

## 2. SAYI KÜMELERİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Sayılar <sup>matematiğin</sup> istenirse yönü olan aritmetiğin temel yapı taşlarını oluşturmaktadır. Sayı kavramının tarih boyunca hem anlam hem de gösterimi bakımından toplulardan topluma değişimine birçok kaynaktan yer verilmektedir. (İlk sayılar)

İlk insanların karşılaştıkları sayma ihtiyacı bazı sayma sayıları adını verdikleri sayıları <sup>yeni</sup>  $\{1, 2, 3, \dots\}$  kümesini ortaya çıkarmıştır. Bu kümeye sayma sayıları <sup>kümesi</sup> denir.

Döşal sayılar kümesi ise  $\mathbb{N}$  ile gösterilir ve

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

şeklinde ifade edilir. Bazı kaynaklarda "0" da bir döşal sayıdır. Bazı kaynaklarda ise "0" eklenerek elde edilmiş olan

$$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, \dots\}$$

kümesi genişletilmiş döşal sayılar kümesi olarak adlandırılır.

$x+1=0$  denkleminin yukarıda tanımlanan sayı kümelerinde bir çözümünün olmadığı, yani başka net bir ifadeyle, hiçbir sayma sayısının veya hiçbir döşal sayının bir fazlasının "0" olamayacağı açıktır. Bu sayede negatif sayma sayıları ortaya çıkmıştır.

Genelde ~~değer~~<sup>sayı</sup> sayıların negatiflerinin ~~güçlenmesi~~ daha önce  
oluşturduğumuz  $\mathbb{N}^*$  sayı kümesine katılması ile elde edilen  
küme denir. Bu küme  $\mathbb{Z}$  ile gösterilir, yani:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

dir ve bu kümeye tamsayılar kümesi, elemanlarına da tamsayı  
denir.  $\rightarrow \text{A)}$

10. Kuvvetli. Kuvvetli.

⊕ Definisi:  $n$  bir tam sayı olsun. Eğer  $n = r \cdot s$  olacak şekilde  $r$  ve  $s$  tam sayıları bulunabiliyorsa  $r$  ve  $s$  sayılarına  $n$ 'nin bölenleri denir. Aynı zamanda  $n$  sayısına  $r$  ve  $s$  ile bölünebilir denir.

Bir  $n > 1$  tam sayısı bu şekilde 1 den büyük iki tam sayının çarpımı olarak yazılabiliyorsa  $n$ -ye birleşik sayı, yazılamıyorsa asal sayı adını alır.

Teoremi: Sonsuz çoklukta asal sayı mevcuttur

İspat: Bu teoremi matematikler en güzel ispat metodlarından birisi olan tersini kabul ederek çelişki elde etme yöntemini kullanarak ispatlayacağız.

Örneğin şöyle soru ~~var~~ sayıda asal sayı bulunduğunu kabul edelim. Bunlar  $p_1, p_2, \dots, p_k$  olsun. Bu sayılardan daha büyük bir sayı tanımlayalım

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

$A$  sayısı mevcut olan tüm asal sayılar olan  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ile bölünebilmez hep 1 kalanını vermektedir. Yani hiçbir asal sayıya tam bölünebilmektedir. Başka bir deyişle hiç asal çarpanı yoktur. Yani  $A$  bir asal sayıdır. Ancak varsayımımızla çelişki verilen bütün asal sayılar  $p_1, p_2, \dots, p_k$  den ibaretti. ve biz buna rağmen bundan daha büyük bir asal sayının var olduğunu göstermiş olduk. Bu da varsayımımızla çelişmektedir. O halde soru terse asal sayının olduğu kabulümüz yanlıştır.

Yani sonsuz çoklukta asal sayı mevcuttur.  $\rightarrow$



Tanım 1.1

Tamsayılar kümesi de bütün ihtiyaçlarınıza cevap veremez.

Örneğin  $p$  ve  $q$  birer tamsayı o.ü. ( $x \neq 0$ )

$$qx = p$$

Şeklindeki bir denklemin kökü bir tamsayı olmayabilir. Bu nedenle tamsayılar kümesi  $qx = p$  tipindeki tüm denklemlerin köklerini de içerecek şekilde genişletilmiş ve bu kümeye Rasyonel Sayılar kümesi adı verilmiştir.  $qx = p$  şeklindeki denklemlerin kökleri  $p/q$  şeklinde olduklarından rasyonel sayılar  $p/q$  şeklinde yazılabilen sayılardır. Bu durumda, rasyonel sayılar kümesini  $\mathbb{Q}$  ile gösterirsek

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ ve } q \neq 0 \right\}$$

olar. (?) İki tamsayının  $\neq 1$  den başka ortak böleni yoksa bu iki sayıya aralarında asaldır denir. c. sfinden farklı bir tamsayı olarak üzere  $\frac{p}{q} = \frac{cp}{cq}$  olduğundan yukarıdaki  $p$  ile  $q$  sayıları aralarında asal kabul edilecektir. Aksi takdirde  $\mathbb{Q}$  kümesinde de birbirine eşit sonsuz çoklukta eleman bulunur. Veya rasyonel sayılar kümesini

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ ve } q \text{ aralarında asal tamsayılar, } q \neq 0 \right\}$$

-8-

şekilde tanımlanabilir.

Diğer taraftan her  $m$  tamsayısı  $m/1$  şeklinde yazılabildiğinden  
bir rasyonel sayıdır. Yani  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar kümesi  $\mathbb{Z}$  tam sayı-  
lar kümesini kapsar.

Bir rasyonel sayının payını paydasına bölmekle elde edilen sayıya verilen rasyonel sayının ondalık yazılımı denir. Her rasyonel sayının bir ondalık açılımı vardır. Ancak her bir ondalık sayı her zaman bir rasyonel sayı belirtmeyebilir.

Ondalık açılımda sürekli olarak tekrar eden bir rakam ya da rakamlar dizisi bulunan rasyonel sayıları kısaca tekrar eden (devreden) kısmı bir kez yazarak ve üstüne bir çizgi atarak belirtiriz. Rasyonel sayıların bu gösterimine devirli gösterimi ya da devirli sayı denir.

ÖRNEK:

$$x = 0.24\overline{67}$$

$$100x = 24.\overline{67}$$

$$10.000x = 2467.\overline{67}$$

$$10.000x - 100x = 9900x = 2443 \quad \text{yani} \quad x = \frac{2443}{9900} \text{ bulunur.}$$

Bir kenarın uzunluğu 1 birim olan karenin köşegeninin uzunluğu  $\sqrt{2}$  birimdir. Şimdi bu  $\sqrt{2}$  sayısının bir rasyonel sayı olup olmadığını araştıralım.  $\sqrt{2}$  sayısının rasyonel sayı olduğunu göstermek için bunun  $p/q$  şeklinde yazılabilirliğini göstermek gerekir. Kabul edelim ki  $\sqrt{2}$  rasyoneeldir. O halde  $p$  ve  $q$  aralarında asal olmak üzere  $\sqrt{2} = p/q$  şeklinde yazılabilir.  $\sqrt{2}q = p$ , her iki tarafın karesi alınırsa  $2q^2 = p^2$  olur. Birinci taraf çift sayı olduğundan  $p^2$  de çifttir. Dolayısıyla  $p$  çifttir. O halde  $p$  çansayı olmak üzere  $p = 2r$  yazılabilir. O zaman

$2q^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$  bulunur ki bu  $q^2$  nin dolayısıyla da  $q$  nun çift olduğunu gösterir. Hem  $p$  hem de  $q$  çift olduğundan 2 bunların ortak bölenidir. Halbuki ki  $p$  ve  $q$ -nin aralarında asal olduklarını kabul edmiştik. Bu bir çeliktir.  $\sqrt{2}$  rasyonel değildir.



Rasyonel olmayan bu sayılara irrasyonel sayılar denir.

İkinci rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıları nasıl ayırt edebileceğimizi anlamaya çalışalım. Bunun için ihtiyacımız olan tek şey bu sayıların ondalık açılımlarıdır. Rasyonel sayılarda bu ondalık açılımların ondalık kısımları, ya sonlu basamaklıdır ya da bir veya birkaç rakamın ard arda dizilmesiyle bir sayı dizisinin sonsuz çoklukta tekrardan oluşmaktadır. ~~Örneğin~~ <sup>1/17</sup> Tekrar eden bu sayı dizisi en fazla paydadan sayı kadar basamakla sahip olabilir. Örneğin ~~1/17~~

$$1/17 = 0.0588235294117647058823529 \dots$$

ondalık açılımında 17 basamaklı sayı dizisi tekrar etmektedir.

İrrasyonel sayıların iki temsainin birbirine bölümü olarak ifade edilemediğini biliyoruz. Dolayısıyla gerçeğin deşerlerinin bölme yoluyla ondalıklı sayı ~~deşerlerinin~~ olarak elde edilemeyeceğini açıklar. ~~Bu~~ İrrasyonel sayıların yaklaşı ondalık deşerleri çeşitli nümerik (sayısal) metotlarla elde edilebilirler. Bazı çok köşelişilen irrasyonel sayıların ondalıklı sayı deşerleri:

$$\sqrt{2} = 1.414213562 \dots$$

$$\sqrt{3} = 1.732050808 \dots$$

$$\pi = 3.141592654 \dots$$

$$e = 2.718281828 \dots$$

başlamaktadır. Bu sayıların ondalık kısımlarında şu ana kadar herhangi bir tekrar keşfedilememiştir. İşte bu özellik rasyonel ve irrasyonel sayılar arasında farklılıktır. İrrasyonel sayılar acaba hangi oraklıkta sayı eksenini doldururlar? Bu soruyu şu teoremi yardımıyla hesaplayabiliriz.

Teoremler:

(a) İki rasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve paylarındaki rasyonel sayı 0 olmadıkça bölümleri yine bir rasyonel sayıdır.

(b-) İki irrasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü rasyonel veya irrasyonel olabilir.

(c-) Bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü irrasyoneldir.

(d-) İki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı mevcuttur.

(e-) İki irrasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta irrasyonel sayı mevcuttur.

İspat:

(a) Bu özellik rasyonel sayıların tanımından kolayca görülür.

(b-) Bunu birkaç örnekle gösterebiliriz.

$$\sqrt{5} + \sqrt{2} \text{ irrasyonel}$$

$$(\sqrt{5} + 1) + (3 - \sqrt{5}) = 4 \text{ rasyonel}$$

$$(\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 4) = 6 \text{ rasyonel}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = \text{irrasyonel}$$

$$\frac{3}{7} \sqrt{5} = \text{irrasyonel}$$

$$(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 4 \text{ rasyonel}$$

$$\sqrt{5}/2 \text{ irrasyonel}$$

$$\sqrt{2}/\sqrt{3} = 2 \text{ rasyonel}$$

(d) a ve b iki rasyonel sayı olsun. İddia ediyoruz ki a ile b arasında en az bir rasyonel sayı vardır. Bu sayı  $\frac{a+b}{2}$  olarak alınabilir. Çünkü  $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$  dir. (a)

gerekli bu sayı rasyonel bir sayıdır. Benzer şekilde a ile  $\frac{a+b}{2}$  arasında da bir rasyonel sayı (örneğin  $\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4}$ )

ve  $\frac{a+b}{2}$  ve b arasında da bir rasyonel sayı ( "  $\frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} = \frac{a+3b}{4}$  )

mevcuttur. Yani rasyonel sayıların oluşu



$$a \leq \frac{3a+b}{4} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+3b}{4} \leq b$$

sayı dışarı elde edilir. Bu işlem sonsuz çoklukta devam ettirilebilir ve sonuçta  $a$  ile  $b$  arasında kesin sonsuz çoklukta rasyonel sayı oluşturulmuş olur.

(c) ve (e) şıkları benzer şekilde gösterilebilir.

Bu teoremi sayesinide sayı ekseninin rasyonel ve irrasyonel sayılarla dolu olduğunu görürüz.

Not: Katsayıları rasyonel sayılar olan bir polinomun kökleri ~~da~~ sayılara cebirsel sayı, bu özellikle sahip olmayan sayılara da cebirsel olmayan (transcendent) sayı denir.

ÖRNEK: 1,  $\frac{1}{3}$ , 2,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{5}$  sayıları birer cebirsel sayıdır.

$x-1$ ,  $3x-1$ ,  $x^2-2$ ,  $x^2-7$ ,  $x^3-5$  polinomlarının kökleridir.

e,  $\pi$  cebirsel sayı değildir. Katsayıları rasyonel sayılar olan bir polinomun kökü şeklinde yazılamazlar.

Sonuç: Bütün rasyonel sayılar cebirsel, ama bütün irrasyonel sayılar cebirsel olmak zorunda değildir.

Bundan böyle sayı eksenini dolduran rasyonel ve irrasyonel sayıların bütününe reel (gerçek) sayılar diyoruz. Yani bir reel sayı ya rasyonel ya da irrasyoneldir. Bu sebeple sayı eksenine genelde reel eksen de denilir. Reel sayı kümesi  $\mathbb{R}$  ile göst.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sayı kümeleri arasındaki ilişkidir.

$a$  ve  $b$  gibi iki reel sayı verildiğinde üç durum söz konusudur.

(1) Sayı ekseninde  $a$ ,  $b$  nin solundadır. Bu durumu  $a < b$  ile gösterilir. Eğer  $a-b < 0$  ise bu durum söz konusu olur.

(2)  $a$  ile  $b$  aynı yerdedir. Bu durumu  $a=b$  ile göst. Bu durum son gerek ve yeter şart ise  $a-b=0$  olmasıdır.

(3)  $a$ ,  $b$ 'nin sağındadır. Bu durumda  $a > b$  yazılır.  $a-b > 0$  iken bu durumu ortaya çıkar.

Reel sayılarda eşitlik ve sıralama ile ilgili bazı özellikler asopidalar teoremleri ile ispatsız olarak verilebilir.

Teorem:  $a, b, c$  reel sayılar olsun. Asopidalar ifadeleri doğrudur.

$$(1) a=b \text{ veya } a \neq b$$

$$(2) a=a$$

$$(3) a=b \Rightarrow b=a$$

$$(4) a=b \text{ ve } b=c \text{ ise } a=c$$

$$(5) a=b \Leftrightarrow a \mp c = b \mp c$$

$$(6) a=b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c \quad (c \neq 0)$$

$$(7) a+b = b+a$$

$$(8) a+(b+c) = (a+b)+c$$

$$(9) a+0 = 0+a = a$$

$$(10) a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$(11) a \cdot b = b \cdot a$$

$$(12) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(13) a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(14) (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Teorem:  $a, b, c$  reel sayılar olsun.

$$(1) a=b, a < b \text{ veya } a > b \text{ dir. (üç hal özelliği)}$$

$$(2) a < b \text{ ve } c > 0 \text{ ise } a \cdot c < b \cdot c$$

$$(3) a < b \text{ ve } c < 0 \text{ ise } a \cdot c > b \cdot c$$

$$(4) a < b \text{ ve } c > 0 \text{ ise } a : c < b : c$$

$$(5) a < b \text{ ve } c < 0 \text{ ise } a : c > b : c$$

$$(6) a < b \text{ ve } b < c \text{ ise } a < c$$

$$(7) a < b \text{ ve } c < d \text{ ise } a \mp c < b \mp d \quad a-d < b-c$$

$$(8) a^2 < a \text{ ise } 0 < a < 1$$

$$(9) a^2 > a \text{ ise } a < 0 \text{ veya } a > 1 \text{ dir.}$$

Tanım:

$a$  ve  $b$  iki reel sayı ve  $a < b$  olsun.

$$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine  $a$  ve  $b$  sayıları arasında gösterilir. ile belirtilen açık aralık denir. ve  $(a, b)$  biçiminde gösterilir.

Benzer olarak

$$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

kümesime kapalı aralık denir.  $[a, b]$  ile göst.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

kümelere de yarı açık aralıklar denir.

Ponu:  $+\infty$  ve  $-\infty$  sembollerinin eklenmesi ile elde edilen

$$\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

kümesime genişletilmiş reel sayılar kümesi denir.

$\mathbb{R}_\infty$  kümesinde  $+\infty$  ve  $-\infty$  sembolleri ile yapılacak işlemleri

asgıdaş şekilde söyleyebiliriz.