5. DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Dört veya beş dereceli polinomlardan yüksek dereceli polinomlar, trigonometrik ve üstel terimler içeren denklemleri analitik yöntemlerle çözmek neredeyse imkansızdır. Bunların sayısal çözümleri için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Doğrusal olmayan Sayısal çözümleme yöntemlerinin bir çoğunu temelinde Taylor serisi vardır. Çözümlere geçmeden önce bu seri tanımlanacaktır.

5.1. Taylor Serisi

Taylor serisi, sürekli bir fonksiyonun herhangi bir x_{i+1} noktadaki değerini, bu noktanın yakın komşuluğundaki bir x_i noktasındaki değerleri ve türevleri cinsinden ifade eden aşağıdaki gibi sonsuz bir seridir;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n$$

Dikkat edilirse, serinin sonunda $(n+1)$. terimden sonsuza kadar olan terimlerin hesaba katıldığı bir R_n kalıntı (ya da kalan veya hata) terimi vardır. Bu terim aşağıdaki şekilde ifade edilir. Burada ξ değeri x_i ile x_{i+1} arasında bir değerdir.

$$R_n = \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

Genellikle $(x_{i+1} - x_i)$ farkına $h = (x_{i+1} - x_i)$ adım denir ve Taylor serisi ile kalan terimi sıklıkla adım cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots + \frac{(h)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n$$

$R_n = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 1. Sıfırıncı ila 4. Mertebeden Taylor serisi yaklaşımları kullanarak aşağıdaki fonksiyonun $x_{i+1} = 1$ deki değerini $x_i = 0$ daki değerleri ve türevleri cinsinden belirleyiniz.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

Bilinen bir fonksiyonla ilgilendiğimizden *f(x)* fonksiyonunun 0 ve 1 deki değerlerini belirleyebiliriz. Şekilde görüldüğü gibi fonksiyon *f* (0) = 1.2 de başlamakta ve *f* (1) = 0.2 olacak şekilde aşağı kıvrılmaktadır. Buna göre Taylor serisi ile yaklaşık olarak belirlemeye çalıştığımız değer gerçekte 0.2 dir. ($h = 1$)'dir,

$\underline{n = 0 \text{ için}}$; sıfırıncı dereceden Taylor serisi yaklaşımı serinin sağ tarafında tek terim olması durumunda elde edilir:

$f(x_{i+1}) = f(x_i)$, $f(1) = f(0) = 1{,}2$, $\varepsilon_i = 0{,}2 - 1{,}2 = -1$

$n = 1$ için; ($n = 0, 1$değerleri), $x = 0$ da birinci mertebe türevin belirlenmesi gerekmektedir:

$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h.f'(x_i)}{1!}$ şeklindedir. $f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1x - 0.25$,

$f'(0) = -0{,}25$ dir. Birinci mertebeden yaklaşım

$f(1) = f(0) + h.f'(0) = 1{,}2 + 1\,.(-0{,}25) = 0{,}95$ hata değeri $\varepsilon_i = 0{,}2 - 0{,}95 = -0{,}75$

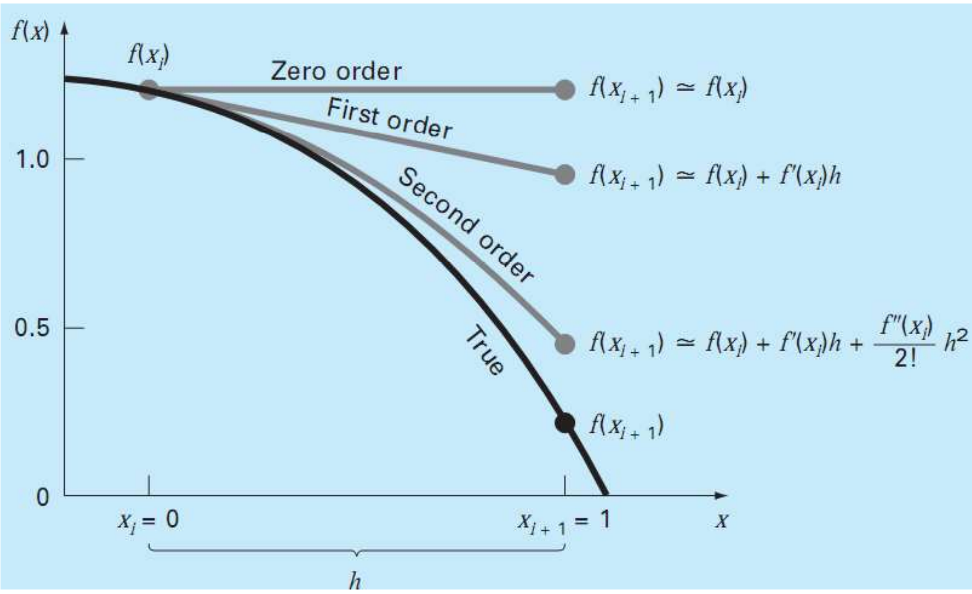
$\underline{n = 2 \text{ için}}$ ($n = 0,1,2$) için taylor serisi; $f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_i)$

$\underline{n = 3}$ için ($n = 0,1,2,3$) için; $f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!}f'''(x_i)$

$\underline{n = 4}$ için ($n = 0,1,2,3,4$) $f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{(h)^4}{4!}f^4(x_i)$

$\underline{n = 5}$ için ($n = 0,1,2,3,4,5$) $f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{(h)^4}{4!}f^4(x_i) + \frac{(h)^5}{5!}f^5(x_i)$

(Not: $n = 2,3,4,5$ için değerler hesaplanacaktır.)



Mertebe artırılarak devam edildiğinde, 4. Mertebeden yaklaşım için kalan ifadesi

$R_n = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)$ ifadesinden $R_4 = \frac{(h)^{4+1}}{(4+1)!}f^{4+1}(\xi)$ olacaktır.

Örnekteki $f(x)$ 4. Dereceden bir polinom olduğundan 5. Derece türevi sıfır olacaktır.

$R_4 = \frac{(h)^{4+1}}{(4+1)!} f^{4+1}(\xi) = 0$ olacaktır.

Bu fonksiyonun taylor serisi terimleri yukarıdaki grafikte gösterilmiştir;

Taylor serisi sayısal yöntemlerin temelidir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $x = a$ civarındaki değeri için sonsuz seri ile ifade edilebiliyorsa, o zaman bu $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ civarında "Analitik" olduğu söylenebilir. Taylor serisi şağıdaki şekilde de kullanılabilir.

$f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots$

Serinin yakınsaklık koşullarını belirlemek zor olmasına karşın $f(x)$'in $x = a$'daki türevinin mevcut olması ve sonlu olması lazımdır. Eğer taylor serisi mevcut ise x'in a'dan farklı fakat a civarındaki bir değerine karşılık düşen $f(x)$'i bulabiliriz. Ancak serinin yakınsak olması ve $x = a$'da $f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$ in mevcut olması gerekir. Yakınsak çözümiçin seride yeterli sayıda terim alınmalıdır. Bu konuyla ilgili yukarıda bir örnek verilmiştir.

Yukarıda da anlatıldığı gibi Taylor serisi bir terime kadar ifade edilir, kesilen terimlerin yerine hata terimi konulur. Örneğin 2. Terimden sonra seriyi kesecek olursak;

$f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + R.(x-a)^3$ buradan yapılan hata;

$R.(x-a)^3 = f(x) - (f(a) + (x-a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a))$ şeklinde hesaplanabilir.

Seriden n adet terim alınıp $n+1$ ve sonraki terimler kesilirse o zaman yapılan maksimum hata ise;

$\frac{(|\boldsymbol{x-a}|)^{\boldsymbol{n+1}}}{(\boldsymbol{n+1})!} \left| \frac{\boldsymbol{d^{(n+1)} f(x)}}{\boldsymbol{dx^{n+1}}} \right| \boldsymbol{max}$. şeklinde yazılabilir. Bu ifade yukarıdaki $R_n = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$ ifadesiyle aynıdır.

Hesaplanan terim kesme hatasının, maksimum hatadan küçük olması gerekir.

Örnek 2.

$f(x) = e^x$ fonksiyonunu $a = 0$ civarında Taylor serisine açınız. Daha sonra serinin ilk üç terimini alarak $x = 0{,}5$ noktası için $f(x)$ 'i ve kesmeden oluşacak hatayı bulunuz ve maksimum hata ile karşılaştırınız.

$f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^n(x) = e^x = f(x)$

olduğundan, denklemin sağ tarafında $a = 0$ için;

$f(x) = f(0) + \frac{(x-0)}{1!}.f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}f'''(0) + \cdots$

$f(x) = e^{(0)} + \frac{x}{1!}e^{(0)} + \frac{x^2}{2!}e^{(0)} + \frac{x^3}{3!}e^{(0)} + \cdots = e^x$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$x = 0{,}5$ noktası için ilk üç terimden; $f(x) = e^{(0)} + \frac{x}{1!}e^{(0)} + \frac{x^2}{2!}e^{(0)} + R.(x-a)^3 = e^x$

$e^{0,5} = 1 + 0{,}5 + \frac{(0{,}5)^2}{2!} + R(0{,}5)^3 \Rightarrow hata\ terimi;\ R(0{,}5)^3 = 0.023\ olur.\ R = 0{,}19$

$0 \le x \le 0.5$ aralığında $\frac{d^3(e^x)}{dx^3} = e^x$ maksimum değerini $x = 0.5$ de alır. Bu nedenle hatanın

üst sınırı; $\frac{(|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!}\left|\frac{d^{(n+1)}f(x)}{dx^{n+1}}\right|$ $\boldsymbol{max}$ ifadesinden $(a = 0;\ n = 2)$

$\frac{(0{,}5)^3}{3!}.\frac{d^3(e^x)}{dx^3} = \frac{(0{,}5)^3}{3!}.e^{0,5} = 0{,}03438$ olup buradan $R(0{,}5)^3 = 0.023 < 0{,}03438$ olduğu görülür. Böylece maksimum hatadan küçük bir hata yapılmıştır.

5.2. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi (Bisection)

İki başlangıç noktası gerektirir. Bu iki başlangıç noktasında fonksiyonun zıt işaretli değerler alması istenir. X_a, X_b iki başlangıç değeri buna karşılık $f(x_a), f(x_b)$ zıt işaretli fonksiyon değeri, eğer böyle iki nokta Bulunmuş ise kök mutlaka bunların arasında çıkacaktır.

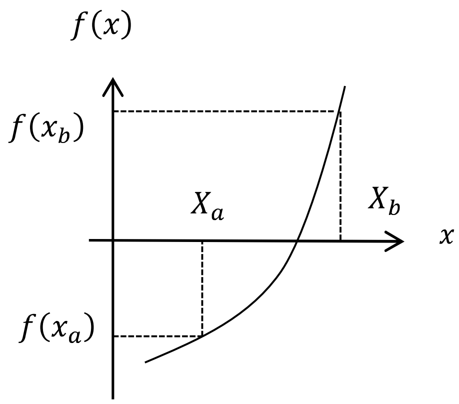
$x_1 = (x_a + x_b)/2$

bu yeni noktaya karşılık yeni bir $f(x_1)$ değeri bulunur ve bu yeni değerin $f(x_a), f(x_b)$ değerlerinden hangisiyle zıt işaretli olduğu belirlenir. Örneğin $f(x_1), f(x_a)$ ile aynı işaretli $f(x_b)$ ile zıt işaretli olduğunda kök $x_1 ile\ x_b$ arasındadır. İşlem artık bu iki nokta arasındadır. Bu aralık tekrar ikiye bölünür,

$x_2 = (x_1 + x_b)/2$

yine işaret kontrolü yapılarak zıt işaretli aralık üzerinden işlem devam eder. Bu çözüm son iki x değerinin farkının verilen mutlak yaklaşım hatasının küçük eşit değerine ulaşıncaya kadar devam eder.

$|x_n - x_{n-1}| \le \Delta x$



Örnek 1.

$f(x) = y = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$

fonksiyonun $1 < x < 2$ aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü bisection (aralığı ikiye bölme) yöntemiyle 0.006 mutlak hatasıyla bulunuz.

$x_1 = 1 \quad \rightarrow \; y_1 = \; f(x_1) = f(1) = 1^4 - 9.1^3 - 2.1^2 + 120.1 - 130 = \; -20$

$x_2 = 2 \quad \rightarrow y_2 = f(x_2) = \; f(2) = 2^4 - 9.2^3 - 2.2^2 + 120.2 - 130 = 46$

Zıt işaretli olduğundan başlangıç değerleri doğru seçilmiştir.

$x_3 = (x_1 + x_2)/2 = \; (1 + 2)/2 = 1.5$

$y_3 = f(x_3) = f(1{,}5) = (1{,}5)^4 - 9.(1{,}5)^3 - 2.(1{,}5)^2 + 120.(1{,}5) - 130 = 20{,}188$

$h = |x_3 - x_2| = |1{,}5 - 2| = 0.5$

y_1 ve veni y_3 değeri zıt işaretli olduğundan, kök x_1 , x_3 arasındadır.

$x_4 = (x_1 + x_3)/2 = \; (1 + 1{,}5)/2 = 1{,}25$

$y_4 = f(x_4) = f(1{,}25) = (1{,}25)^4 - 9.(1{,}25)^3 - 2.(1{,}25)^2 + 120.(1{,}25) - 130 = 1{,}74$

$h = |x_4 - x_3| = |1{,}25 - 1{,}5| = 0.25$

Tekrar işaret kontrolü yapıldığında y_4 ve y_1 zıt işaretlidir, bu nedenle kök x_4 , x_1 arasındadır;

$x_5 = (x_1 + x_4)/2 = \; (1 + 1{,}25)/2 = 1{,}125$

$y_5 = f(x_5) = f(1{,}125) = (1{,}125)^4 - 9.(1{,}125)^3 - 2.(1{,}125)^2 + 120.(1{,}125) - 130 = -8{,}74$

$h = |x_5 - x_4| = |1{,}125 - 1{,}25| = 0.125$ mutlak hatadan küçük değildir işleme devam edilir.

Tekrar işaret kontrolü yapıldığında y_5 ve y_4 zıt işaretlidir, bu nedenle kök x_5 , x_4 arasındadır;

$x_6 = (x_4 + x_5)/2 = \; (1{,}25 + 1{,}125)/2 = 1{,}188$

$y_6 = f(x_6) = f(1{,}188) = (1{,}188)^4 - 9.(1{,}188)^3 - 2.(1{,}188)^2 + 120.(1{,}188) - 130 = -3{,}4$

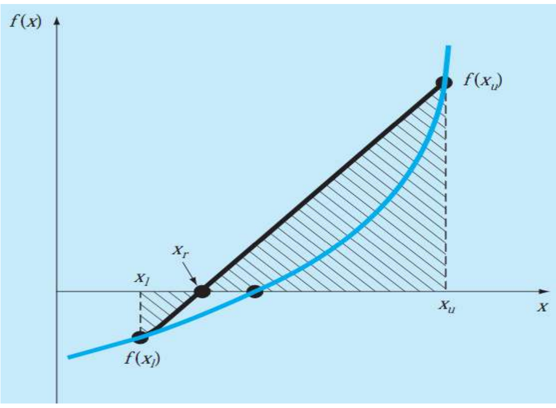
$h = |x_6 - x_5| = |1{,}188 - 1{,}125| = 0.063$ mutlak hatadan büyük bir adım daha devam edilir.

adım	x_n	y_n	h
1	1,5	20,188	0,5
2	1,25	1,738	0,25
3	1,125	-8,744	0,125
4	1,188	-3,403	0,063
5	1,156	-6,049	0,031
6	1,141	-7,390	0,016
7	1,133	-8,066	0,008
8	1,129	-8,404	0,004

$h = |x_8 - x_7| = |1{,}129 - 1{,}33| = 0{,}004 < 0{,}006$, $\mathbf{x = 1{,}129}$ olarak elde edilir.

5.3. Doğrusal İnterpolasyon (False Position) Yöntemi

Aralığı ikiye bölme yönteminin yetersiz bir yönü fonksiyonun aralık sınırlarındaki değerlerinin büyüklüklerini göz önüne almaksızın aralığın her zaman ikiye bölünmesidir. Şekilde de görüldüğü gibi $f(x_l)$ nin $f(x_u)$ dan küçük olması x_l nin köke $x_u$dan daha yakın olma olasılığını ortaya çıkarmaktadır. Bu durum bir avantaj olarak kullanmaya yönelik olarak doğrusal interpolasyon yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemde aralığın ikiye bölünmesi yerine, aralığın uç noktalarındaki fonksiyon değerlerini birleştiren doğru parçasının *x*-eksenini kestiği nokta yeni tahmini kök değeri olarak alınmaktadır. Böylece aralığın uç noktalarındaki fonksiyon değerlerinin büyüklükleri yakınsama hızını artırmak amacıyla bir avantaj olarak kullanılmaktadır.



Buna göre şekildeki benzer üçgenlerden yararlanılarak

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

yazılabilir. Buradan x_r çekilirse doğrusal interpolasyon formülü;

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

şeklinde elde edilir. Yöntemin algoritması aralığı ikiye bölme ile eşdeğer olup, tek fark, x_r nin belirlendiği ifadelerde yukarıdaki eşitliğin kullanılmasıdır.

Örnek 1.

$f(x) = \frac{667,38}{x}(1 - e^{-0,146843\,x}) - 40$ denkleminin kökünü $x_l = 12$ ve $x_u = 16$ değerlerinden başlayarak 0,08 bağıl hatasıyla hesaplayalım,

$n = 1$; için

$x_l = 12, \;\; f(x_l) = f(12) = \frac{667,38}{12}(1 - e^{-0,146843\,.12}) - 40 = 6,0699$

$x_u = 16, \;\; f(x_u) = f(16) = \frac{667,38}{16}(1 - e^{-0,146843\,.16}) - 40 = -2,2688$

$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$ bağıntısından

$x_r = 16 - \frac{f(16).(12-16)}{f(12)-f(16)} = 16 - \frac{-2,2688.(12-16)}{6,0699-(-2,2688)} = 14,9113$

$f(x_r) = f(14,9113\,) = \frac{667,38}{14,9113}(1 - e^{-0,146843\,.14,9113}) - 40 = -0,2543$

$f(x_l).f(x_r) = -1,5426 < 0$

olduğundan kök ilk alt aralıkta kalmaktadır x_r değeri x_u değeri olarak atanırsa;

Kök x_l ile $x_u = x_r$ arasındadır;

$n = 2$; için

$x_l = 12, \;\; f(x_l) = f(12) = \frac{667,38}{12}(1 - e^{-0,146843\,.12}) - 40 = 6,0699$

$x_u = 14,9113\,, \;\; f(x_u) = f(14,9113\,) = \frac{667,38}{14,9113}(1 - e^{-0,146843\,.14,9113}) - 40 = -0,2543$

$x_r = 14,9113 - \frac{f(14,9113).(12-14,9113)}{f(12)-f(14,9113)} = 16 - \frac{-0,2543.(12-14,9113)}{6,0699-(-0,2543)} = 14,7942$

$f(x_r) = -0,0273$

$\varepsilon = \left|\frac{14,7942-14,9113}{14,7942}\right|.\%100 = \%0,79$ diğer adımlar matlab ile

adım	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	ε
1	12	16	0,5	-2,2688	14,91	-0,2543	
2	12	14,91	0,25	-0,2543	14,7942	-0,0273	0,7854
3	12	14,79	0,125	-0,0273	14,7817	-0,0029	0,0845
4	12	14,78	0,063	-0,0029	14,7804	-0,0003	0,0090
5	12	14,78	0,031	-0,0003	14,7802	-0,00003	0,0009

$x = 14,78$

Örnek 2.

$f(x) = x^{10} - 1$ fonksiyonunun 0 ile 1,3 aralığında kökünü doğrusal interpolasyon yöntemiyle bulunuz. Her adım için yaklaşık ε_a ve ε_t gerçek bağıl hataları hesaplayınız

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}}\right|.\%100 \quad , \quad \varepsilon_t = \left|\frac{x_g - x_r^{yeni}}{x_g}\right|.\%100$$

1. adım $x_l = 0$,

$f(x_l) = f(0) = x^{10} - 1 = 0 - 1 = -1$

$x_u = 1{,}3$,

$f(x_u) = f(1{,}3) = x^{10} - 1 = (1{,}3)^{10} - 1 = 12{,}78$

$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$ bağıntısından

$$x_r = 1{,}3 - \frac{f(1{,}3).(0 - 1{,}3)}{f(0) - f(1{,}3)} = 1{,}3 - \frac{12{,}78.(-1{,}3)}{-1 - (12{,}78)} = 0{,}09434$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0{,}09434)^{10} - 1 = -1$ negatif olduğundan ve kök zıt işaretli aralıkta olacağından x_r, x_u aralığı alınır. $x_l = 0{,}09434$ olarak düzeltilir.

$\varepsilon_t = \left|\frac{1 - 0{,}09434}{1}\right|.\%100 = \%90{,}6$ gerçek hata.

2. adım

$x_l = 0{,}09430$,

$f(x_l) = (0{,}09434)^{10} - 1 = -1$

$x_u = 1{,}3$,

$f(x_u) = f(1{,}3) = x^{10} - 1 = (1{,}3)^{10} - 1 = 12{,}78$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 1{,}3 - \frac{f(1{,}3).(0{,}09434 - 1{,}3)}{f(0{,}09434) - f(1{,}3)} = 1{,}3 - \frac{12{,}78.(-1{,}2057)}{-1 - (12{,}78)} = 0{,}18180$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0{,}1818)^{10} - 1 = -0{,}9999$ negatif olduğundan x_r, x_u aralığı alınır. $x_l = 0{,}18180$ olarak düzeltilir

$$\varepsilon_a = \left|\frac{0{,}18180 - 0{,}09434}{0{,}18180}\right|.\%100 = \%48{,}1 \ , \ \varepsilon_t = \left|\frac{1 - 0{,}1818}{1}\right|.\%100 = \%81{,}8$$

3. adım

$x_l = 0{,}1818$,

$f(x_l) = (0{,}1818)^{10} - 1 = -0{,}9999$

$x_u = 1{,}3,$

$f(x_u) = f(1{,}3) = x^{10} - 1 = (1{,}3)^{10} - 1 = 12{,}78$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 1{,}3 - \frac{f(1{,}3).(0{,}1818 - 1{,}3)}{f(0{,}1818) - f(1{,}3)} = 1{,}3 - \frac{12{,}78.(-1{,}1182)}{-0{,}9999 - (12{,}78)} = 0{,}26293$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0{,}26293\,)^{10} - 1 = -0{,}9999$ negatif olduğundan x_r, x_u aralığı alınır. $x_l = 0{,}26293$ olarak düzeltilir.

$$\varepsilon_a = \left|\frac{0{,}26293 - 0{,}18180}{0{,}26293}\right|.\%100 = \%30{,}9 \;,\; \varepsilon_t = \left|\frac{1 - 0{,}26293}{1}\right|.\%100 = \%73.7$$

4. adım

$x_l = 0{,}26293$,

$f(x_l) = (0{,}26293)^{10} - 1 = -0{,}9999$

$x_u = 1{,}3$

$f(x_u) = f(1{,}3) = x^{10} - 1 = (1{,}3)^{10} - 1 = 12{,}78$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 1{,}3 - \frac{f(1{,}3).(0{,}26293 \;\; - 1{,}3)}{f(0{,}26293 \;\;) - f(1{,}3)} = 1{,}3 - \frac{12{,}78.(-1{,}037)}{-0{,}9999 - (12{,}78)} = 0{,}33825$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0{,}33825\;\,)^{10} - 1 = -0{,}9999$ negatif olduğundan x_r, x_u aralığı alınır. $x_l = 0{,}33825$ olarak düzeltilir

$$\varepsilon_a = \left|\frac{0{,}33825 - 0{,}26293}{0{,}33825}\right|.\%100 = \%22{,}3 \;,\; \varepsilon_t = \left|\frac{1 - 0{,}33825}{1}\right|.\%100 = \%66.2$$

5. adım

$x_l = 0{,}33825$,

$f(x_l) = (0{,}33825\,)^{10} - 1 = -0{,}9999$

$x_u = 1{,}3$

$f(x_u) = f(1{,}3) = x^{10} - 1 = (1{,}3)^{10} - 1 = 12{,}78$

$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$

$x_r = 1{,}3 - \frac{f(1{,}3).(0{,}33825 \;\; -1{,}3)}{f(0{,}33825 \;\;) - f(1{,}3)} = 1{,}3 - \frac{12{,}78.(-0{,}96175)}{-0{,}9999 - (12{,}78)} = 0{,}40798$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0{,}40798)^{10} - 1 = -0{,}9998$ negatif olduğundan x_r, x_u aralığı alınır.

$x_l = 0{,}40798$ olarak düzeltilir

$\varepsilon_a = \left|\frac{0{,}40798 - 0{,}33825}{0{,}40798}\right|.\%100 = \%17{,}1$, $\varepsilon_t = \left|\frac{1 - 0{,}40798}{1}\right|.\%100 = \%59{,}2$

adım	x_l	x_u	x_r	ε_a	ε_t
1	0	1,3	0,0943	48,1	90,57
2	0,0943	1,3	0,1818	30,85	81,82
3	0,1818	1,3	0,2629	22,25	73,71
4	0,26293	1,3	0,3381	17,1	66,18
5	0,3381	1,3	0,4079	13,69	59,21

$\varepsilon_a = 0{,}01$ hata değeri ile 39 adım sonunda $x = 0{,}9997$ elde edilir.

5.4. Basit İterasyon Yöntemi

$f(x)$ fonksiyonunun köklerini bulmak için $f(x) = 0$ denkliği $x = g(x)$ durumuna sokulur. Bu eşitliğin anlamı $y = x$ doğrusu ile $x = g(x)$ fonksiyonunun kesim noktasını bulmaktır. $x = x_0$ başlangıç değeri için $g(x_0)$ bulunarak, x'in yeni değeri $x_1 = g(x_0)$ alınır işlemler tekrarlanırsa;

$x_1 = g(x_0)$
$x_2 = g(x_1)$
.
$x_n = g(x_{n-1})$

Yapılan her işlemin sonunda yeni bir x değeri elde edilir. Eğer $\varepsilon_x = |x_n - x_{n-1}|$ yaklaşım hatası değeri gittikçe küçülüyorsa çözüm yakınsak olur. Çözüm için istenen hata değerinden daha küçük bir değere ulaşıncaya kadar tekrarlanır. Fark giderek büyüyorsa çözüm ıraksak olur. Ya yeni bir başlangıç değeri ya da farklı bir çözüm yöntemi denenmelidir.

Örnek 1.

$f(x) = 4.e^{-0{,}5x} - x$

denkleminin kökünü $x_0 = 3$ başlangıç değeri için $\varepsilon_x = 0.05$ hata değeri ile bulunuz.

$f(x)$ fonksiyonu $f(x) = 0$ denkliği ile $x = g(x)$ durumuna sokulur

$4.e^{-0,5x} - x = 0$, $x = 4.e^{-0,5x}$, $g(x) = 4.e^{-0,5x}$ şekline dönüşmüş olur.

$g(3) = 4.e^{-0,5.3} = 0,89$

$g(0,89) = 4.e^{-0,5.0,89} = 2,56$

$g(2,56) = 4.e^{-0,5.2,56} = 1,11$

$g(1,11) = 4.e^{-0,5.1,11} = 2,29$

.

24 adım sonra $x = 1,7$ bulunur (Matlab)

adım	x	$g(x)$	$h = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	3	0,89	2,11
2	0,89	2,56	1,66
3	2,56	1,11	1,45
4	1,11	2,29	1,18
5	2,29	1,27	1,02
6	1,27	2,11	0,84
7	2,11	1,38	0,73
.	.	.	.
24	1,68	1,72	0,047

Örnek 2.

$f(x) = 4.Ln(x) - x$ denkleminin kökünü $x_0 = 3$ başlangıç değeri için $\varepsilon_x = 0.05$ hata değeri ile bulunuz.

$f(x)$ fonksiyonu $f(x) = 0$ denkliği ile $x = g(x)$ durumuna sokulur

$x = 4.Ln(x)$, $g(x) = 4.Ln(x)$ şekline dönüşmüş olur.

$g(3) = 4.Ln(3) = 4,39$

$g(4,39) = 4.Ln(4,39) = 5,92$

$g(5,92) = 4.Ln(5,92) = 7,11$

$g(7,11) = 4.Ln(7,11) = 7,84$

.

adım	x	$g(x)$	$h = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	3	4,39	1,39
2	4,39	5,92	1,52
3	5,92	7,11	1,19
4	7,11	7,84	0,73
5	7,84	8,2	0,39
6	8,2	8,43	0,19
7	8,43	8,53	0,09
8	8,53	8,57	0,04

5.5. Newton – Rapson Yöntemi

x_0 yaklaşık kök, h yaklaşımdaki mutlak hata olsun; kökün düzeltilmiş hali; $x_1 = x_0 + h$ olan x_1; $f(x)$ fonksiyonunun köküyse $f(x_1) = 0$ yani $f(x_0 + h) = 0$ olmalıdır.

$f(x_0 + h)$ ‘ ın toylar serisi açılımı;

$h = x_1 - x_0$ olduğundan;

$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h.f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots + \frac{(h)^n}{n!}f^n(x_i) + R_n$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(h)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{(h)^n}{n!}f^n(x_0) + R_n$

h yeterince küçükse ve bu açılımın sadece ilk iki terimi alındığında büyük bir hata yapılmış olmaz,

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0)$ $\quad f(x_0 + h) = f(x_1)$ denilirse;

$f(x_1) = f(x_0) + h.f'(x_0)$ elde edilir.

x_1 , $f(x)$'in bir kökü olduğunda $f(x_1) = 0$ olacağından;

$f(x_0) + h.f'(x_0) = 0$ olur. Buradan;

$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$ elde edilir.

h hatasının mutlak değeri, verilen Δx değerinden küçük değilse x_1 değeri yaklaşık kök olarak kabul edilip x_2 gibi yeni kök hesaplanır. Bu durum mutlak kök değerinden daha küçük eşit bir hata değerine kadar sürdürülür. Her adımda $h = |x_{n+1} - x_n| \leq \Delta x$ hesaplanır.

$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ifadesinden

$\boldsymbol{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$ elde edilir

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ Şeklinde iteratif çözüm yapılır.

Örnek 1.

$f(x) = x^4 - 3.x^3 + 6.x^2 - 16$ denkleminin $x_0 = 4$ civarındaki kökünü $\varepsilon_x = 0{,}05$ yaklaşım hatası ile bulunuz.

$f'(x) = 4.x^3 - 9.x^2 + 12.x^1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_1 = 4 - \frac{\left(4^4 - 34^3 + 6.4^2 - 16\right)}{4.4^3 - 9.4^2 + 12.4^1} = 3{,}1$$

hata düzeyi henüz istenilen düzeyde olmadığından işleme devam edilir.

$$x_2 = 3{,}1 - \frac{\left((3{,}1)^4 - 3.(3{,}1)^3 + 6.(3{,}1)^2 - 16\right)}{4.(3{,}1)^3 - 9.(3{,}1)^2 + 12.(3{,}1)^1} = 2{,}46$$

$$x_3 = 2{,}46 - \frac{\left((2{,}46)^4 - 3.(2{,}46)^3 + 6.(2{,}46)^2 - 16\right)}{4.(2{,}46)^3 - 9.(2{,}46)^2 + 12.(2{,}46)^1} = 2{,}1$$

$$x_4 = 2{,}1 - \frac{\left((2{,}1)^4 - 3.(2{,}1)^3 + 6.(2{,}1)^2 - 16\right)}{4.(2{,}1)^3 - 9.(2{,}1)^2 + 12.(2{,}1)^1} = 2{,}006$$

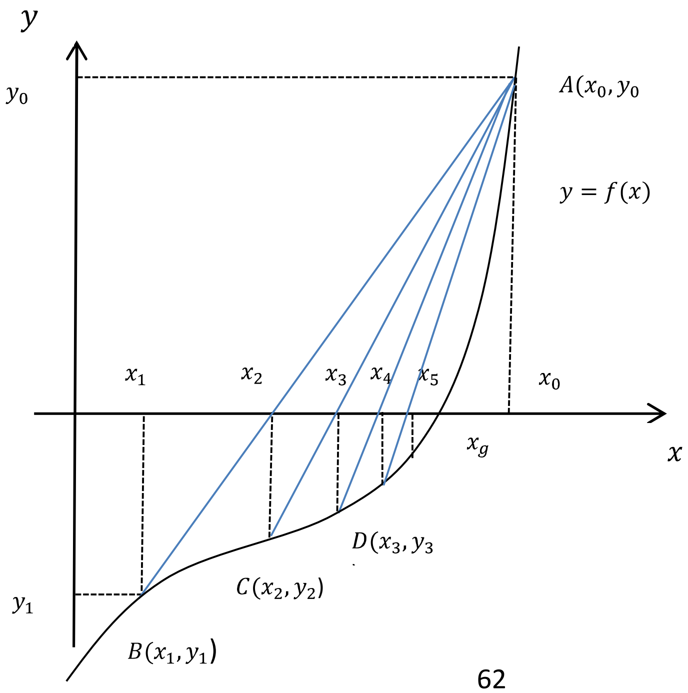
$$x_5 = 2{,}006 - \frac{\left((2{,}006)^4 - 3.(2{,}006)^3 + 6.(2{,}006)^2 - 16\right)}{4.(2{,}006)^3 - 9.(2{,}006)^2 + 12.(2{,}006)^1} = 2$$

n	x_n	x_{n+1}	$h = \left\|-\frac{f(x)}{f'(x)}\right\|$
1	4	3.1	0,9
2	3,1	2.46	0,63
3	2,46	2.1	0,35
4	2,1	2,006	0,09
5	2,006	2	0,09
6	2	2	0,006

Tablodan görüleceği gibi 6. Adımda $|h\,| < \varepsilon$ $\;0.006 < 0.05$ olduğundan; $x = 2$ dir.

5.6. Kiriş Değiştirme (Secant) Yöntemi

Newton-Rapson yönteminde ortaya çıkabilecek potansiyel bir sorun birinci türevin analitik olarak alınmasının gerekliliğidir. Basit polinomlar için bu bir sorun olmamakla birlikte, bazı karmaşık fonksiyonlar için birinci türevin alınmasında güçlükler ortaya çıkabilir. Bu tür durumlarda kullanılır.



x_1 ile x_0 arasındaki $\overline{AB}$ kirişinin denklemi (doğru denklemi);

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow (y-y_0)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.(x-x_0) \Rightarrow (x-x_0)=\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}.(y-y_0)$$

$$x=x_0+\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}.(y-y_0)$$

$\overline{AB}$ kirişinin x eksenini kestiği nokta x_2 için bu denklemde $y=0$, $x=x_2$ yazılarak;

$$x_2=x_0-\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}.y_0$$

$\overline{AC}$ kirişi için eksen parametreleri bu kirişe göre yazılıp kirişinin x eksenini kestiği nokta x_3 için aynı denklemde $y=0$, $x=x_3$ yazılarak;

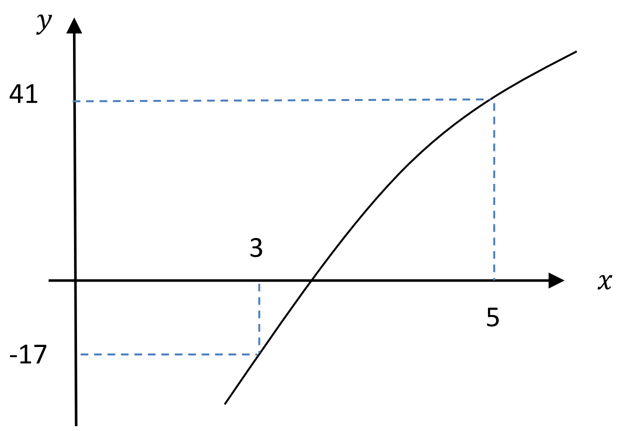
$$x_3=x_0-\frac{x_2-x_0}{y_2-y_0}.y_0$$

Mutlak yaklaşım hatasının belli bir düzeyine kadar bu işlem devam eder. Genelleştirilmiş hali;

$$\boldsymbol{x_{n+1}=x_0-\frac{x_n-x_0}{y_n-y_0}.y_0}$$

Örnek 1.

$y=f(x)=x^3-20x+16$ denkleminin 3 ile 5 arasında bulunan bir kökünü kiriş yöntemini uygulayarak $\varepsilon_x=0{,}008$ yaklaşım mutlak hatası ile bulunuz.



$x_0 = 5,\ x_1 = 3$ seçilirse; y_0 , y_1 değerleri hesaplanır.

$y_0 = f(x_0) = 5^3 - 20.5 + 16 = 41$

$y_1 = f(x_1) = 3^3 - 20.3 + 16 = -17$

yöntem adım adım ilerletilir.

Her adım için yeni x_{n+1} değeri hesaplanır. Ayrıca her adımda kullanılmak üzere $y_n = f(x_n)$ değerleri hesaplanır.

$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_0$

$x_2 = 5 - \frac{(3-5)}{(-17-41)} * 41 = 3{,}59$

$y_2 = f(x_2) = (3{,}59)^3 - 20 \,.\, 3{,}586 + 16 = -9{,}6.$

$x_3 = 5 - \frac{(3{,}59-5)}{(-9{,}6-41)} * 41 = 3{,}85$

$y_3 = f(x_3) = (3{,}85)^3 - 20 \,.\, 3{,}85 + 16 = -3.93$

.

matlab çözümü

n	x_n	$y_n = f(x_n)$	x_{n+1}	$h = \|x_{n+1} - x_n\|$
0	5	41		
1	3	-17		
2	3,59	-9,6	3,59	0,59
3	3,85	-3,93	3,85	0,26
4	**3,95**	**-1,3**	**3,95**	**0,1**
5	3,98	-0,42	3,98	0,03
6	3,99	-0,13	3,99	0,01
7	3,99	-0,04	3,99	0,003

$x = 3{,}99$ şeklinde bulunur.

5.7. Müller Yöntemi

Polinom köklerinin hesaplanmasında kullanılan bir yöntemdir. Hatırlayacağımız gibi, Secant Yöntemi, kökün tahminini, fonksiyonun iki noktadaki değerinden geçen doğrunun x-eksenine uzatılmasıyla elde eder. Müller yöntemi benzer bir yaklaşım kullanır, fakat üç noktadan geçen bir parabolü x eksenine uzatır. Yöntem üç noktadan geçen parabolün katsayılarını bulmaktan ibarettir. Bu katsayılar ikinci derece ifadede yerine konularak parabolün x-eksenini kestiği nokta, yani kök tahmini yapılır. Parabolik denklem uygun bir şekilde yazılarak yaklaşım kolaylaşır;

$f(x) = a(x - x_2)^2 + b.(x - x_2) + c$

Bu parabolün üç noktadan geçmesini isteriz

$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$

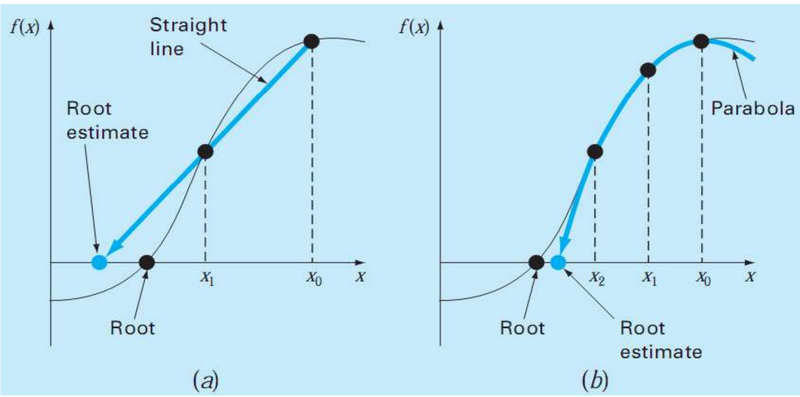
Yukarıdaki eşitlikte üç nokta tek tek yerine konmasıyla hesaplanabilir

$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$

$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$

$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c = c$

$c = f(x_2)$



Şekil –a da köklerin secant yöntemiyle b de ise müller yöntemiyle bulunması gösterilmiştir.

Denklemlerden $c = f(x_2)$ katsayısı hemen belirlenebilir, ve c-katsayısı fonksiyonun üçüncü tahmininden hesaplanmıştır ve a, b'de hesaplanabilir

1.denklem $f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$

2.denklem $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$

$h_0 = x_1 - x_0$, $h_1 = x_2 - x_1$ dir.

$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, $\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, denilirse ve bu ifadeler yukarıdaki iki denklemde yerine konulursa;

$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0}$, $\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}$ bu ifadeler yukarıdaki iki denklemde yerleştirilirse;

$x_1 - x_2 = -h_1$ $\quad h_0 + h_1 = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 = x_2 - x_0$, $x_0 - x_2 = -(h_0 + h_1)$ dir.

$\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1} = f(x_1) - f(x_2) = -\delta_1 . h_1$

$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0} = f(x_0) - f(x_1) = -\delta_0 . h_0$

2.denklemden;

$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$

$-\delta_1 . h_1 = a(-h_1)^2 + b(-h_1)$

$h_1 . b - h_1^2 . a = \delta_1 . h_1$

$b = \delta_1 + a . h_1$

1.denklemden;

$f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$

$-\delta_0 . h_0 - \delta_1 . h_1 = a.(-(h_0 + h_1))^2 + b.(-(h_0 + h_1))$

$(h_0 + h_1).\mathrm{b} - (h_0 + h_1)^2\ \mathrm{a} = \delta_0 . h_0 + \delta_1 . h_1$

$\boldsymbol{h_0 = x_1 - x_0}$, $\boldsymbol{h_1 = x_2 - x_1}$, $\boldsymbol{\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0}}$, $\boldsymbol{\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}}$

$\boldsymbol{a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0}}$, $\boldsymbol{b = \delta_1 + a . h_1}$, $\boldsymbol{c = f(x_2)}$

Böylece, aşağıdaki eşitlik elde edilir

$\boldsymbol{x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}}$ hem reel hem kompleks kökler bulunabilir.

Bu eşitlikten elde edilen köklerin hesaplanma işlemi için durdurma kriteri;

$\boldsymbol{\varepsilon_a = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| . \%100}$

Bu eşitlikte işaretten dolayı iki kök elde edilir. Müller yönteminde işaret b'nin işaretine uyacak şekilde seçilir. Bu seçim en büyük payda değerini x_2'ye en yakın kök değeri tahminini verecektir.

Bir kere x_3 belirlenince süreç tekrarlanır. Bu durumda aşağıdaki stratejiler kullanılır;
1)Eğer reel kökler belirleniyorsa, yeni kök tahmini x_3'e en yakın iki orijinal noktayı seçeriz.
2)Eğer hem reel hem de kompleks kökler hesaplanıyorsa, sıralamalı bir yaklaşım kullanılır.

Örnek 1.

Müller yöntemini kullanarak $x_0 = 4{,}5 \quad x_1 = 5{,}5 \quad x_2 = 5$ sırasıyla İlk tahminleriyle $f(x) = x^3 - 13x - 12$ denkleminin köklerini belirleyiniz. $\varepsilon_a = 0{,}03$ (kökler, -3, -1 ve 4'tür)

Önce tahminlerden fonksiyonun değerlerini hesaplayalım;

$f(x_0) = f(4.5) = 20.625,$

$f(x_1) = f(5.5) = 82.875,$

$f(x_2) = f(5) = 48$

Tahmin adımlarında;

$h_0 = 5{,}5 - 4{,}5 = 1 \quad h_1 = 5 - 5{,}5 = -0{,}5$

$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \delta_0 = \frac{82.875-20.625}{5{,}5-4{,}5} = 62.25$

$\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad \delta_1 = \frac{48-82.875}{5-5{,}5} = 69.75$

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0}, \quad b = a h_1 + \delta_1, \quad c = f(x_2)$$

$a = \frac{\delta_1-\delta_0}{h_1+h_0} = \frac{69.75 - 62.25}{(-0{,}5)+1} = 15$

$b = a.h_1 + \delta_1 = 15.(-0{,}5) + 69{,}75 = 62{,}25$

$c = f(x_2) = 48$

$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$ denkleminde diskriminantın karesi denenmelidir

$\left|b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right| > \left|b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right|, \quad \sqrt{62{,}25^2 - 4.15.48} = 31{,}54461,$

$|62{,}25 + 31{,}54461| > |62{,}25 - 31{,}54461|,$

olduğundan paydada pozitif değer kullanılmıştır.

$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} = 5 + \frac{-2.(48)}{62{,}25+31{,}54461} = 3{,}976487$

Hata kestirimi gerçekleştirilir;

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| * \%100 = \left|\frac{3{,}976487 - 5}{3{,}976487}\right| * \%100 = \left|\frac{-1{,}023513}{3{,}976487}\right| * \%100 = 25{,}74\%$$

Hata çok büyük olduğu için yeni değerler hesaplanır. Bu işlemler için x_0 yerine x_1, x_1 yerine x_2, , x_2 yerine x_3. Bundan sonra yeni iterasyon;

$x_0 = 5{,}5 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = 3{,}976487$ değerleriyle devam eder.

Hata oranının makul düzeylere indiği adımlarda $x_n = 4$ olarak bulunur.

n	x_0	x_1	x_2	h_0	h_1	δ_0	δ_1	a	b	c	x_3	$\varepsilon_a(\%)$
1	4,5	5,5	5	1	-0,5	62,25	69,75	15	62,25	48	3,97	25,74
2	5,5	5	3,97	-0,5	-1,02	69,75	47,69	14,48	32,88	-0,82	4	0,62
3	5	3,97	4	-1,02	0,02	47,69	34,73	12,98	35,05	0,037	4	0,026

$x = 4$ şeklinde bulunur.

5.8. Genelleştirilmiş Newton-Rapson Yöntemi

Doğrusal olmayan denklem takımlarının çözümünde en çok kullanılan yöntemdir.

$f(x,y) = 0$

$g(x,y) = 0$ denklemlerinin yaklaşık kökleri; x_0 , y_0 ise

$\boldsymbol{x_1 = x_0 + \Delta_x,}$

$\boldsymbol{y_1 = y_0} + \Delta_y$, düzeltilmiş kök için yukarıdaki denklemlerden;

$\boldsymbol{f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = 0}$

$\boldsymbol{g(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = 0}$ bu fonksiyonların Taylor serisi açınımları;

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = f(x_0, y_0) + \frac{\Delta_x}{1!}\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_x} + \frac{\Delta_y}{1!}\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_y} + \cdots$$

$$g(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = g(x_0, y_0) + \frac{\Delta_x}{1!}\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_x} + \frac{\Delta_y}{1!}\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_y} + \cdots$$

$\Delta_x\ ve\ \Delta_y$ çok küçük sonlu farklar olduğundan $\Delta_x\ ve\ \Delta_y$ nin kuvvetlerinin olduğu terimler terkedilir.

$$f(x_0, y_0) + \Delta_x \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_x} + \Delta_y \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_y} = 0$$

$$g(x_0, y_0) + \Delta_x \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_x} + \Delta_y \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_y} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Bu noktadan sonra doğrusal denklem takımlarının çözümünde kullanılan yöntemler kullanılabilir. Mutlak hata kontrolü yapılarak $\varepsilon < |\Delta_x|$, $\varepsilon < |\Delta_y|$ oluncaya kadar iteratif çözüm yapılır.

Örnek;

$f(x, y) = x^2 + y - 3 = 0$

$g(x, y) = y^2 + x - 5 = 0$

denklem takımının $x_0 = 0{,}6 \ ve \ y_0 = 1{,}5$ noktası civarındaki kökünü $\varepsilon = 0{,}08$ mutlak hatasıyla bulunuz.

$x_0 = 0{,}6 \ ve \ y_0 = 1{,}5$ için;

$f(x_0, y_0) = 0{,}6^2 + 1{,}5 - 3 = -1{,}14$,

$g(x_0, y_0) = 1{,}5^2 + 0{,}6 - 5 = -2{,}15$ hesaplanır. Türevler alınır.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_x} = 2 * x = 2 * 0{,}6 = 1{,}2 \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial_y} = 1$$

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_x} = 1 \qquad \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial_y} = 2 * y = 2 * 1{,}5 = 3$$

Matris formuna yerleştirilir.

$$\begin{bmatrix} 1{,}2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1{,}14 \\ -2{,}15 \end{bmatrix}$$

$\Delta_x = 0{,}489$, $\Delta_y = 0{,}554$

Bir adım sonraki x_1 y_1 değerleri hesaplanır.

$x_1 = x_0 + \Delta_x = 0{,}6 + 0{,}488 = 1{,}089$

$y_1 = y_0 + \Delta_y = 1{,}5 + 0{,}553 = 2{,}054$

$f(x_1, y_1) = 0{,}239, \quad g(x_1, y_1) = 0{,}31$ hesaplanır.

Türev ifadesinde değişenler tekrar hesaplanırsa;

$$\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial_x} = 2 * x = 2 * 1{,}088 = 2{,}177$$

$$\frac{\partial g(x_1, y_1)}{\partial_y} = 2 * y = 2 * 2{,}05 = 4{,}11$$

$$\begin{bmatrix} 2{,}177 & 1 \\ 1 & 4{,}11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}239 \\ 0{,}31 \end{bmatrix}$$

$\Delta_x = 0{,}085, \ \Delta_y = 0{,}054 \qquad \Delta_x < \varepsilon \ ve \ \Delta_y < \varepsilon$ olmadığından işleme devam edilir.

$$x_2 = x_1 + \Delta_x = 1{,}088 + (-0{,}07) = 1{,}004$$

$$y_2 = y_1 + \Delta_y = 2{,}054 + (-0{,}54) = 2$$

n	x_0	y_0	Δx	Δy
1	0,6	1,5	0,4885	0,5538
2	1,0885	2,0538	0,0848	0,054
3	1,0037	1,9998	0,0037	0,0002

$x = 1$, $\ y = 2$ şeklinde bulunur.