g \circ f$  tanımını biraz genişletirsek:

$f: A \rightarrow B$  ve  $g: B' \rightarrow C$  iki fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.  $g(f(a))$ 'nin tanımlı olabilmesi için  $f(a)$ 'nin  $g$ 'nin tanım kümesi olan  $B'$  kümesine ait olması gerekir. Bu durumda  $g \circ f$  'i tanımlamak için  $g(f(a))$ 'nin tüm  $a \in A$  için tanımlı olması şarttır. Böylece  $g \circ f$  sadece ve sadece  $f$ 'in görüntüsü  $g$ 'nin tanım kümesinin alt kümesi ise tanımlıdır. Tabii ki, bu şart yukarıdaki tanımda olduğu gibi  $B = B'$  ise sağlanır.

**Örnek 3.9:**  $f$  ve  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $f(x) = x + 2$ ,  $g = 1/(x^2 + 1)$  şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x + 2) \\ &= \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(1/(x^2 + 1)) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} + 2 \\ &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Bu örnek gösteriyor ki, genellikle  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Teorem 3.6:**  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda  $\text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im}(g)$ .

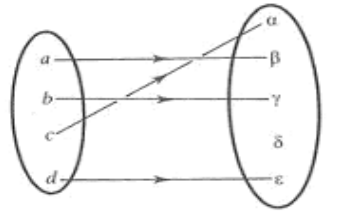
**İspat:**  $c \in \text{im}(g \circ f)$  olsun. O halde,  $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$  olacak şekilde  $a \in A$  mevcuttur. Bu durumda,  $b = f(a) \in B$  dersek  $g(b) = c$  dir ve bu nedenle  $c \in \text{im}(g)$  dir. Bu sebeple,  $\text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im}(g)$ .

Önceki bölümlerden hatırlayacağımız gibi bir  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu

- (i) tanım kümesinin farklı elemanları aynı görüntüye sahip olabilir.
- (ii) değer kümesinin bazı elemanları tanım kümesinin herhangi bir elemanının görüntüsü olmayabilir.

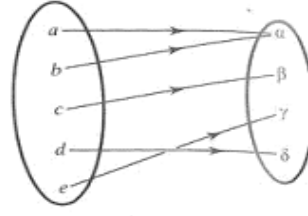
Örneğin,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  fonksiyonunda bu iki olasılık da mümkündür. Hem 2 hem de -2 aynı görüntüye sahip olduğu gibi herhangi bir negatif reel sayı  $f$  in görüntüsüne dahil değildir. (tüm  $x$  reel sayıları için  $x^2 \geq 0$ ).

Yukarıdaki maddelerden ilkinin mümkün olmadığı fonksiyonlara birebir (injective), ikincisinin mümkün olmadığı fonksiyonlara da örten (surjective) denir. Bu iki durum 1.16' te gösterilmiştir. Şekil 1.14 (a) 'daki  $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$  fonksiyonu injective'dir fakat surjective değildir. Diğer yandan, şekil 1.14 (b) 'deki  $g: \{a, b, c, d, e\} \rightarrow \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  fonksiyonu surjective'dir fakat injective değildir.



(a) injektif

Tanım kümesinin farklı elemanları farklı görüntüye sahip



(b) sürjektif

Değer kümesinin tüm elemanları tanım kümesinin bir elemanının görüntüsü

Şekil 1.16.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.

(i) Tüm  $a, a' \in A$  elemanları için aşağıdaki durum sağlanıyorsa  $f$  birebir (injective)dir veya bir injeksiyon (birebir fonksiyon)dur deriz:

Eğer  $(a, b), (a', b') \in f$  ve  $a \neq a'$  ise  $b \neq b'$ .

(ii) Eğer her  $b \in B$  için  $(a, b) \in f$  olacak şekilde  $a \in A$  mevcut ise  $f$  örten (surjective)dir veya bir örten fonksiyon (surjektif)dur deriz.

**Örnek 3.10:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 7$  olsun.  $f$  in hem birebir hem de örten fonksiyon olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $f$  in birebir olduğunu göstermek için tüm  $x$  ve  $y$  reel sayıları için  $f(x) = f(y)$  'nin  $x = y$  anlamına geldiğini ispatlamamız gerekir.

$$f(x) = f(y)$$

$$3x - 7 = 3y - 7$$

$$3x = 3y$$

$$x = y. \text{ O halde } f \text{ birebir dir.}$$

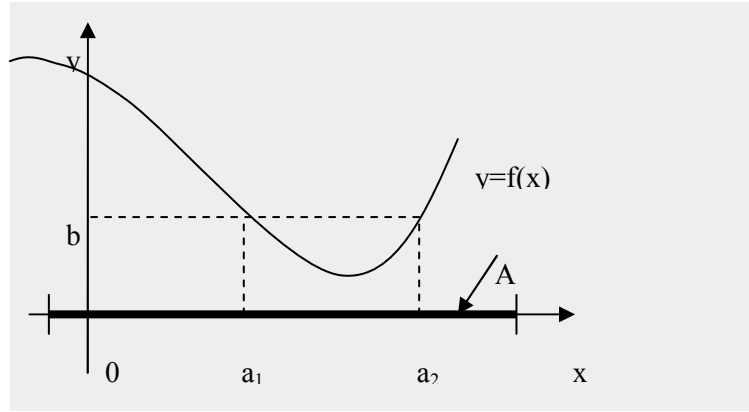
$f$  in örten olduğunu göstermek için,  $y$  'nin  $\mathbb{R}$  değer kümesinin herhangi bir elemanı olduğunu düşünelim.  $f(x) = y$  olacak şekilde  $x \in \mathbb{R}$  bulmamız gerekir.  $x = (y + 7)/3$  olsun. O halde,  $x \in \mathbb{R}$  ve

$$\begin{aligned}
f(x) &= f((y+7)/3) \\
&= 3 \cdot \frac{y+7}{3} - 7 \\
&= y+7-7 \\
&= y. \text{ O halde } f \text{ örtendir.}
\end{aligned}$$

Bu ispat herhangi bir **doğrusal fonksiyonun**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=ax+b$  hem birebir hem de örten olduğunu göstermek için kullanılabilir.

A ve B  $\mathbb{R}$ 'nin alt kümeleri olmak üzere  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu olsun. Bir fonksiyonun grafiğinden birebir veya örten olup olmadığını anlayabiliriz.

$f$ 'in birebir olmadığını farz edelim. O halde, A' da  $f(a_1)=f(a_2)=b$  olacak şekilde iki tane  $a_1$  ve  $a_2$  elemanı vardır. Bunun anlamı b 'den çizilen yatay doğru x-eksenini  $x=a_1$  ve  $x=a_2$  'de keser. Bu durum şekil 1.17'de gösterilmiştir.



Şekil 1.17.

Öte yandan eğer  $f$  birebir ise bu durum hiçbir zaman gerçekleşmez. Yani yatay doğru grafiği birden fazla yerden kesmez.

Örten özelliği ise şu şekildedir:  $\text{im}(f)=B$  olmak üzere  $f$ , sadece ve sadece B' nin bir noktasından geçen her yatay doğru grafiği en az bir kere kesiyorsa örtendir.

**Teorem 3.7:**  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  iki fonksiyon olsun.

(i) Eğer  $f$  ve  $g$  her ikisi birden birebir ise  $g \circ f$  de birebir'dir.

(ii) Eğer  $f$  ve  $g$  her ikisi birden örten ise  $g \circ f$  de örten'dir.

**İspat:** (i)  $f$  ve  $g$ 'nin birebir fonk. olduğunu düşünelim.  $a, a' \in A$ ,  $b=f(a)$  ve  $b'=f(a')$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&g \circ f(a) = gf(a') \\
\Rightarrow &g(f(a)) = g(f(a')) \\
\Rightarrow &g(b) = g(b') \\
\Rightarrow &b = b' \quad (\text{zira } g \text{ birebirdir.}) \\
\Rightarrow &f(a) = f(a') \quad (\text{çünkü } f(a)=b, f(a')=b'.)
\end{aligned}$$



$\Rightarrow a = a'$  (zira  $f$  birebirdir.)

Böylece  $g \circ f$  bir birebir fonk.dur.

**Teorem 3.8:**  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  iki fonksiyon olsun.

(i)  $g \circ f$  bileşik fonksiyonu birebir ise  $f$  de birebirdir.

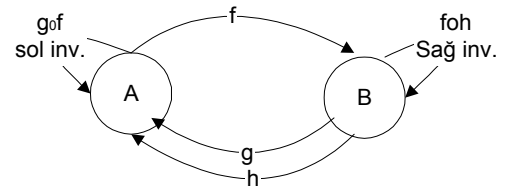
(ii)  $g \circ f$  bileşik fonksiyonu örten ise  $g$  de örtendir.

Tanım:  $id_A: A \rightarrow A$  fonksiyon,  $id_A: \{(x,x):x \in A\}$ ,  $id_A(x)=x$   $x \in A$  dır.

**Teorem 3.9:** (i)  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu sadece ve sadece  $g \circ f = id_A: A \rightarrow A$  ( $A$ 'nın özdeşlik fonksiyonu) olacak şekilde bir  $g: B \rightarrow A$  varsa birebir'dir.

(ii)  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu sadece ve sadece  $f \circ h = id_B: B \rightarrow B$  ( $B$ 'nin özdeşlik fonksiyonu) olacak şekilde bir  $h: B \rightarrow A$  varsa birebir'dir.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  herhangi bir fonksiyon olsun.  $g \circ f = id_A$  olacak şekilde bir  $g: B \rightarrow A$  fonksiyonu  $f$  için bir **sol inverse**, benzer şekilde  $f \circ h = id_B$  olacak şekilde bir  $h: B \rightarrow A$  fonksiyonu  $f$  için bir **sağ inverse** denir.



Şekil 3.8.

### 3.7.2 Ters Fonksiyonlar

Hem birebir hem de örten fonksiyonlar ilginç ve önemli özelliklere sahiptir.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu hem birebir hem de örten ise birebir ve örten(bijektive)dir veya bijeksiyondur.

**Teorem 3.10:**  $A$  ve  $B$   $R'$  nin alt kümeleri olmak üzere  $f: A \rightarrow B$  fonksiyon olsun. O halde  $f$ , sadece ve sadece  $B'$  nin bir noktasından çizilen her doğru  $f$  nin grafiğini tam olarak bir yerde kesiyorsa birebir ve örten'dir.

**Teorem 3.11:** (i) İki birebir ve örten fonksiyonun bileşkesi yine birebir ve örten fonk.dur.

(ii)  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonu sadece ve sadece hem sol hem de sağ inverse' e sahipse birebir ve örten fonk.dur.

(iii)  $A$  ve  $B$  sonlu kümeler olmak üzere  $f: A \rightarrow B$  bijeksiyon ise  $|A| = |B|$ .

Dikkat edilirse (i) şıkkının tersi yanlıştır. Eğer bir bileşik fonksiyon  $g \circ f$  birebir ve örten ise hem  $f$  hem de  $g$  birebir ve örten olmak zorunda değildir. Eğer  $A$  ve  $B$  aynı kardinaliteye sahip sonlu kümeler ise  $A$  dan  $B$  ye bir birebir ve örten fonk. vardır.

Şimdi şu soruya bir göz atalım.  $f: A \rightarrow B$  şeklinde verilmiş bir fonksiyon olsun.  $g = \{(b,a):(a,b) \in f\}$  hangi durumlarda bir fonksiyon tanımlar? Burada  $g'$  yi  $f$  in diyagramında okları tersine çevirmek gibi düşünebiliriz: Eğer  $b=f(a)$  ise  $a=g(b)$  'dir.

Genel duruma bakacak olursak,  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon ve  $g = \{(b,a):(a,b) \in f\}$  şeklinde tanımlanmış olsun. O halde  $g$ , her bir  $b \in B$  için  $(b,a) \in g$  veya  $(a,b) \in f$  olacak şekilde tek bir  $a \in A$  varsa fonksiyondur.  $B'$  nin her bir elemanı için gerekli özellikleri sağlayan  $a'$  ların varlığı aynı zamanda  $f$  in örten olması için aranan şartlardır. Bunun da ötesinde,  $(a,b) \in f$  olacak

şekilde bir  $a \in A$  elemanı sadece ve sadece  $f$  birebir ise tektir.

**Teorem 3.12:**  $f: A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.  $g = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in f\}$  bağıntısı sadece ve sadece  $f$  birebir ve örten ise  $B$ ' den  $A$ ' ya bir fonksiyondur.

**Tanım:**  $f: A \rightarrow B$  bir birebir ve örten fonk. ise  $g: B \rightarrow A$ , ' $g(b)=a$  sadece ve sadece  $f(a)=b$  ise' şeklinde tanımlanan fonksiyona  $f$  in ters fonksiyonu denir ve  $f^{-1}$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 3.13:**  $f: A \rightarrow B$  bir bijeksiyon ise  $f^{-1}: B \rightarrow A$   $f$  için hem sol hem de sağ inverse' tir.

**Örnek 3.11:**  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ ,  $f(x) = 2x/(x-1)$  fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösterin ve tersini bulun.

**Çözüm:** Eğer  $f^{-1}$  'i bulabilirsek  $f$  birebir ve örten olmalıdır.  $f^{-1}$  'i bulabilmek için tanımı kullanırız:  $y=f(x)$  ise  $x=f^{-1}(y)$ . O halde,

$$y = 2x/(x-1)$$

$$y(x-1) = 2x$$

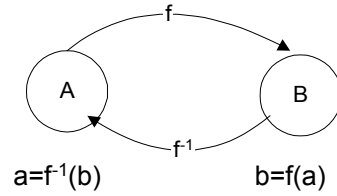
$$yx - 2x = y$$

$$x(y-2) = y$$

$$x = y/(y-2)$$

Bu sebeple şu fonksiyonu tanımlayabiliriz:

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}, g(y) = y/(y-2).$$



Şekil 3.9.

### 3.8 Alıştırmalar

1-  $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  ve  $\mathbb{R}$ ,  $A$  üzerinde ' $(a,b) \mathcal{R} (c,d)$  sadece ve sadece  $a+d=b+c$  ise' şeklinde tanımlanan bir bağıntı olsun.  $\mathcal{R}$  bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişli olduğunu fakat ters simetrik olmadığını gösteriniz.

2-  $\mathcal{R}$ ,  $A$ ' dan  $B$  'ye ve  $\mathcal{S}$ ,  $B$ ' den  $C$  'ye birer bağıntı olsun.  $\mathcal{R}$  ve  $\mathcal{S}$  'nin bileşkesi  $A$  ' dan  $C$  'ye  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$  bağıntısıdır ve ' $a(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})c$  sadece ve sadece  $a \mathcal{R} b$  ve  $b \mathcal{S} c$  olacak şekilde bir  $b \in B$  elemanı var ise' şeklinde tanımlanmıştır.

Bu tanıma göre,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbb{Z}^+$  üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun.

$n \mathcal{R} m$  sadece ve sadece  $m=n^2$  olduğuna göre;  $\mathbb{Z}^+$  üzerinde  $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$  bağıntısını tanımlayınız.

3-  $A = \{1,2,3,4\}$  olsun.

a.  $A$  üzerinde kaç tane eşdeğerlik bağıntısı vardır?

b.  $A$  üzerinde  $(1,2) \mathcal{R}$  özelliğine sahip kaç tane  $\mathcal{R}$  eşdeğerlik bağıntısı vardır?

4- Bir  $\mathcal{R}$  bağıntısı  $\mathbb{R}^2$  üzerinde şu şekilde tanımlanmıştır.

$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$  sadece ve sadece  $x_1 < x_2$  veya hem  $x_1 = x_2$  hem de  $y_1 < y_2$  ise.

$\mathcal{R}$  'nin  $\mathbb{R}^2$  üzerinde bir parçalı sıra olduğunu gösteriniz.

5- Aşağıdaki üç tabloda öğrenciler, dersler ve öğrencilerin derslerde aldıkları notlar ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

student_id	first_name	last_name	Level	concentration
100	Lynn	Icks	Senior	Independent
101	Bernard	Mac	Junior	CS- Theatre Arts
102	Mike	Soft	Freshman	Business Econ
103	June	Icks	Junior	CS-AM
104	Alan	Turing	Grad	Math

Tablo 3.5- STUDENTS

Course_id	course_name	Professor	semester	year
1	CS22: Discrete Math.	Franco	Spring	2003
2	CS22: Discrete Math.	Herlihy	Spring	2002
3	CS123: Purty Pictures	Avd	Fall	2003
4	EC187: Game Theory	Dal Bo	Fall	2002
5	CS51: Turing's Factory	Savage	Fall	2003
6	MA $\infty$	Unknown	Fall	2001

Tablo 3.6 – COURSES

student_id	course_id	student_grade
100	2	A
101	1	S
101	2	NC
102	4	A
102	1	B
103	5	A
104	5	A
104	6	A

Tablo 3.7 – COURSE\_GRADES

Buna göre;

- A almış Freshman seviyesindeki öğrencileri seçiniz.
- Courses tablosunda (course\_name, semester) kayıt tipine göre projection işlemini gerçekleştirin.
- Üç tablo üzerinde natural join işlemini gerçekleştirin ve (student\_name, course\_name, grade) kayıt tipine göre projection yazın.

6- Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulunuz.

a.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x+2)^2$

b.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4$

7-  $gf$  bileşke fonksiyonunu tanımlayınız.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ 1/x, & x < 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 0 \\ 1/x, & x < 0 \end{cases}$$

8-  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  iki fonksiyon olmak üzere,

'Hem  $f$  hem de  $g$  surjective ise  $g \circ f$  bileşkesi de surjective'dir' şeklindeki teoremi ispatlayınız.

9-  $f(x)$  fonksiyonunun tersini ( $g(x)$ ) bulup  $g \circ f$  ve  $f \circ g$  bileşke fonksiyonlarını yazarak sonucun  $x$  olduğunu ispatlayınız.

10-  $f$  ve  $g$   $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere birer fonksiyon olsun.  $f+g$ ,  $f * g$  ve  $kf$ :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları sırasıyla şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

$$(kf)(x) = k \cdot f(x).$$

- (i) Eğer  $k \neq 0$  ise  $kf$  'in sadece ve sadece  $f$  bijeksiyon ise bijeksiyon olduğunu ispatlayınız.
- (ii) Ne  $f+g$  'nin ne de  $f * g$  'nin bijeksiyon olmadığı  $f$  ve  $g$  bijeksiyonları tanımlayınız.