FONKSİYONLARDA LİMİT KAVRAMI

Tanım:

$A \subset \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\delta > 0$ sayısına karşılık $|x-p| < \delta$ koşulu gerçeklemek üzere en az bir $x \in A$, $x \neq p$ noktası varsa p noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir.

Tanım:

$A \subset \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}$ noktası ~~bir~~ A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı, $0 < |x-p| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x \in A$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa x noktası p noktasına yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonunun limiti L 'dir denir ve

$x \to p$ iken $f(x) \to L$ veya $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$

ile gösterilir.

Teorem;

$f: A \to \mathbb{R}$ ve p noktası A kümesinin bir yığılma noktası ise, f, p de yalnızca bir limite sahiptir.

CamScanner ile tarandı

ÖRN:

$f(x)=2x+1$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$x=1.9$ $f(x)=4.8$
$x=1.91$ $f(x)=4.82$
$x=1.95$ $f(x)=4.9$
$x=1.99$ $f(x)=4,98$
$x=1.999$ $f(x)=4.998$

$x=2.1$ $f(x)=5.20$
$x=2.08$ $f(x)=5.16$
$x=2.05$ ise $f(x)=5.10$
$x=2.01$ ise $f(x)=5.02$
$x=2.001$ $f(x)=5.002$

Görüldüğü gibi x 2 ye yaklaştığında $f(x)$ de 5 e yaklaşmaktadır. Yani x-ler 2-nin bir komşuluğunda bulunurken $f(x)$-ler de 5-in bir komşuluğunda bulunmaktadır.

~~2-nin bir komşuluğu~~

5-in bir komşuluğu $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$ olsun.

$5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-5 < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-5| < \varepsilon$ (komşuluk tanımı)

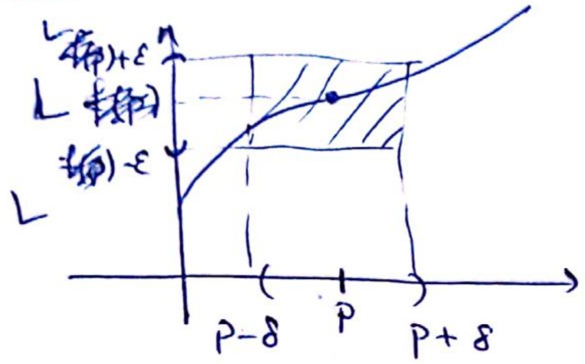
$5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon \Rightarrow 5-\varepsilon < 2x+1 < 5+\varepsilon$

$-\varepsilon < 2x-4 < \varepsilon \Rightarrow |2x-4| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$

yazılır. Yani $f(x)$-in 5 in ε komşuluğunda olması için 2nin $\varepsilon/2$ komşuluğunda alınması gerekir. $\varepsilon/2=\delta$ denilirse $|x-2|<\delta$ iken $|f(x)-5|<\varepsilon$ sağlanır.

CamScanner ile tarandı

Limit Tanımı:



$|x-p| < \delta$ iken

$|f(x) - L| < \varepsilon$

olmasıdır.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \; x \neq 1 \\ 1 & , \; x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

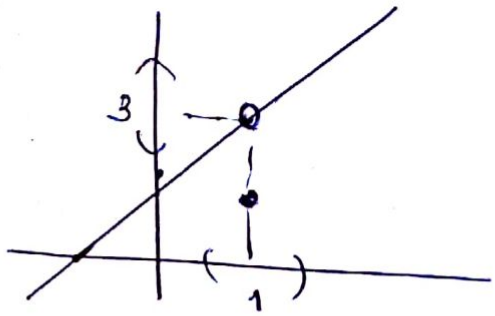
$f(1.2) = 3.4$

$f(1.1) = 3.2$

$f(1.0001) = 3.002$

$f(0.9) = 2.8$

$f(0.999) = 2.998$



1 in bir komşuluğunu aldığımızda fonksiyonların değerleri 3-ün bir komşuluğuna düşecektir.

Yani $|x-1| < \delta$ iken $|f(x)-3| < \varepsilon$ olacaktır.

Bu durumda $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ bulunur.

(*) Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasında bir ilişki olmak zorunda değildir.

CamScanner ile tarandı

ÖRN:

$\lim_{x \to 1} (2x-5) = -3$ old. göst.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $|x-1| < \delta$ iken $|f(x)+3| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunmalıdır.

$|f(x)+3| < \varepsilon$ olabilmesi için

$$|2x-5+3| < \varepsilon \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 2.|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \varepsilon/2 \text{ olmalıdır.}$$

Yani $\delta = \varepsilon/2$ olarak seçilirse

$\forall \varepsilon > 0$ için $|x-1| < \delta = \varepsilon/2$ iken $|f(x)+3| < \varepsilon$ sağlanır. $\lim_{x \to 1} 2x-5 = -3$ bulunur.

ÖRN.

$\lim_{x \to -1} (3x+4) = +1$ old. göst.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $|x+1| < \delta$ iken $|f(x)-1| < \varepsilon$ o.ş. $\exists\, \delta > 0$ sayısı bulunabilmelidir.

$$|f(x)-1| < \varepsilon \Rightarrow |3x+4-1| < \varepsilon \Rightarrow |3x+3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x+1| < \varepsilon/3$$

O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $|x+1| < \delta = \varepsilon/3$ iken $|f(x)-1| < \varepsilon$ olur. $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$ bulunur.

CamScanner ile tarandı

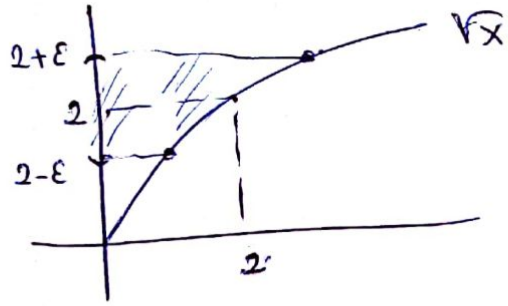
ÖRN:

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=4$ için limitinin var olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=2$$

$\varepsilon>0$ olsun. $|x-2|<\delta$ iken $|f(x)-2|<\varepsilon$ olacak şekilde $\exists\,\delta>0$ var olmalıdır.

$$|\sqrt{x}-2|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}<\varepsilon$$



$$\sqrt{x}<2+\varepsilon$$

$$|x-4|<\varepsilon\cdot(\sqrt{x}+2)$$

$$<\varepsilon\,(2+\varepsilon+2)=4\varepsilon+\varepsilon^2$$

bulunur.

Yani $\forall\varepsilon>0$ için $|x-4|<\delta=\varepsilon^2$ olarak seçersek $|f(x)-2|<\varepsilon$ şartını sağlar. $\lim_{x\to 2} f(x)=2$ olur.

ÖRN:

$\lim_{x\to 1} x^2+3x=4$ old. göst.

$\varepsilon>0$ olsun. $|x-1|<\delta$ iken $|x^2+3x-4|<\varepsilon$ o.ş. $\exists\,\delta>0$ olmalıdır.

$|x^2+3x-4|<\varepsilon \Rightarrow |x+4|.|x-1|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta>0$ bulalım.

$|x-1|<1$ olsun. $\Rightarrow \underset{+5}{-1}<\underset{+5}{x-1}<\underset{+5}{1} \Rightarrow 4<x+4<6$

$\Rightarrow |x+4|<6$ yazabiliriz.

$\underbrace{|x+4|}_{<6}.|x-1|<\varepsilon \Rightarrow 6|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon/6$ olacağından

$\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{6}\right)$ şeklinde seçilebilir.

CamScanner ile tarandı

6

Buna göre $\forall \varepsilon > 0$ için $|x-1| < \varepsilon/6$ iken $|f(x) - 4| < \varepsilon$ şartını sağlar.

CamScanner ile tarandı

ÖRN:

$\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$ limiti için $\varepsilon = 1$ olduğunda bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz.

$\varepsilon > 0$ olsun. $|x-5| < \delta$ iken $|\sqrt{x-1} - 2| < \varepsilon \overset{1}{=}$ olmalı.

$|\sqrt{x-1} - 2| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{x-1} - 2| < 1$

$1 < \sqrt{x-1} < 3 \Rightarrow 1 < x-1 < 9 \Rightarrow 2 < x < 10$

ise bu şart sağlanır.

CamScanner ile tarandı

7

(2, 10) aralığında $x = 5$ noktası da olduğundan bu

durumu şöyle düzenleyebiliriz.

∀ $|x-5| < 3$ için $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ olur. Bu durumda

$\delta = 3 > 0$ olarak buluruz.

CamScanner ile tarandı

ÖRN:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-5} = \frac{3}{4}$$ old. göst.

$\varepsilon>0$ için $|x-3|<\delta$ iken $\left|\frac{x}{x^2-5} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ o.ş. $\delta>0$ bulunabilmelidir.

$$\left|\frac{4x-3x^2+15}{4.(x^2-5)}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(3-x)(3x+5)}{4.(x^2-5)}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{|x-3|.|3x+5|}{4.|x^2-5|} < \varepsilon$$ olabilmesi için δ ne olmalıdır.

$|x-3|<\delta<1$ olsun. $-1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4$

$\Rightarrow 11<3x+5<17$

$\Rightarrow \underline{\underline{-1}} < x^2-5 < 11$

negatif bölge olduğundan δ büyük geldi.

$|x-3|<\delta=1/2$ seçersek

CamScanner ile tarandı

$|x-3|<\delta<1/2 \Rightarrow 5/2 < x < 7/2 \Rightarrow 25/2 < 3x+5 < 31/2$

$\Rightarrow 5/4 < x^2-5 < 29/4$

$$\Rightarrow \frac{|x-3|\,|3x+5|}{4.|x^2-5|} < \frac{\delta.\ 31/2}{4.\ 5/4} = \frac{31\delta}{10} = \varepsilon$$

$\delta = \frac{10\varepsilon}{31} > 0$ olarak seçilirse

$|x-3|<\delta$ olduğunda $\left|f(x)-\frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ o.ş. en az

bir $0<\delta<1/2$ sayısı vardır.

Örn:

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=c$ sabit fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ 'dir.

Göst.

$\varepsilon>0$ olsun. $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-c|<\varepsilon$ ~~olacak~~ o.ş. $\delta>0$ var olmalı.

$|f(x)-c|<\varepsilon \Rightarrow |c-c|<\varepsilon$ $0<\varepsilon$.

bu şartın sağlanması δ ya bağlı değildir. Yani δ

ne seçilirse seçilsin $|f(x)-c|<\varepsilon$ sağlanacaktır.

Örn:

$m\neq 0$ o.ü. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=mx+n$ fonksiyonu için

$\lim\limits_{x\to a} mx+n = m.a+n$ dır. Göst.

$\varepsilon>0$ olsun. $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-ma-n|<\varepsilon$ o.ş. $\delta>0$?

$|mx+\cancel{n}-ma-\cancel{n}|<\varepsilon \Rightarrow |m|.|x-a|<\delta \Rightarrow |x-a|<\varepsilon/|m|$

$\delta=\varepsilon/|m|>0$ seçilirse $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-ma-n|<\varepsilon$

olur.

CamScanner ile tarandı

Teorem:

$A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olsun.

$\lim_{x \to a} f(x)$ ve $\lim_{x \to a} g(x)$ limitleri var ise aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) \mp g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \mp \lim_{x \to a} g(x)$

(2) $\lim_{x \to a} (\lambda f(x)) = \lambda . \lim_{x \to a} f(x)$

(3) $\lim_{x \to a} (f(x) . g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$

(4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

ispat:

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ olsun. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ olsun. $|x-a| < \delta_1$ iken $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ o.ş. $\delta_1 > 0$ var.

$\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ olsun. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ olsun. $|x-a| < \delta_2$ iken $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ o.ş. $\delta_2 > 0$ var.

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ alalım.

$\varepsilon > 0$ olsun. $|x-a| < \delta$ iken $|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon$ o.ş. $\delta > 0$ var olmalı.

$$|f(x) - L_1 + g(x) - L_2| < \underbrace{|f(x) - L_1|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|g(x) - L_2|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

bulunur.

CamScanner ile tarandı

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \iff \forall \varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta_1$ iken $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ sağlanır.

$\lim\limits_{x\to a} \left(\lambda . f(x)\right) = \lambda . L_1$ old. göst.

$|x-a| < \delta$ iken $|\lambda f(x) - \lambda L_1| < \varepsilon$ o.ş. $\delta > 0$?

$$|\lambda f(x) - \lambda L_1| = |\lambda| . |\underbrace{f(x) - L_1}_{<\varepsilon}| < |\lambda| . \varepsilon \text{ dur.}$$

Önerme:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ise $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x)| < 1 + |L|$ o.ş. bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

İspat:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. $\delta > 0$ vardır.

$\forall \varepsilon > 0$ için geçerli olduğundan $\varepsilon = 1$ için de geçerlidir.

$$|f(x) - L| < 1 \Rightarrow -1 < f(x) - L| < 1$$

$$L - 1 < f(x) < 1 + L \Rightarrow |f(x)| < |1 + L|$$

$$\Rightarrow |f(x)| < |1| + |L| = 1 + |L|$$

yazılır.

CamScanner ile tarandı

3 $\lim_{x\to a} f(x)=L_1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ için $|x-a|<\delta_1$ iken
$|f(x)-L_1|<\varepsilon$ o.ş. $\delta_1>0$ var.

$\lim_{x\to a} g(x)=L_2 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ için $|x-a|<\delta_2$ iken
$|f(x)-L_2|<\varepsilon$ o.ş. $\delta_2>0$ vardır.

$\lim_{x\to a} f(x)=L_1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ için $|x-a|<\delta_3$ iken
$|f(x)|<1+|L_1|$ o.ş. $\delta_3>0$ vardır.

$\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ seçersek

$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=L_1.L_2$ olması için $|x-a|<\delta$ iken

$|f(x).g(x)-L_1L_2|<\varepsilon$. o.ş. $\delta>0$ var mıdır.

$$|f(x).g(x)-L_1.L_2|=|f(x).g(x)-f(x).L_2+f(x).L_2-L_1L_2|$$

$$=\left|f(x)[g(x)-L_2]+L_2[f(x)-L_1]\right|$$

$$\leq \underbrace{|f(x)|}_{1+|L_1|}.\underbrace{|g(x)-L_2|}_{<\varepsilon}+|L_2|.\underbrace{|f(x)-L_1|}_{<\varepsilon}$$

$<\varepsilon(1+|L_1|)+|L_2|.\varepsilon=\varepsilon(1+|L_1|+|L_2|)$ bulunur.

4 ÖDEV

CamScanner ile tarandı

ÖRN:

$$\lim_{x\to 1} (2x^2 - 3x + 5) = 4$$

$$\lim_{x\to -2} (x^3 + 7x^2 + x - 4) = -6$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 + x - 4}{3x - 2} = \frac{3}{2}$$

Tanım:

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}$ olsun. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için bir $M = M(\varepsilon) > 0$ sayısı $\forall x > M$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ gerçeklenmek üzere varsa $x \to \infty$ iken f fonksiyonunun limiti L'dir denir.

ÖRN:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ old. göst.

$\varepsilon > 0$ alalım. $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$

$x > \frac{1}{\varepsilon}$ veya $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ olur.

$M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ seçersek $\forall x > M$ için $|f(x) - 0| < \varepsilon$ olur.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ olur.

ÖRN:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ old. göst.

$\varepsilon > 0$ alalım. $\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} < \frac{1}{|x|} < \varepsilon$

$|x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$ veya $x < -\frac{1}{\varepsilon}$

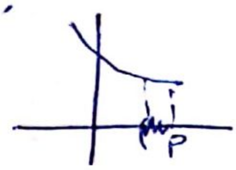
$M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ için $\forall x > M$ olduğunda $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$ sağlanır.

Tanım:

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $p \in A$ noktasının $(p-\delta, p+\delta)$ komşuluğunda tanımlı olsun.

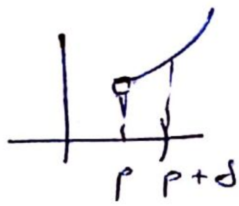
a) $\forall \varepsilon > 0$ için $p - \delta < x < p$ iken $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ o.ü. $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa L_1 sayısına $f(x)$-in p noktasındaki soldan limiti denir.

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L_1 \quad \text{i.g.}$$



b) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $p < x < p + \delta$ iken $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ o.ü. $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa L_2 sayısına $f(x)$-in p noktasındaki sağdan limiti denir.

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L_2$$



Teorem:

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $p \in A$ olsun. $\lim_{x \to p} f(x) = L$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) = L \quad \text{olmasıdır.}$$

ÖRN:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\varepsilon} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(0 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty$$

limit yoktur.

CamScanner ile tarandı

ÖRN:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x>2 \text{ ise} \\ 2x-3, & x\leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(2-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0} 2(2-\varepsilon)-3=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(2+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0} 2+\varepsilon-1=1$$

limit vardır.

ÖRN:

$f(x)=3^{1/x}$ ise $\lim_{x\to 0} f(x)=?$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(0+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0} 3^{1/\varepsilon}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(0-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0} 3^{-1/\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3^{1/\varepsilon}}=0$$

ÖRN:

$$f(x)=2^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(-1+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0} 2^{\frac{-1+\varepsilon}{\cancel{-1}+\varepsilon\cancel{+1}}}=\lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-1/\varepsilon}\cdot 2^{1}=0$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(-1-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0} 2^{\frac{-1-\varepsilon}{\cancel{-1}-\varepsilon\cancel{+1}}}=\lim_{\varepsilon\to 0} 2^{1/\varepsilon}\cdot 2^{1}=\infty$$

CamScanner ile tarandı