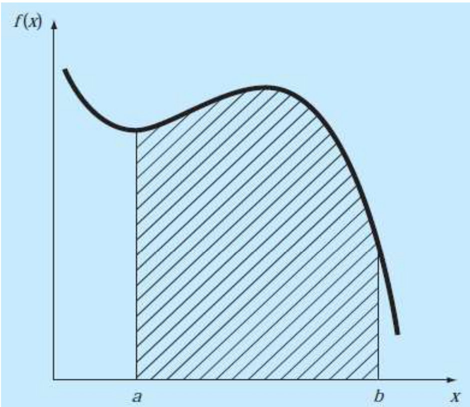
10. SAYISAL İNTEGRAL

Sözlük anlamına göre *integrasyon* birleştirme, parçaları bir araya getirme, bütünü oluşturma anlamına gelmektedir. Matematiksel olarak integrasyon;

$I = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde gösterilmekte ve $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ ile $x = b$ sınırları arasında x bağımsız değişkenine göre integralini ifade etmektedir. İntegralin sembolü de büyük harf S *(summation=toplama)* ‘den esinlenerek türetilmiştir. Yukarıdaki eşitlikte integrali alınan $f(x)$ fonksiyonuna *integrand* denir. Şekilde integrasyon kavramının grafiksel ifadesi görülmektedir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun integrali, $x = a$ ve $x = b$ sınırları arasında fonksiyon ile *x* ekseni arasında kalan alana karşılık gelmektedir.



10.1. Newton-Cotes İntegrasyon Formülleri İle Sayısal İntegral

Newton-Cotes formülleri en yaygın olarak kullanılan sayısal integrasyon formülleridir. Bu formüller karmaşık fonksiyonlar veya tablolanmış veri değerleri yerine integrali kolay olan yaklaşık fonksiyonların kullanılması esasına dayanır. Matematiksel olarak bu durum;

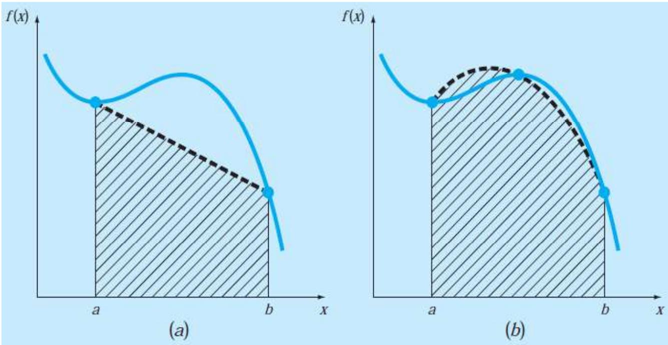
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

şeklinde ifade edilir. Burada $fn(x)$, integrali alınmak istenen esas fonksiyonun yerine konulacak olan ve

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

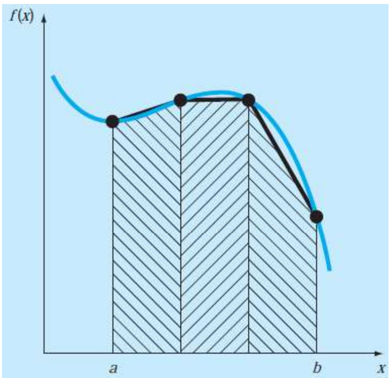
şeklinde *n*. dereceden bir polinomdur.

Örneğin aşağıdaki Şekil a da karmaşık bir fonksiyona birinci dereceden bir polinomla (bir doğru ile) yaklaşılması durumundaki ve, Şekil b ‘de ise ikinci dereceden bir polinomla (bir parabol ile) yaklaşılması durumundaki integrasyonlar görülmektedir.



(a) Düz bir doğru ve
(b) Bir parabol altındaki alan yardımıyla integral hesabı

İntegrale sabit uzunluktaki dilimler boyunca parça parça bir seri polinom kullanılarak da yaklaşılabilir. Örneğin aşağıdaki şekilde karmaşık bir fonksiyonun $x = a \; ve \; x = b$ aralığındaki integraline üç doğrusal fonksiyondan oluşan dilimler ile yaklaşılması durumu görülmektedir. Aynı amaç için daha yüksek dereceden polinomlar da kullanılabilir.



Üç doğru parçası altında kalan alan yardımıyla integrale yaklaşım.

10.1.1. Polinomlarla Sayısal İntegral, Yamuk (Trapez) Kuralı

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi; $y = f(x)$ eğrisinin altında $x_0 \leq x \leq x_n$ aralığındaki alanı; $n = \frac{x_n - x_0}{h}$ dilime bölerek elde edilen her bir dilimdeki $y = f(x)$ eğri parçasını bir doğru parçası olarak alırsak dilim yamuğa benzeyeceğinden alan;

1. Dilimin alanı $I_1 = \frac{h}{2}(y_1 + y_0)$ yamuğun alanı.

2. Dilimin alanı $I_2 = \frac{h}{2}(y_2 + y_1)$

n. Dilimin alanı $I_n = \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$

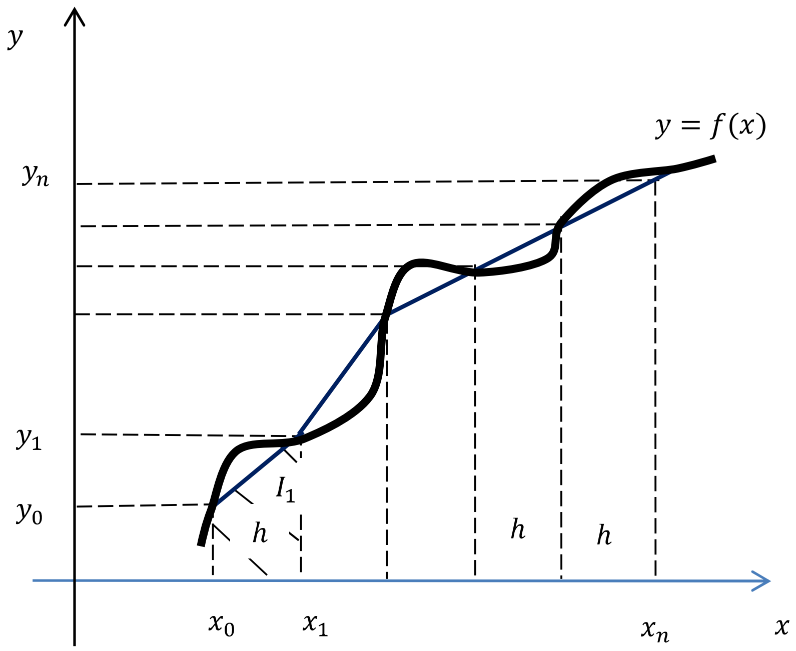
$y = f(x)$ eğrisinin altında $x_0 \leq x \leq x_n$ aralığındaki alan n adet dilimin alanına eşit olduğundan, yani

$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y(x)dx$

$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$

$I = \frac{h}{2}(y_1 + y_0) + \frac{h}{2}(y_2 + y_1) + \cdots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$

$$\boldsymbol{I = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n)} \qquad (1)$$



Her dilimin alanı yamuğun alanından küçük de olsa farklı olduğundan (1) denklemindeki ifade hata içeren bir ifadedir. Bu hatayı küçültmek için h aralığı küçültülür, yani n dilim sayısı artırılır. Bu yönteme **Yamuk kuralı** denilir. Burada $y = f(x)$ yerine h aralığındaki doğru parçası (1. dereceden polinom) alınmıştır.

Yamuk kuralının farklı bir yorumu aşağıdaki eşitlikten *n*. dereceden polinomun, 1. Dereceden doğru denklemi olması durumuna karşılık gelir;

$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$

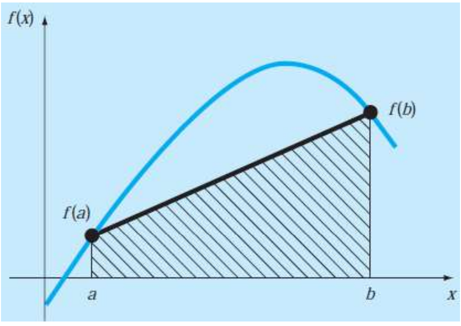
Eğri uydurma konusundan hatırlanacağı üzere doğru denklemi;

$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

şeklindedir. Bu bağıntı integral ifadesindeki integrand yerine yazılır ve a ve b sınırları arasında integral alınırsa, bu doğru altında kalan alan;

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right] dx$$

şeklinde elde edilir.



Şekil Trapez kuralının grafiksel açılımı

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.x + f(a) - \frac{a.f(b)-a.f(a)}{b-a}$$

$$f_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.x + \frac{b.f(a)-a.f(a)-a.f(b)+af(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.x + \frac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a}$$

Bu ifadenin $x = a$ ve $x = b$ aralığında integrali alınırsa

$$I = \int_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.x + \frac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a}\right] dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\frac{x^2}{2} + \frac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a}.x\Big|_a^b$$

$$I = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\frac{(b^2-a^2)}{2} + \frac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a}(b-a)$$

$$(b^2 - a^2) = (b-a).(b+a)$$

$$I = [f(b)-f(a)].\frac{(b+a)}{2} + b.f(a) - a.f(b)$$

$$I = \frac{b.f(b)-b.f(a)+a.f(b)-a.f(a)}{2} + \frac{2b.f(a)-2a.f(b)}{2} = \frac{f(b)[b+a-2a]+f(a)[-b-a+2b]}{2}$$

$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)]}{2}$ şeklinde elde edilir.

Elde edilen bu bağıntı ***yamuk formülü*** olarak bilinir. Geometrik olarak yamuk kuralı şekildeki $f(a)$ ve $f(b)$ noktalarını birleştiren doğru altında kalan alana karşılık gelmektedir. Yamuk kuralının doğruluğunu artırmanın bir yolu a ‘dan b ‘ye kadar olan integral aralığını belirli sayıda dilimlere bölmek ve her bir dilime yamuk kuralını uygulamaktır. Her bir dilimin alanı toplanarak aralık boyunca integral hesaplanmış olur. Bu şekilde elde edilen formül ***çok dilimli yamuk kuralı*** veya kısaca ***yamuk kuralı*** olarak adlandırılır.

Yandaki şekilde yamuk kuralının genel formatı ve kullanılan notasyon görülmektedir. İntegral aralığı boyunca n+1 tane eşit aralıklarla yerleştirilmiş nokta (x_0, x_1, x_2, ..., x_n) vardır. Dolayısıyla eşit genişlikli n adet dilim söz konusudur. Buna göre bir dilimin genişliği,

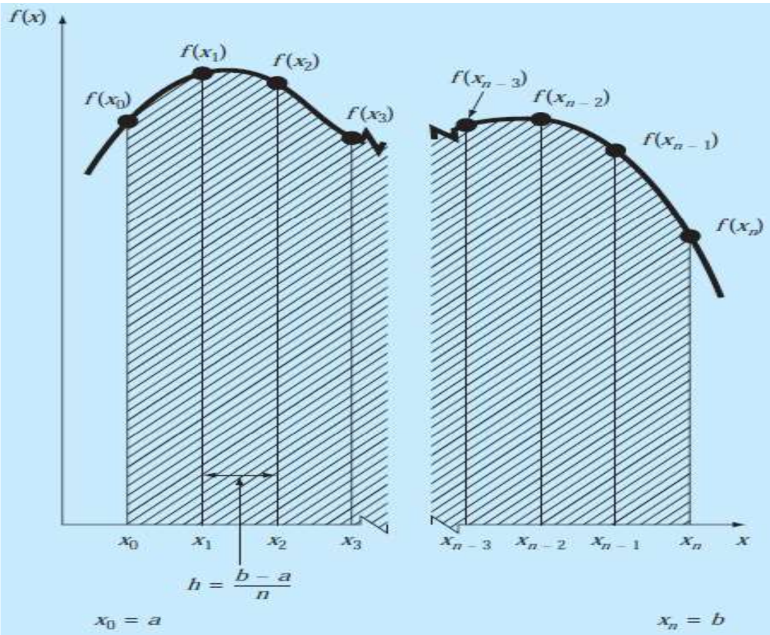
$h = \frac{b-a}{n}$ $\{x_0 = a,\ \ x_n = a\}$ olmaktadır.

Eğer $a\ ve\ b$ sırasıyla x_0 ve x_n olarak gösterilirse, toplam integral;

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I \cong h.\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h.\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h.\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

şeklinde yazılabilir.



Yamuk kuralı her bir integral için uygulanırsa her bölme aralığı eşit h ile ifade edilerek;

elde edilir. Terimler gruplanırsa;

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2.\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

yamuk kuralı için alternatif bir ifade $h = \frac{b-a}{n}$ ifadede yerine yazılırsa;

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+2.\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2.n}$$

şeklinde elde edilebilir. Yukarıdaki diğer yöntemle elde edilen ifadenin aynısıdır.

Örnek 1.

Aşağıdaki fonksiyonun $a = 0$ ve $b = 0.8$ aralığındaki integralini hesaplamak için iki dilimli yamuk kuralı uygulayın

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

İntegralin analitik değeri $I = 1.640533$ olduğuna göre gerçek hata oranını bulun.

$n = 2$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{2} = 0.4$, dilimler 0 dan başlayarak 0.4 adımlarla ilerler.

$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$

$f(x_1) = f(0.4) = 2.456$

$f(b) = f(x_2) = f(0.8) = 0.232$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0)+2.\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2.n} = (0.8-0)\frac{0.2+2*(2.456)+0.232}{2*2} = 1.0688$$

$$\varepsilon = \left|\frac{1.640533-1.0688}{1.640533}\right|.100\% = 34.9\%$$

n	h	I	$\varepsilon t(\%)$
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

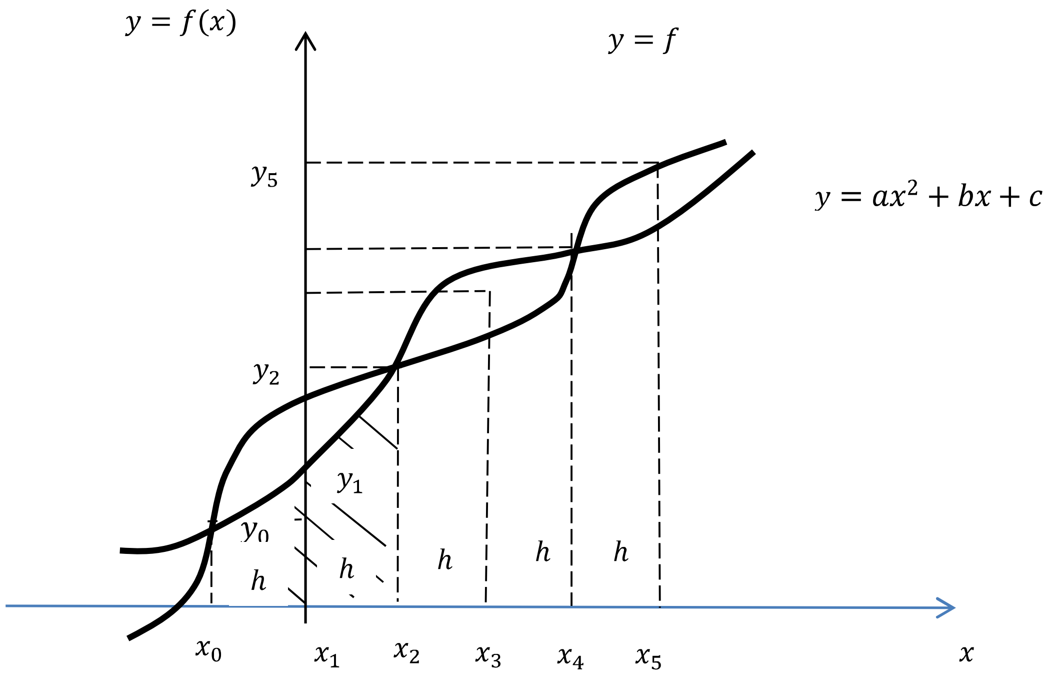
Yukarıdaki örneğin üç-elemanlıdan 10-elemanlı duruma kadar tekrarlanmasıyla elde edilen sonuçlar tablo da özetlenmiştir. Eleman sayısındaki artışla birlikte hata oranındaki düşüşe dikkat edilmelidir.

10.1.2. Simpson Kuralı

Yamuk kuralını daha ince dilimlerle uygulamak integrasyonu iyileştirmenin bir yolu olmakla birlikte, bir diğer yol da, integrasyonda doğrusal elemanlar kullanmak yerine daha yüksek dereceden polinomların kullanılmasıdır. Aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi eğer *f*(*a*) ve *f*(*b*) noktaları arasında (*a*, *b*) aralığını eşit iki parçaya bölen üçüncü bir nokta elde edilebilirse, bu üç nokta bir parabol ile; benzer şekilde eşit aralıklı dört nokta elde edilebilirse bu noktalar üçüncü dereceden bir fonksiyon ile birleştirilebilir. Bu polinomların integralde kullanılmasıyla elde edilen formülasyonlar ***Simpson kuralı*** olarak adlandırılır. İki çeşit simpson kuralı tanımlanır;

10.1.2.1. 1/3 Simpson Kuralı

Eğer doğru parçası yerine $y = ax^2 + bx + c$ alınırsa $f(x)$'e biraz daha uygun yaklaşım yapılmış olacağından hata küçük olacaktır.



$x = x_0 = -h$ için $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ $y_0 = ah^2 - bh + c$

$x = x_1 = 0$ için $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$ $y_1 = c$

$x = x_2 = h$ için $y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$ $y_2 = ah^2 + bh + c$

denklemlerinden;

$a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$ $b = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$ $c = y_1$

Bulunduk tan sonra; $x_0 \le x \le x_2$ aralığında;

$I_1 = \int_{x_0}^{x_2} y(x)dx \cong \int_{x_0=-h}^{x_1=h}(ax^2 + bx + c)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\,|_{-h}^{h}$

$I_1 = (\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch) - (-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch)$

$I_1 = \frac{2a}{3}h^3 + 2ch$

a ve c yerlerine konulursa;

$I_1 = \frac{2h^3}{3}\left(\frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)\right) + 2h.y_1$

$\boldsymbol{I_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$ **bu eşitliğe 1/3 Simpson kuralı da denilir.**

$2h$ genişliğindeki $x_2 \leq x \leq x_4$ aralığında aynı kuralı uygularsak;

$I_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$

Genelleştirirsek; $x_{n-2} \leq x \leq x_n$

$I_n = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$ olur o halde;

$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} y(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} y(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} y(x)dx$

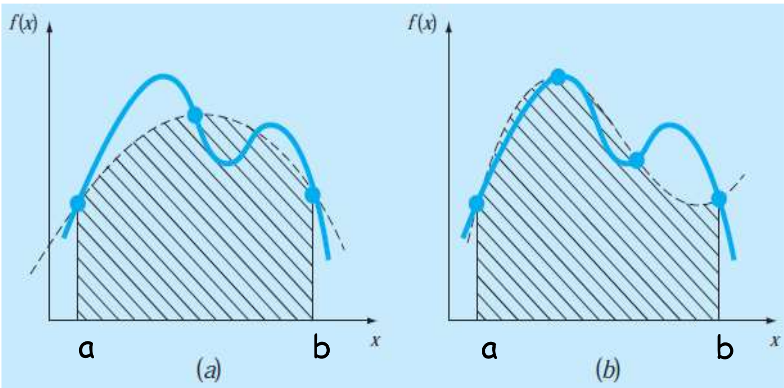
$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$

$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$

$\boldsymbol{I = \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + \ y_n}$

eşitliğiyle **1/3 Simpson kuralının genel formu** elde edilir.

Bir başka yöntemle aynı kurallar elde edilebilir.



a)Simpson'un 1/3 kuralının grafik gösterimi, üç noktayı birleştiren bir parabolün altındaki alanı kapsar.

b)Simpson'un 3/8 kuralının grafik gösterimi, dört noktayı birleştiren bir kübik polinomun altındaki alanı kapsar.

Aşağıdaki eşitlikte ikinci dereceden bir polinomun kullanılması durumunda 1/3 Simpson kuralı elde edilir.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

Eğer $a\ ve\ b,\ x_0\ \ ve\ \ x_2$ olarak gösterilirse, $f_2(x)$ fonksiyonu Lagrange-interpolasyon polinomu ile ifade edilerek integrasyon aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir.

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)} f(x_2)\right] dx$$

İntegrasyon ve ardından düzenleme işleminden sonra aşağıdaki bağıntı elde edilir;

$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$ burada $h\ = (b-a)/2$ şeklindedir.

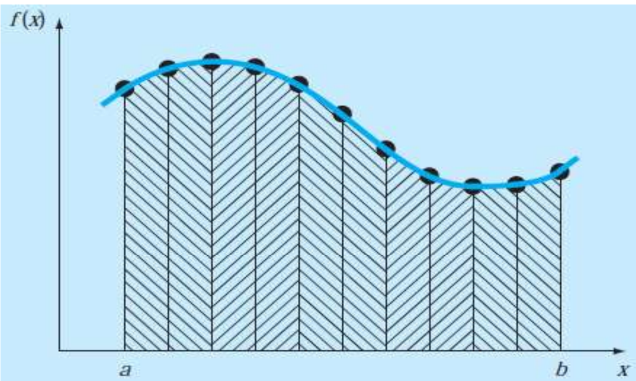
Bu bağıntı ***1/3 Simpson kuralı*** olarak adlandırılır. 1/3 adlandırması bağıntıdaki 1/3 katsayısından kaynaklanmaktadır. Bu son bağıntıda $h\ = (b-a)/2$ değeri yerine yazılırsa bağıntı;

$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$ şeklinde olur.

Burada $a = x_0,\ \ b = x_2\ ,\ ve\ \ x_1 = (b+a)/2,$ yani $a\ ve\ b$ arasındaki orta noktadır.

Yamuk kuralında olduğu gibi **Simpson kuralı** da eşit genişlikteki ikiden fazla sayıda elemana uygulanacak şekilde genişletilebilir. Bu durumda dilim genişliği aşağıdaki gibi olacaktır;

$$h\ = \frac{(b-a)}{n}$$



Simpson'un 1/3 kuralının çoklu uygulamasının grafik gösterimi, yöntem, aralık sayısının çift olması durumunda uygulanabilir.

Bu durumda toplam integral aşağıdaki gibi olur;

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Her bir integral için 1/3 Simpson formülü kullanılırsa;

$$I \cong h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{3} + h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{3} + \cdots + h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{3}$$

elde edilir. Uygun terimler bir araya toplanırsa **1/3 Simpson kuralının genel formülü**;

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4.\sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f(x_i)+2.\sum_{j=2,4,6..}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3.n}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere; 1/3 Simpson kuralı uygulanacak ise çift sayıda dilim kullanılması gerekir

Örnek 2.

Aşağıdaki fonksiyonun integralini, $a = 0$ ve $b = 0.8$ aralığında dört elemanlı $(n = 4)$, 1/3 Simpson kuralı ile hesaplayınız. Analitik integral değeri $I = 1.640533$ ‘dir.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$, dilimler 0 dan başlayarak 0.2 adımlarla ilerler.

$$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$$

$$f(x_1) = f(0.2) = 1.288$$

$$f(x_2) = f(0.4) = 2.456$$

$$f(x_3) = f(0.6) = 3.464$$

$$f(b) = f(x_4) = f(0.8) = 0.232$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4.\sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f(x_i)+2.\sum_{j=2,4,6..}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3.n}$$

$$I \cong (0.8-0)\frac{0.2+4*(1.288+3.464)+2*(2.456)+0.232}{3*4} = 1.62357$$

$\varepsilon_t = 1.04\%$

10 nokta ilerletilirse; Çift noktalarda çözümün daha yakın olduğu görülmektedir.

n Nokta	h adım	I İntegral	εt Hata
4	0,2	1,62	1,04
5	0,16	1,5	8,28
6	0,133	1,64	0,21

7	0,114	1,57	4
8	0,1	1,64	0,065
9	0,089	1,6	2,42
10	0,08	1,64	0,027

10.1.2.2. 3/8 Simpson Kuralı

Yukarıdaki örnekte 1/3 Simpson kuralının oldukça doğru sonuç verdiği görüldü. Bu nedenle bir çok uygulamada 1/3 Simpson kuralı, yamuk kuralına tercih edilmektedir. Ancak 1/3 Simpson kuralının bir sakıncası, çift sayıda dilim kullanılması zorunluluğudur. Bazı durumlarda aralığın yuvarlatma hatası az olmasına yönelik olarak tek sayıda dilimlere bölünmesi uygun olabilir. Böyle durumlarda 1/3 Simpson kuralı aşağıda açıklanacak olan 3/8 Simpson kuralı ile birlikte kullanılabilir.

3/8 Simpson kuralı, 1/3 Simpson kuralına benzer şekilde türetilir. Üçüncü dereceden bir Lagrange interpolasyon polinomu integrand olarak kullanılıp integrali alınırsa;

$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$

$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$ şeklinde olur.

Burada $h = (b-a)/3$ tür. Bu eşitlik ***3/8 Simpson*** kuralı olarak adlandırılır ve genellikle tek sayıda elemen kullanmak gerektiğinde, 1/3 Simpson kuralıyla birlikte son üç elemanına uygulanır.

Dilim genişliği yukarıdaki formülde yerine yazılırsa formül;

$I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$ şekline gelir.

Örnek 3.

a)Simpson'un 3/8 kuralını kullanarak;

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

fonksiyonunun $a = 0$'dan $b = 0.8$'e kadar sayısal integralini hesaplayınız.

b) Beş aralık (dilim) için aynı fonksiyonun $a = 0$'dan $b = 0.8$'e kadar sayısal integralini 1/3 ve 3/8 Simpson kurallarını birlikte kullanarak hesaplayınız.

(a): Simpson'un 3/8 kuralının tekli uygulaması dört adet eşit aralıklı nokta gerektirir;

$n = 4\ ,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{3} = 0.2667$

$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$

$f(x_1) = f(0.2667) = 1.432724$

$f(x_2) = f(0.533) = 3.487177$

$f(b) = f(x_3) = f(0.8) = 0.232$

Eşitlik 3/8 simpson kuralı uygulanarak aşağıdaki sonuçlar bulunur;

$$I_{3/8} \cong (0.8 - 0)\frac{0.2+3*(1.432724+3.487177)+0.232}{8} = 1.519170$$

$$\varepsilon = \left|\frac{1.640533-1.519170}{1.640533}\right|.100\% = 7.39\%$$

(b)

Beş dilim için dilim genişliği belirlenirse;

$$n = 5\ ,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{5} = 0.16$$

elde edilir. Buna göre veri değerleri

$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$

$f(x_1) = f(0.16) = 1.296919$

$f(x_2) = f(0.32) = 1.743393$

$f(x_3) = f(0.48) = 3.186015$

$f(x_4) = f(0.64) = 3.181929$

$f(b) = f(x_5) = f(0.8) = 0.232$

şeklinde kolaylıkla hesaplanabilir. Son üç dilim Simpson 3/3 ile yapılacağından geriye kalan ilk iki dilim (aralık) için 1/3 Simpson kuralı uygulanırsa; Burada a değeri aynı kalırken b değeri x_2 değeri yani h nin ikinci değeri olur. Buna bağlı yeni $f(b)$ değeri hesaplanır.

$a = 0 \quad b = 0.32 \quad n = 2$

$f(b) = f(x_2) = f(0.32) = 1.743393$

$$I_{1/3} \cong (0.32 - 0)\frac{0.2+4*(1.296919)+2*(0)+1.743393}{3.2} = 0.3803237$$

bulunur.

Son üç dilim (aralık) için 3/8 Simpson kuralı kullanılırsa; Burada b değeri aynı kalırken a değeri a değeri x_2 değeri yani h nin ikinci değeri olur. Buna bağlı $f(a)$ değeri hesaplanır.

$a\ = 0.32 \quad\quad b\ = 0.8 \quad\quad n = 3$

$f(a) = f(x_2) = f(0.32) = 1.743393$

$I_{3/8} \cong (0.8 - 032)\frac{1.743393\ +3*(3.186015\ +3.181929)+0.232}{8} = 1.264753$

Böylece toplam integral, iki integralin toplamı olacaktır.

$I \cong I_{1/3} + I_{3/8} = 0.3803237 + 1.264753\ = 1.645077$

$\varepsilon_t = 0.28\%$

Sonuçları karşılaştırdığımızda; hata oranı 1/3 Simpson yönteminde; % 1.04 iken, 3/8 Simpson yönteminde % 0.28'e düşmektedir.

10.2. Gregory-Newton İnterpolasyon İle Sayısal İntegral

İleri yön sonlu farklar interpolasyon formülü;

$y_p(x) = y_0 + \frac{P}{1!}\Delta y_0 + \frac{P.(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots,\quad p = \frac{x-x_0}{h}$ bilindiğinden.

$x = x_0 + ph \quad\quad dx = h.dp$ Elde edilir. Yamuk kuralının uygulandığı şekilde ki,

$x_0 \leq x \leq x_1$, $(0 \leq p \leq 1)$, aralığına düşen integral;

$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx = h\int_0^1 y_p\, dp$

$I_1 = h\int_0^1 (y_0 + \frac{P}{1!}\Delta y_0 + \frac{P.(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots)\, dp$

p'ye göre integral alınıp sınır değerleri yerleştirilir.

$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 y_0 + \cdots$ olur.

Fakat hassasiyet için dört terim yeterlidir bu durumda pratik olarak;

$I_1 \cong h(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0)$ elde edilir. (1)

Eğer parantez içindeki ilk iki terim işleme katılırsa;

$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0) = h(y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)) = \frac{h}{2}(y_1 + y_0)$

olarak yamuk kuralındaki bağıntı elde edilir. Bu (1) denkleminin özel bir halidir.

$x_1 \leq x \leq x_2$, için $(1 \leq p \leq 2)$ aralığı için;

$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx = h\int_1^2 y_p\ dp$ ‘den sınır değiştirerek tekrar türev alındığında elde edilen sonuç;

$I_2 = h(y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_1$ ilk iki terim işleme katılırsa;

Böylece; $x_0 \leq x \leq x_n$, aralığında n dilim için toplam integral;

$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$

$I = h\ \sum_{k=0}^{n-1}(y_k + \frac{1}{2}\Delta y_k + \frac{1}{12}\Delta^2 y_k + \frac{1}{24}\Delta^3 y_k)$

veya ileri yön sonlu farklar tablosundan faydalanırken daha kullanışlı olan;

$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1}\Delta y_k) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2 y_k) + \frac{1}{24}(\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^3 y_k)]$ elde edilir.

Bu bağıntıdan faydalanarak, bazı terimleri ihmal ederek, Simpson kuralında elde edilen bağıntı çıkarılabilir.

Benzer yolla ileri yön farklar yerine geri yön farklar kullanacak olursak y_p olarak;

$y_p = y_0 + \frac{P}{1!}\nabla y_0 + \frac{P.(P+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \cdots$ alınıp;

$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx \cong h\int_0^1 y_p\ dp$ aynı adımlardan sonra;

$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2}\nabla y_0 + \frac{5}{12}\nabla^2 y_0 + \frac{3}{8}\nabla^3 y_0 + \cdots)$ ilk iki terim işleme katılırsa;

Toplam alan;

$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1}\nabla y_k) + \frac{5}{12}(\sum_{k=0}^{n-1}\nabla^2 y_k) + \frac{3}{8}(\sum_{k=0}^{n-1}\nabla^3 y_k)]$ elde edilir.

İşlem geri yön sonlu farklar tablosundan yapılır.

10.3. Bessel İnterpolasyon Formülü ile Sayısal İntegral

Merkezi yön sonlu farkları kullanan interpolasyon bağıntısı;

$y_p = y_0 + P\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{P(P-1)}{2.2!}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{P.\left(p-\frac{1}{2}\right)(P-1)}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$+.. şeklindedir.

$x_0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq p \leq 1$ aralığına düşen integral

$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx \cong h\int_0^1 y_p\ dp$ den

$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2}\delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1)$ n adet dilim için integral $n = \frac{x_n - x_0}{h}$

$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \delta y_{k+\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^2 y_k)$ elde edilir. (merkezi yön tablosundan)

Örnek 1.

$I = \int_{-2}^{+2} e^{-x^2/2}\, dx$ integralinin $I = 2{,}3925$ sonucunu $h = 1$ adımlarla sayısal yöntemlerle bulalım.

$y = e^{-x^2/2}$ fonksiyonu $x_0 = -2 \le x \le x_n = 2$ aralığını $n = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{2-(-2)}{1} = 4$ dilime bölerek; x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, noktalarına karşılık düşen y değerlerini hesaplayıp Δ_y (ileri yön sonlu farklar tablosunu oluşturalım.

k	x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y
0	-2	0,135	0,472	-0,078	-0,709	1,418
1	-1	0,607	0,393	-0,786	-0,709	
2	0	1	-0,393	-0,079		
3	1	0,607	-0,472			
4	2	0,135				

$y(-2) = e^{-(-2)^2/2} = 0{,}135$

$y(-1) = e^{-(-1)^2/2} = 0{,}6065$

$y(0) = e^0 = 1$

.

$y(2) = e^{-(2)^2/2} = 0{,}135$

$\Delta y_0 = 0{,}607 - 0{,}135 = 0{,}472$

$\Delta y_1 = 1 - 0{,}607 = 0{,}393$

.

Polinomlarla sayısal integral (trapez) formülünden

$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n)$ (yamuk kuralı)

$I_a = \frac{1}{2}(0{,}135 + 2(0{,}607 + 1 + 0{,}607) + 0{,}135) = 2{,}349$

1/3 Simpson formülünden;

$I = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1})$

$I_b = \frac{1}{3}(0{,}135 + 0{,}135 + 2(1) + 4(0{,}607 + 0{,}607) = 2{,}375$

G-N interpolasyon formülünden;

$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 y_k) + \frac{1}{24}(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^3 y_k)]$

$\sum_{k=0}^{4-1} y_k = 0{,}135 + 0{,}607 + 1 + 0{,}607 = 2{,}3484$

$\sum_{k=0}^{4-1} \Delta y_k = 0{,}472 + 0{,}393 + (-0{,}393) + (-0{,}472) = 0$

$\sum_{k=0}^{4-1} \Delta^2 y_k$ =(-0,079)+(-0,786)+(-0,079)= - 0,9424

$\sum_{k=0}^{4-1} \Delta^3 y_k$ = (-0,707)+(0,707)=0

$I_c = 1[\, 2{,}3484 + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{12}(-0{,}9424) + \frac{1}{24}(0) = 2{,}4269$

Bessel sayısal integral formülünden;

Merkezi yön tablosu δ elde edilirse;

k	x	y	$\delta y_{\frac{1}{2}}$	$\Delta\delta^2 y$
0	-2	0,135		
			0,472	
1	-1	0,607		-0,079
			0,393	
2	0	1		-0,786
			-0,393	
3	1	0,607		-0,079
			-0,472	
4	2	0,135		

$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \delta y_{k+\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^2 y_k)$

$\sum_{k=0}^{4-1} y_k$ = 2,349

$\sum_{k=0}^{4-1} \delta y_{k+\frac{1}{2}}$ = 0,472+0,393+(-0,393)+(-0,472)=0

$\sum_{k=0}^{4-1} \delta^2 y_k$ = (-0,079)+(-0,786)+(-0,079)= - 0,944

$I_d = 12{,}349 + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{12}(-\,0{,}944) = 2{,}4269$