

GİRİŞ: TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümün amacı daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan, birçoğu da bilinen, kavramları hatırlatmak ve gösterimlerde ortak bir dil yaratmaktır.

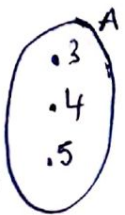
1. KÜMELER

Küme kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir, G. Cantor (1845-1918) tarafından kurulan kümeler kavramı matematiğe yeni ufuklar açmıştır.

İyi tanımlanmış (kesin olarak belirlenmiş) ortak bir özelliğe sahip olan veya olmayan nesnelerin veya varlıkların oluşturduğu topluluğa küme, kümeyi oluşturan nesnelerin her birine de bu kümenin bir elemanı denir. Kümeler, genellikle $A, B, C, X,$ gibi büyük harfler ile, kümelerin elemanları ise a, b, c, x, \dots gibi küçük harfler ile gösterilir. Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve \emptyset ile gösterilir. Bir a nesnenin bir A kümesine ait olduğunu belirtmek için " $a \in A$ " yazılır ve bir b nesnenin A kümesine ait değilse " $b \notin A$ " yazılır. Sonlu tane elemanı olan kümelere sonlu küme, aksi halde sonsuz küme denir. Sonlu bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir.

Kümelerin Gösterimi:

Venn Şeması Yöntemi



Liste Yöntemi

$$A = \{3, 4, 5\}$$

Ortak Özellik Belirleme Yöntemi

$$A = \{x / 3 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{Z}\}$$

Elemanları aynı olan kümelere esit kümeler denir, $A=B$ ile göst.
Eleman sayıları aynı olan kümelere ise denk kümeler denir, $C \equiv D$ ile göz.
Esit kümelerin denk olduğu açıktır, ancak denk olan kümelere
esit olması gerekmez. Örneğin $A=\{a,b,c,d,e\}$ ve $B=\{1,2,3,4,5\}$
kümeleri denk oldukları halde eşit değildirler.

Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de bir elemanı
oluyorsa A kümesine B kümesinin bir alt kümesi denir ve
 $A \subset B$ biçiminde gösterilir. Bir B kümesinin kendisi hariç tüm
alt kümelere özalt küme (has alt küme) denir ve A, B
kümesinin özalt kümesi ise $A \subset B$ gösterimi kullanılır.

$A=\{1,2,3\}$ kümesinin alt küme sayısı: $2^n \Rightarrow 2^3=8$ olur ve bu alt
kümeler $\{\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$ şeklindedir.

Bir kümenin özalt küme sayısı ise n kümenin eleman
sayısı olarak üzere $2^n - 1$ tenedir.

Alt küme tanımlarından hareketle

- 1) \emptyset küme, her kümenin bir alt kümesidir.
- 2) Her küme, kendisinin bir alt kümesidir. ($A \subset A$)
- 3) $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A=B$ dir.
- 4) $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

İzermeye işlemi yapılan (ve yapılabilecek) tüm kümeleri alt
küme olarak kapsayan, yeterince geniş kümeye evrensel küme
denir ve bu küme genellikle E ile gösterilir. Tanımdan, her
 A kümesi için $A \subset E$ olduğu açıktır.

A ve B iki küme olarak üzere, A ve B kümelerinin
kesişimi (koreksiyon) $A \cap B$ ile gösterilir ve

$$A \cap B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine ayrık kümeler denir.
 A ve B kümelerinin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve

$$A \cup B = \{ x / x \in A \text{ veya } x \in B \}$$

olarak tanımlanır.

A kümesinin elemanı olduğu halde B kümesinin elemanı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye B kümesinin A kümesine göre tamamlayıcı veya A kümesinin B kümesine göre farkı denir,
 $A - B$ veya A/B ile gösterilir ve

$$A - B = A/B = \{ x / x \in A \text{ ve } x \notin B \}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak, E evrensel küme olduğu üzere $E - A$ kümesine A kümesinin tamamlayıcı denir. A kümesinin "değil" olarak da ifade edilir A' ile gösterilir.

$$A' = \{ x / x \notin A \text{ ve } x \in E \} = \{ x / x \notin A \}$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $A - B = A \cap B'$ olduğu görülür.

Küme özelliklerini şu şekilde sıralayabiliriz:

1. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A - A = \emptyset$
2. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A - B \neq B - A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A - \emptyset = A$
4. $A \cap E = A$, $A \cup E = E$, $A - E = \emptyset$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. $A \subset B$ ise $A \cap B = A$ ve $A \cup B = B$
7. $A \cup B = \emptyset$ ise $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 9) $s(A \cup B) = s(A) + s(B - A)$, $s(B - A) = s(B) - s(A \cap B)$
 $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$$10. (A')' = A, \quad A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = E$$

$$11. \emptyset' = E, \quad E' = \emptyset$$

$$12. A \subset B \text{ ise } B' \subset A'$$

$$13. (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$14. A \subset (A \cup B), \quad B \subset (A \cup B), \quad (A \cap B) \subset A, \quad (A \cap B) \subset B$$

$$15. A \subset B \text{ ise } (A \cup C) \subset (B \cup C) \text{ ve } (A \cap C) \subset (B \cap C)$$

A_1, A_2, \dots, A_n kümelerinin kesişimi veya birleşimi

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k \text{ ve } A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

ile gösterilir ve

$$\bigcap_{k=1}^n A_k = \{x / 1 \leq k \leq n \text{ özelliklerinden her } k \text{ için } x \in A_k\}$$

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{x / 1 \leq k \leq n \text{ özelliklerinden en az bir } k \text{ için } x \in A_k\}$$

olarak tanımlanır.

A_1, A_2, \dots, A_n kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ kümesine kümeler ailesi denir ve genellikle

$$\mathcal{A} = \{A_k\}_{k \in \{1, 2, \dots, n\}}$$

biçiminde gösterilir. Yukarıdaki $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesine indeks kümesi,

A_k kümesine k ile indekslenmiş küme ve k ye de A_k

kümesinin indeksi denir. İndeks kümesi burada olduğu gibi

sonlu bir küme olabileceği gibi keyfi bir küme de olabilir.

Örneğin indeks kümesi keyfi bir I kümesi olarak alırsak

$\{A_k\}_{k \in I}$ kümeler ailesi veriliyorsa bu ailenin kesişimi

ve birleşimi $\bigcap_{k \in I} A_k$ ve $\bigcup_{k \in I} A_k$ biçiminde gösterilir.

11. / 2020.

A ve B herhangi iki küme olsun. Birinci bileşenleri A kümesinden ikinci bileşenleri B kümesinden seçilerek oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine A ve B kümelerin kartezyen çarpımı (dik çarpımı) denir, bu küme $A \times B$ ile göst.

Bu tanıma göre

$$A \times B = \{ (a, b) / a \in A \text{ ve } b \in B \}$$

Örneğin, $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2\}$ ise

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2) \} \text{ dir.}$$

$A \times B \neq B \times A$ dir. $A \times A$ yerine A^2 gösterimi kullanılır.

$$A^2 = \{ (x, y) / x, y \in A \}$$

Daha genel olarak A_1, A_2, \dots, A_n kümelerinin kartezyen çarpımı

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n \}$$

biçiminde ifade edilir. Bir A kümesinin kendisiyle n defa

çarpımı da

$$A \times A \times A \times \dots \times A = A^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) / a_1, a_2, \dots, a_n \in A \}$$

olur. $(x, y), (u, v) \in A \times B$ olmak üzere

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u, y = v$$

dir, yani sıralı ikililerin eşitliği bileşen bileşene eşitlik anlamına gelmektedir. Buna göre

$$1. s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$$

$$2. A \times (B \times C) = (A \times B) \times C,$$

$$3. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$