BÖLÜM 1.

TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

TEMEL KAVRAMLAR:

Tanım:

Kısmi diferansiyel denklem birden fazla bağımsız değişken içeren bir veya birden çok bilinmeyen fonksiyonlar ile bu fonksiyonların kısmi türevleri arasındaki bağıntıdır.

u bağımlı ; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere kısmi diferansiyel denklem genel olarak;

$$f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0$$

şeklinde matematiksel olarak ifade edilebilir.

Bir bilinmeyenli, n bağımsız değişkene sahip kısmi diferansiyel denklem en genel halde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = u(x)$ olmak üzere;

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

formundadır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenleri, u ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{dir.}$$

Örn:

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$ 1. dereceden

$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Isı iletkenliği denklemi 2. dereceden

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ Dalga denklemi 2. dereceden

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ Poisson denklemi 2. dereceden

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$ 1. dereceden.

w ile ϑ bağımlı ; x ve y bağımsız değişken olmak üzere,

$$\begin{cases} w\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta . \dfrac{\partial w}{\partial y} = x+y \\ \vartheta . \dfrac{\partial w}{\partial x} + w . \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} = x-y \end{cases}$$ dir.

u ve ϑ bağımlı , x, y bağımsız değişken olmak üzere;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

sistemleri Cauchy- Riemann sistemi iki bağımlı ve iki bağımsız değişkene sahip kısmi diferansiyel denklemlere örneklerdir.

Tanım:

Kısmi diferansiyel denklemin mertebesi , bu denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesidir.

Cauchy - Riemann sisteminde , birinci denklemi x , ikinci denklemi de y'ye göre türevini alıp toplarsak;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ Laplace denklemini elde ederiz.

Tanım

Bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon ve parametre içermeyen fonksiyona bu kısmi diferansiyel denklemin ÖZEL ÇÖZÜMÜ denir.

Bununla birlikte, kısmi diferansiyel denklemin basamağı kadar (sürekli türetilebilen) keyfi fonksiyon içeren ve denklemi özdeş olarak sağlayan fonksiyonlara da, bu denklemin GENEL ÇÖZÜMÜ denir.

ÖRN)

$f, g \in C^2[D]$, $D \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $z = f(3x+2y) + g(2x+3y)$ yüzey ailesi $6z_{xx} + 6z_{yy} - 13z_{xy} = 0$ ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer denklemin genel çözümüdür. Göst.

$u = 3x+2y \qquad v = 2x+3y$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$z_x = f_u . 3x + g_v . 2 = f_u . 3x + g_v . 2$$

$$z_{xx} = 3 f_{uu} . u_x + 2 g_{vv} . v_x$$
$$= 9 f_{uu} + 4 g_{vv}$$

$$z_y = f_u . 2 + g_v . 3$$
$$z_{yy} = 2 f_{uu} . u_y + 3 g_{vv} . 3$$
$$= 4 f_{uu} + 9 g_{vv}$$
$$z_{xy} = 3 f_{uu} . u_y + 2 g_{vv} . v_y$$
$$z_{xy} = 6 f_{uu} + 6 g_{vv}$$ yerlerine yazarsak

$6z_{xx} + 6z_{yy} - 13z_{xy} = 0$ bulunur.

ÖRN)

$z = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$ fonksiyonu $x z_x + y z_y = \dfrac{3}{2} z$ denklemini sağlayan özel çözümdür. Göst.

$$z_x = \frac{2x\sqrt{x+y} - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} . (x^2+y^2)}{x+y} = \frac{4x(x+y) - x^2 - y^2}{2\sqrt{x+y}\,(x+y)} = \frac{3x^2 + 4xy - y^2}{2\sqrt{x+y}\,(x+y)}$$

CamScanner ile tarandı

$$z_y = \frac{2y\sqrt{x+y} - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}.(x^2+y^2)}{x+y} = \frac{4y(x+y) - x^2 - y^2}{2\sqrt{x+y}\,(x+y)} = \frac{3y^2+4xy-x^2}{2\sqrt{x+y}\,(x+y)}$$

$$x z_x + y z_y = \frac{3x^3+4x^2y-xy^2+3y^3+4xy^2-x^2y}{2\sqrt{x+y}\,(x+y)} = \frac{3(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{2\sqrt{x+y}\,(x+y)}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{(x+y)^3-2xy^2-2x^2y}{\sqrt{x+y}\,(x+y)}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{(x+y)^3-2xy(x+y)}{\sqrt{x+y}\,(x+y)}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{(x+y)^2-2xy}{\sqrt{x+y}}\right] = \frac{3}{2}\,\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}} = \frac{3}{2}z \text{ bulunur.}$$

ÖRN)

$z=\ln(x^2+y^2)$ fonksiyonu $z_{xx}+z_{yy}=0$ denklemini sağlaya

özel çözümüdür. Göst.

$z=\ln(x^2+y^2)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad z_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-2x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad z_{yy} = \frac{2(x^2+y^2)-2y.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$z_{xx}+z_{yy} = \frac{\cancel{2y^2}-\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}-\cancel{2y^2}}{(x^2+y^2)^2} = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRN)

$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ fonksiyonu $U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0$ denklemin

bir özel çözümüdür.

NOT)

İki bağımsız değişkeni içeren kısmi diferansiyel denklemlerde, bağımsız değişkene göre kısmi türevlere ~~göre~~ için;

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

kısaltmaları kullanılır.