KIYI VE LİMAN YAPILARI
INS-449

DR. ÖĞR. ÜYESİ KAĞAN CEBE

DERS-3

- POTANSİYEL AKIM
- KÜÇÜK GENLİKLİ DALGA TEORİSİ

KAYNAKLAR:

- YÜKSEL,Y. & ÇEVİK,E. KIYI MÜHENDİSLİĞİ, BETA YAY.
- ERGİN, A. COASTAL ENGINEERING, METU PRESS.

POTANSİYEL AKIM

Dalga teorilerinin çoğu potansiyel akım teorisi esas alınarak geliştirilmiştir. Potansiyel akım ϕ (phi) potansiyel fonksiyonundan türetilen hız bileşenleri ile tariflenen çevrintisiz bir akımdır. Bernoulli denklemi tüm akım alanı içinde geçerlidir. Akım ağı ve Bernoulli denkleminden akım alanına ait hız ve basınç değişimleri elde edilebilir.

Süreklilik denklemi $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho \cdot \vec{V}\right) = 0}$

Daimi akım kabulü $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0}$ $\Rightarrow$ $\Downarrow$

Sıkıştırılamaz akım $\boxed{\rho = Sb}$ $\Rightarrow$ $\Downarrow$

$\boxed{\nabla \vec{V} = 0}$

Çevrisiz (irrotasyonel) akım $\boxed{\nabla \times \vec{V} = 0}$

$\Downarrow$

Hız potansiyeli $\boxed{\vec{V} = \nabla \phi}$ $\Rightarrow$ $\Downarrow$

$\nabla\left(\nabla \phi\right) = 0$

Laplace denklemi $\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$

POTANSİYEL AKIM

Laplace Denklemi:

$$\nabla^2\phi = 0, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

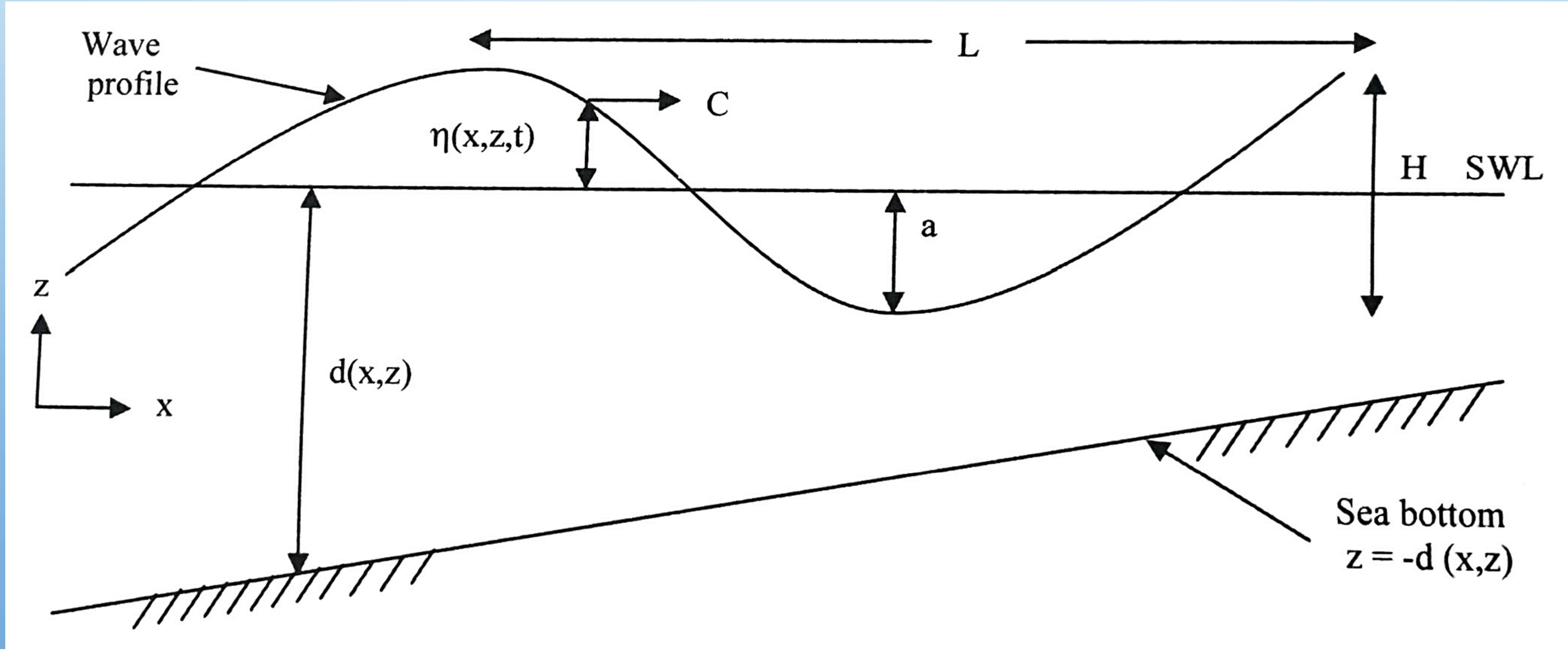
Potansiyel akım, ϕ (phi) hız potansiyeli ve ψ (psi) akım fonksiyonu ile tariflenebilir. ϕ (phi) hız potansiyeli ve ψ (psi) akım fonksiyonunun uygulanması sadece 2 boyutlu akım V=f(x,z) için uygun olabilmektedir. 2 boyutlu akım için Laplace denkleminin çözümünden elde edilen hız değerleri Bernoulli denkleminde yerine konursa akım alanındaki basıncın değişimi belirlenebilir.

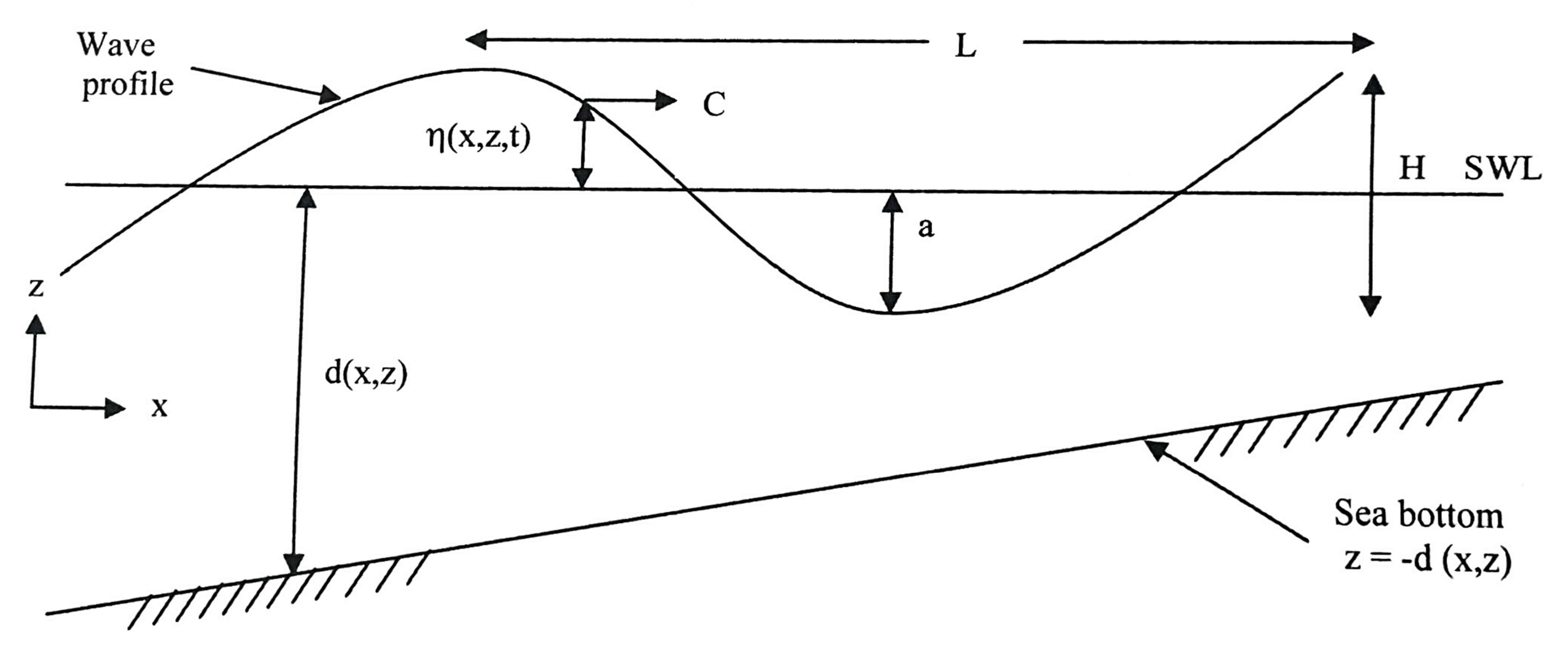
Bernoulli Denklemi: (kararsız akım için)

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{P}{\rho} + gz = 0$$

LİNEER DALGA TEORİSİ

2 boyutlu ve ideal akışkan için ifade edilebilen en basit teoridir. Dalgalar uzun mesafeler boyunca enerji kaybına uğramadan ilerler. Dalga hareketinde yüzeysel gerilme etkisi ya da viskozite etkisinin önemli değildir. Bu nedenle potansiyel (çevrintisiz iki boyutlu) akım kabulü yapılarak bir teori geliştirilmiştir. Dalga profiline ait tanımları hatırlarsak:





d: derinlik, deniz tabanı ile SSS(SWL) arasındaki mesafe

$\eta(x,z,t)$ (eta): dalga profili, su yüzeyinin zamana ve konuma bağlı olarak SSS'ye göre düşey deplasmanı

H: dalga yüksekliği, ardışık iki dalga tepesinin ya da çukuru arasındaki düşey mesafe

a: dalga genliği, küçük genlikli dalgalar için dalga yüksekliğinin (H) yarısıdır

L: dalga uzunluğu, ardışık iki dalga tepesinin ya da çukuru arasındaki yatay mesafe

T: dalga periyodu, aynı enkesitten ardışık iki tepe ya da çukurun geçmesi için gereken zaman aralığı

C: dalga yayılma hızı (L/T), k: dalga numarası ($2\pi/L$), ω (omega): açısal frekans ($2\pi/T$)

LİNEER DALGA TEORİSİ

Yapılan kabuller:

- Dalgalar uzun mesafeler boyunca enerji kaybına uğramadan ilerler.
- Dalga hareketinde yüzeysel gerilme etkisi ya da viskozite etkisinin önemli değildir.
- Çevrintisiz, iki boyutlu akımdır.
- Dalga yüksekliği (H), dalga boyu (L) ve su derinliği (d) ile karşılaştırıldığında çok küçüktür:
- Dalga dikliği çok küçüktür.
- Dünyanın dönmesinden kaynaklanan Coriolis etkisi ihmal edilir.
- Yüzeydeki basınç üniform ve sabittir.
- Dalgalar y ekseninde bir düzlem içinde hareket eder.

LİNEER DALGA TEORİSİ

2 boyutlu çevrintisiz akım için Süreklilik Denklemi:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0}$$

2 boyutlu akım için Laplace Denklemi:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0}$$

Kararsız akım için Bernoulli Denklemi: ikinci dereceden hız terimleri ihmal edilirse

$$\boxed{-\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{P}{\rho}+gz=0}$$

Yukarıdaki denklemler -d ≤ z ≤ η ve -∞ < x < +∞ aralığında çözülmesi gerekir. Çözümlerde sınır şartlarından yararlanılacaktır.

KÜÇÜK GENLİKLİ DALGA TEORİSİ

Sınır Koşulları:

Deniz Tabanı: Deniz tabanı yatay, rijit ve geçirimsiz olarak kabul edilir. Bu durumda tabanda bulunan akışkan partikülünün düşeydeki hızı sıfır olacaktır.

$$\boxed{w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = -d}$$

Serbest Yüzeyde Kinematik Şart: Serbest yüzeyde bulunan akışkan partikülü hareketi boyunca yüzeyde kalır. Yani serbest yüzey aynı zamanda bir akım çizgisidir. Yüzey eğimi çok küçüktür ve ihmal edilebilir.

$$\boxed{z = \eta(x, z, t), \qquad z\text{-}\ \eta(x, z, t) = 0}$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + \cancel{\frac{\partial \eta}{\partial x}} dx}$$

$$\boxed{w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t}}$$

Serbest Yüzeyde Dinamik Şart: Su yüzeyi üzerinde atmosfer olduğu ve rüzgar etkisinin ihmal edildiği varsayımıyla yüzey boyunca basınç sabittir. Bernoulli denkleminde p=0 olarak çözüm yapılır.

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} - \cancel{\frac{P}{\rho}} - g\eta = 0}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Periyodiklik Sınır Şartı: Verilen bir anda x yönünde bir dalga boyu (L) mesafede iki ayrı noktada akım şartları aynı kabul edilir.

$$\boxed{\phi_x(\mathrm{x, z, t}) = \phi_x(\mathrm{x{+}L, z, t})}$$

$$\boxed{\phi_x(\mathrm{x, z, t}) = \phi_x(\mathrm{x, z, t{+}T})}$$

KÜÇÜK GENLİKLİ DALGA TEORİSİ

2 boyutlu çevrintisiz akım için verilen sınır koşullarına göre dalga profili için Laplace denklemi çözülür. Periyodiklik şartını sağlamak için dalga profili sinüs ya da cosinüs denklemi olarak elde edilir.

$$\boxed{\eta = \mathrm{a} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

ya da

$$\boxed{\eta = \mathrm{a} \cdot \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

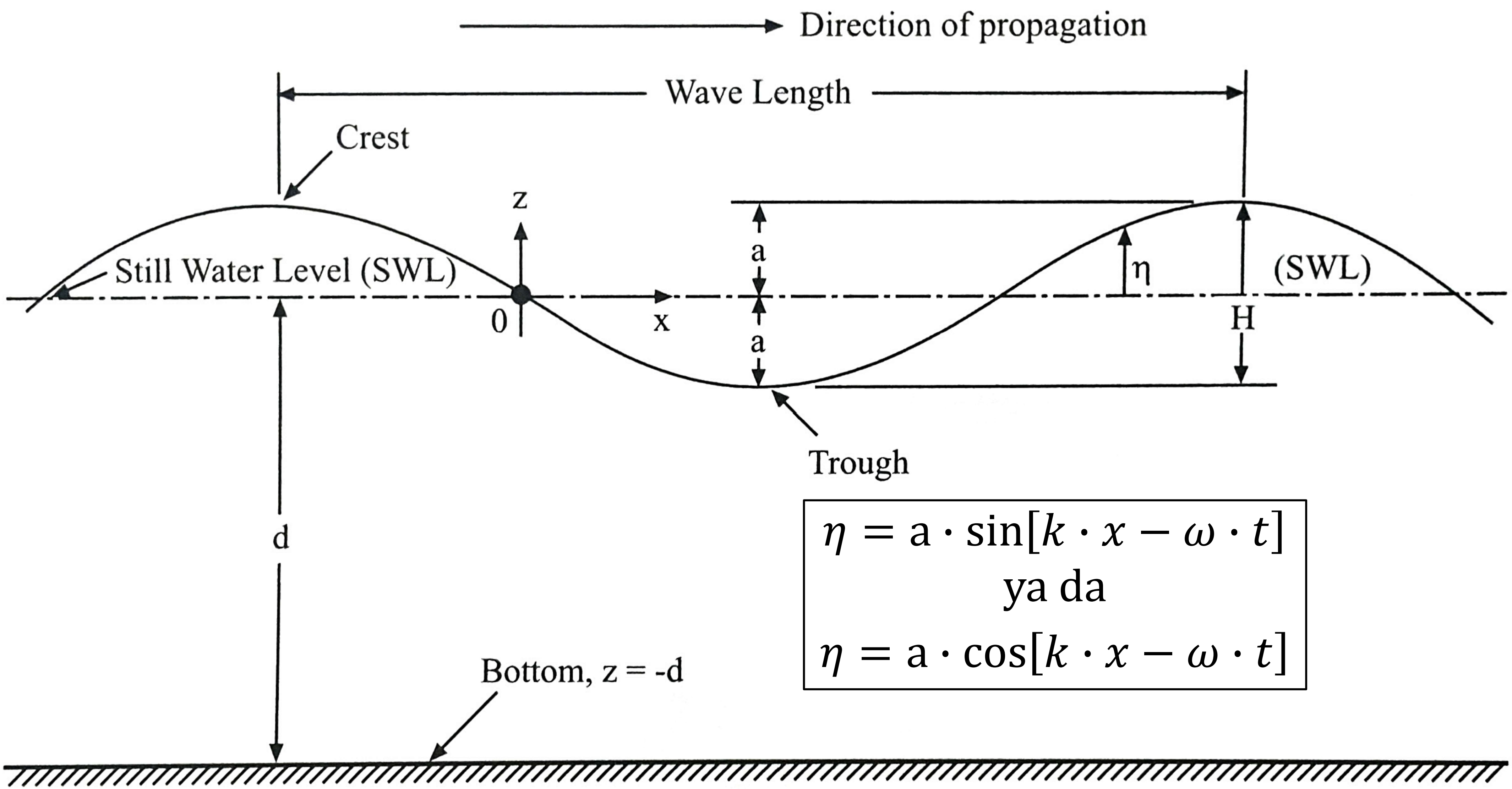
Periyotları belirleyici olarak denklemde dalga numarası ($k=2\pi/L$) ve açısal frekans ($\omega=2\pi/T$) parametreleri kullanılır.

$$\boxed{\eta = \mathrm{a} \cdot \sin[k \cdot x - \omega \cdot t]}$$

ya da

$$\boxed{\eta = \mathrm{a} \cdot \cos[k \cdot x - \omega \cdot t]}$$

Bu ifade x'e ve t'ye göre periyodiktir. Dalga ilerlemesi ile birlikte hareket edildiğinde dalga formuna göreceli olarak tüm zamanlarda gözlemcinin konumu sabit kalacaktır.



$$\eta = \mathrm{a} \cdot \sin[k \cdot x - \omega \cdot t]$$

ya da

$$\eta = \mathrm{a} \cdot \cos[k \cdot x - \omega \cdot t]$$

Figure. 4.3 Definition Sketch for Sinusoidal Wave (SPM, 1984)

KÜÇÜK GENLİKLİ DALGA TEORİSİ

X doğrultusunda hareket eden dalga için hız potansiyeli Bernoulli denkleminde yerine konursa küçük genlikli dalga için dalga yayılma hızı ve dalga boyu formülü elde edilir:

dalga yayılma hızı :

$$\boxed{c = \frac{g \cdot T}{2\pi} \cdot tanh[k \cdot d]}$$

dalga boyu (L=c*T) :

$$\boxed{L = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \cdot tanh[k \cdot d]}$$

Örnek: $\eta = \sin(0.1047x - 0.6981t)$ olarak verilen bir dalga profilinde η ve x (m), t (sn) birimindendir. Buna göre,

a) **Dalga genliğini, yüksekliğini, periyodunu ve dalga yayılma hızını belirleyiniz.**

$\eta = a\sin(kx - \omega t)$ ise dalga genliği a=1m,

$k = 2\pi/L = 0.1047$ ise L=60m,

$\omega = 2\pi/T = 0.6981$ ise T=9s

$$\boxed{\eta = \mathrm{a} \cdot \sin[k \cdot x - \omega \cdot t]}$$

b) **Dalga profilinin kaydedildiği su derinliğini belirleyiniz.**

$L_0 = 1.59 \times 9^2 = 126.36$m

$60 = 126.36 \tanh(kd) = 126.36 \tanh(0.1047d)$

$kd = 0.516 \quad d = 4.93$m

$$\boxed{L = L_0 \cdot tanh[k \cdot d]}$$

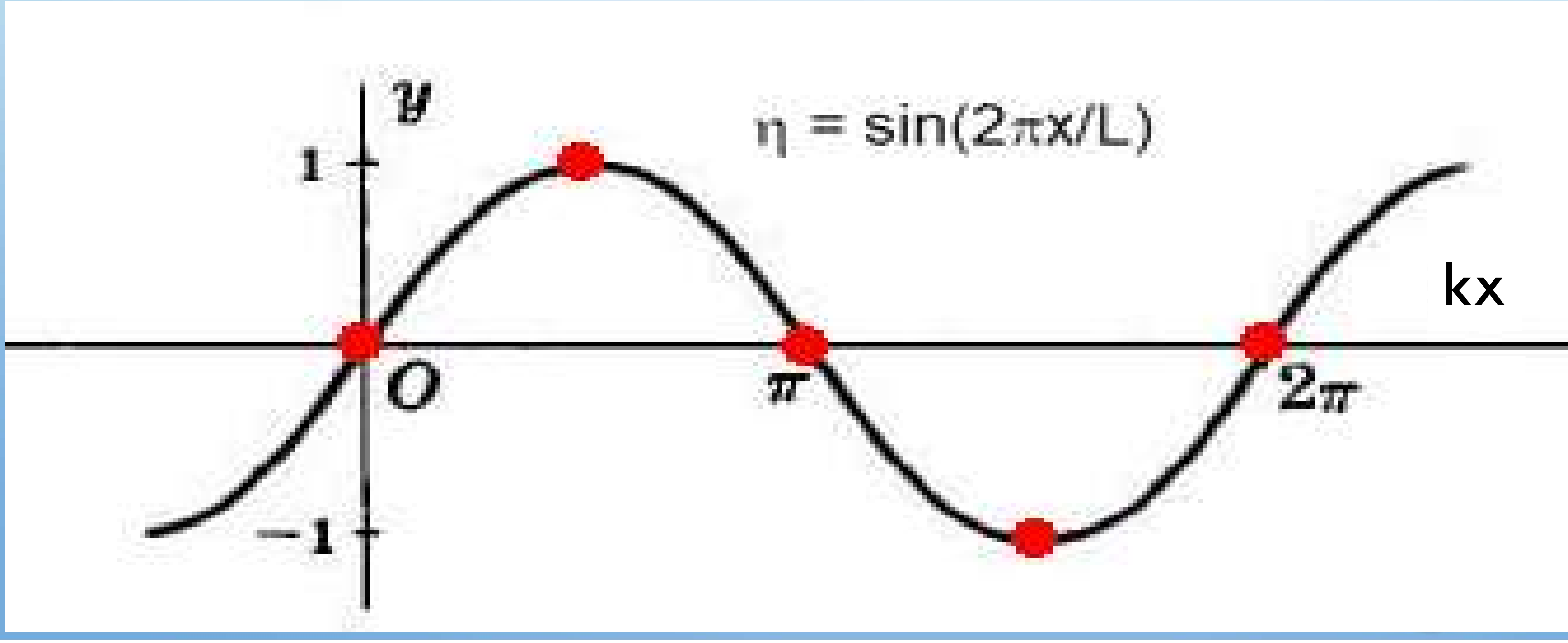
c) X ekseninde bir dalga boyu (L) uzunluk için x/L=0, ¼, ½, ¾ ve 1 için dalga profilini çiziniz.

$\eta = \sin(0.1047x - 0.6981t)$

t=0 için η= asin(kx), $\eta = \sin(2\pi x/L)$

x/L=0, $\eta = \sin(0) = 0$, x/L=1/4, $\eta = \sin(2\pi/4) = 1$, x/L=1/2, $\eta = \sin(2\pi/2) = 0$,

x/L=3/4, $\eta = \sin(6\pi/4) = -1$, x/L=1, $\eta = \sin(2\pi) = 0$,



d) x=75m'de t=9s ve t=13s için su yüzeyinin SSS'den deplasmanını hesaplayınız.

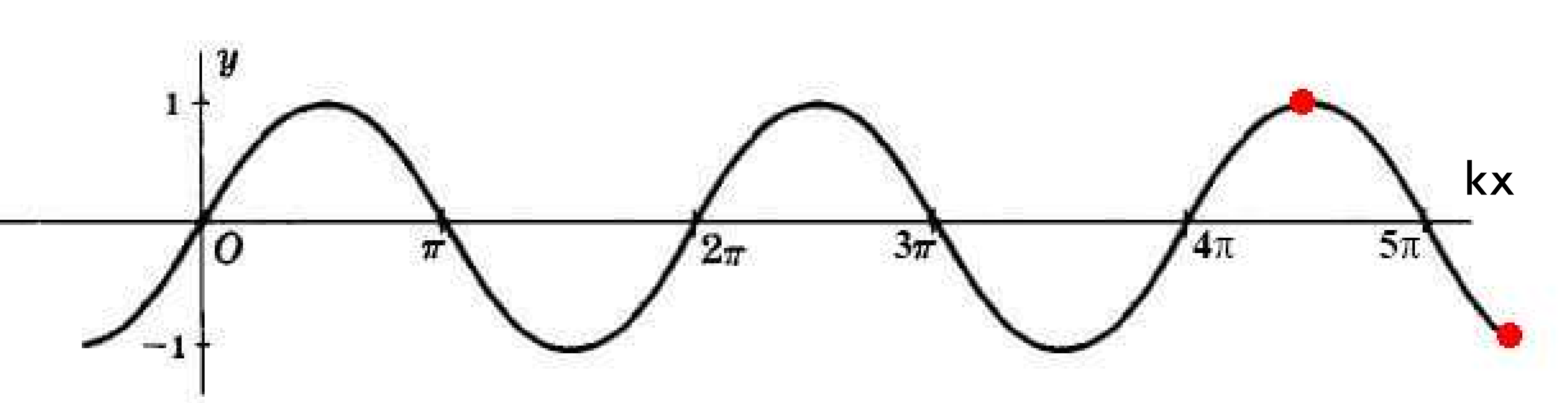
$$\boxed{\eta = \sin(0.1047x - 0.6981t)}$$

x=75m t=9s için $\eta = \sin(0.1047x75 - 0.6981x9) = \sin(14.1354)$

$\eta = \sin(4.4996\pi) = 0.99m$

x=75m t=13s için $\eta = \sin(0.1047x75 - 0.6981x13) = \sin(16.9278)$

$\eta = \sin(5.3884\pi) = -0.94m$



Örnek: Dalga genliği a=2m, periyodu T=10s ve dalga boyu L=156m olan cosinüs eğrisi formundaki küçük genlikli dalganın

a) **Dalga profil formülünü çıkartınız.**

$$\boxed{\eta = \mathrm{a} \cdot \cos[k \cdot x - \omega \cdot t]}$$

k = 2π/L = 2π/156 = 0.0403

ω = 2π/T = 2π/10 = 0.6283

$$\boxed{\eta = 2 \cdot \cos[0.0403 \cdot x - 0.6283 \cdot t]}$$

a) **t=0 ve x=78m, 156m ve 4x156m deki su yüzü yüksekliğini hesaplayınız.**

$$\boxed{\eta = 2 \cdot \cos[0.0403 \cdot x - 0.6283 \cdot t]}$$

x=78m = L/2 $\eta = 2cos(0.0403x78) =$ - 2m (çukur)

x=156m = L $\eta = 2cos(0.0403x156) =$ 2m (tepe)

x=4x156m = L $\eta = 2cos(0.0403x4x156) =$ 2m (tepe)

KÜÇÜK GENLİKLİ DALGALARIN RÖLATİF DERİNLİĞE GÖRE SINIFLANDIRILMASI

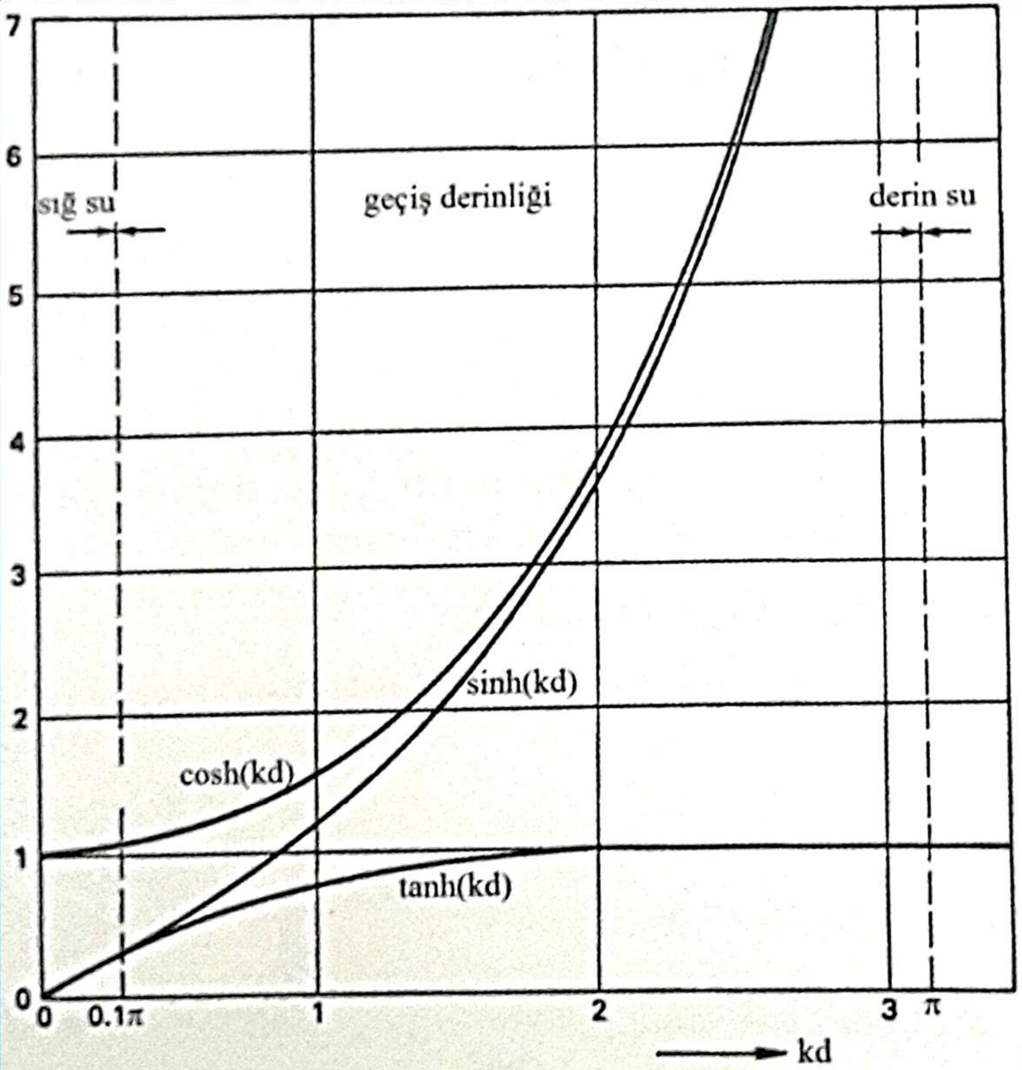
Her iki denklemin sağında bulunan tanh ifadesinin derin ve sığ su koşullarında asimtot değerlerinin uygulanmasıyla dalgaya ait özellikleri tarif eden denklemler basitleştirilebilir.

Hyperbolic functions;

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad -\infty < \sinh x < +\infty$$

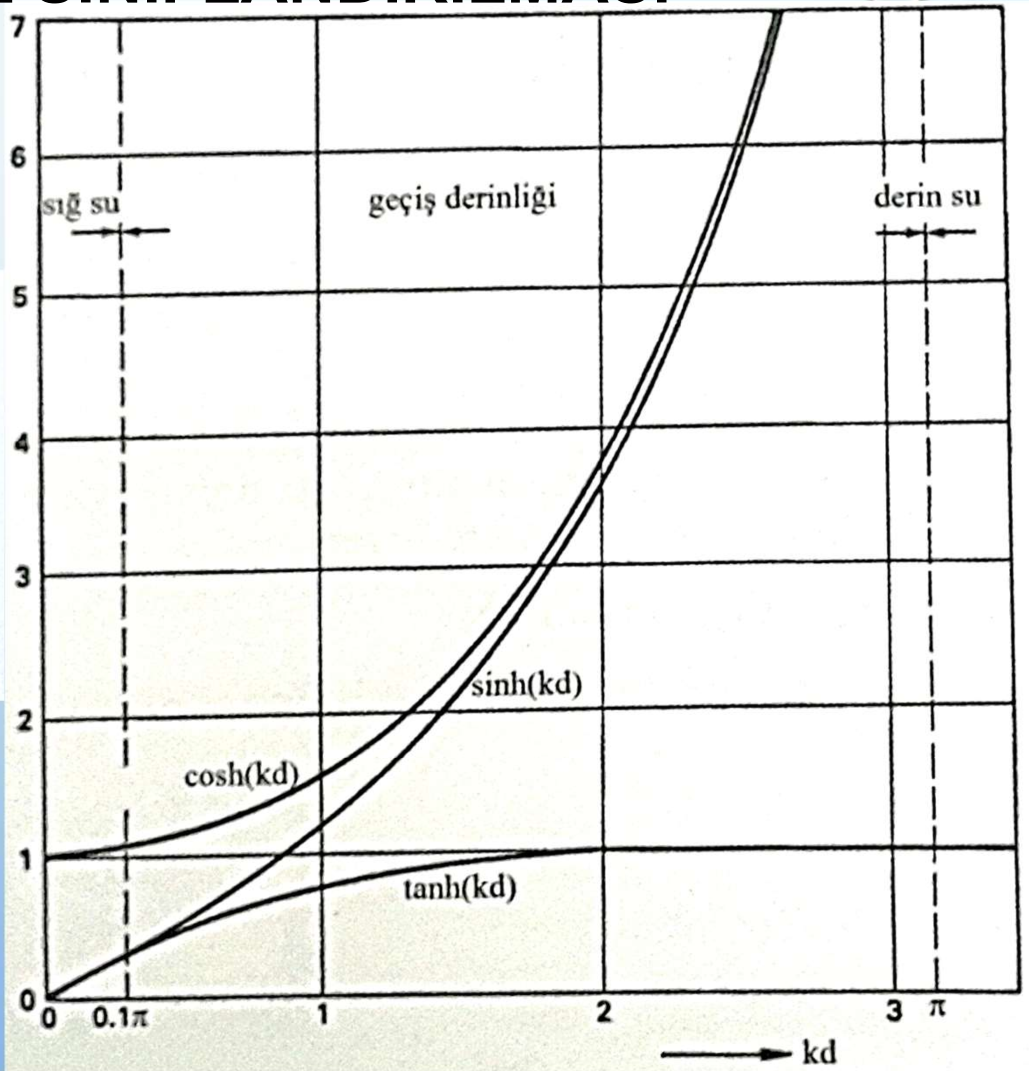
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \qquad 1.0 \le \cosh x < \infty$$

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \qquad -1 \le \tanh x \le +1$$



KÜÇÜK GENLİKLİ DALGALARIN RÖLATİF DERİNLİĞE GÖRE SINIFLANDIRILMASI

Range of d / L	Range of $kd = \frac{2\pi}{L} d$	Function		
		sinh kd	cosh kd	tanh kd
0 to 1 / 20	0 to π / 10.	k d	1	k d
1 / 2 to ∞	π to ∞	$\frac{e^{kd}}{2}$	$\frac{e^{kd}}{2}$	1



Sığ su : **$0 < kd < 0.1\pi$**
$d/L \leq 1/20$

Sığ su koşullarında
tanh(kd) = kd,

Derin su: **$kd > \pi$**
$d/L > 1/2$

Derin su koşullarında
tanh(kd) = 1

KÜÇÜK GENLİKLİ DALGALARIN RÖLATİF DERİNLİĞE GÖRE SINIFLANDIRILMASI

Tablo 2.1 Hiperbolik fonksiyonlar ve asimtotları

Hiperbolik Fonksiyonlar	Hiperbolik Fonksiyonların Açılımları	Sığ su, $0<kd<0.1\pi$, $0<\frac{d}{L}<\frac{1}{20}$		Derin su, $kd>\pi$, $\frac{d}{L}>\frac{1}{2}$	
sinh(kd)	$\frac{e^{kd}-e^{-kd}}{2}$	kd	(hata<%1.5)	$\frac{1}{2}e^{kd}$	(hata<%0.19)
cosh(kd)	$\frac{e^{kd}+e^{-kd}}{2}$	1	(hata<% 5)	$\frac{1}{2}e^{kd}$	(hata<%0.19)
tanh(kd)	$\frac{e^{kd}-e^{-kd}}{e^{kd}+e^{-kd}}$	kd	(hata<%3.3)	1	(hata< %0.4)

Sığ su koşullarında tanh(kd) = kd, derin su koşullarında tanh(kd) = 1 alınabilir.

SIĞ VE DERİN DENİZ KOŞULLARINDA TEMEL DALGA EŞİTLİKLERİ

Hiperbolik fonksiyonların asimtot değerlerini kullanacak olursak:

Sığ Su Koşullarında:

tanh (kd) ≈ kd

$$c = \frac{g \cdot T}{2\pi} \cdot tanh[k \cdot d] = \frac{g \cdot T}{2\pi} \cdot kd = \cancel{\frac{g \cdot T}{2\pi}} \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot d = \frac{g \cdot d}{c}$$

$$c^2 = g \cdot d \qquad \boxed{c = \sqrt{gd}}$$

Bu durumda dalga boyu L = cT ve $\boxed{L = T\sqrt{gd}}$

Derin Su Koşullarında:

cosh (kd) ≈ sinh (kd) ≈ e^{kd} / 2 ve tanh(kd) ≈ 1

$$L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} = 1.56 \cdot T^2 \qquad \boxed{L_0 = 1.56 \cdot T^2}$$

Bu durumda hız, c = L/T $\boxed{c_0 = 1.56 \cdot T}$

SIĞ VE DERİN DENİZ KOŞULLARINDA TEMEL DALGA EŞİTLİKLERİ

Sığ su koşullarında tanh(kd) = kd, derin su koşullarında tanh(kd) = 1 alınabilir.

SIĞ SU (d/L ≤ 1/20)	GEÇİŞ BÖLGESİ (1/20 ≤ d/L ≤ 1/2)	DERİN SU (d/L > 1/2)
$c = \sqrt{gd}$	$c = \frac{g \cdot T}{2\pi} \cdot tanh[k \cdot d]$	$c_0 = 1.56 \cdot T$
$L = T\sqrt{gd}$	$L = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \cdot tanh[k \cdot d]$	$L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} = 1.56 \cdot T^2$

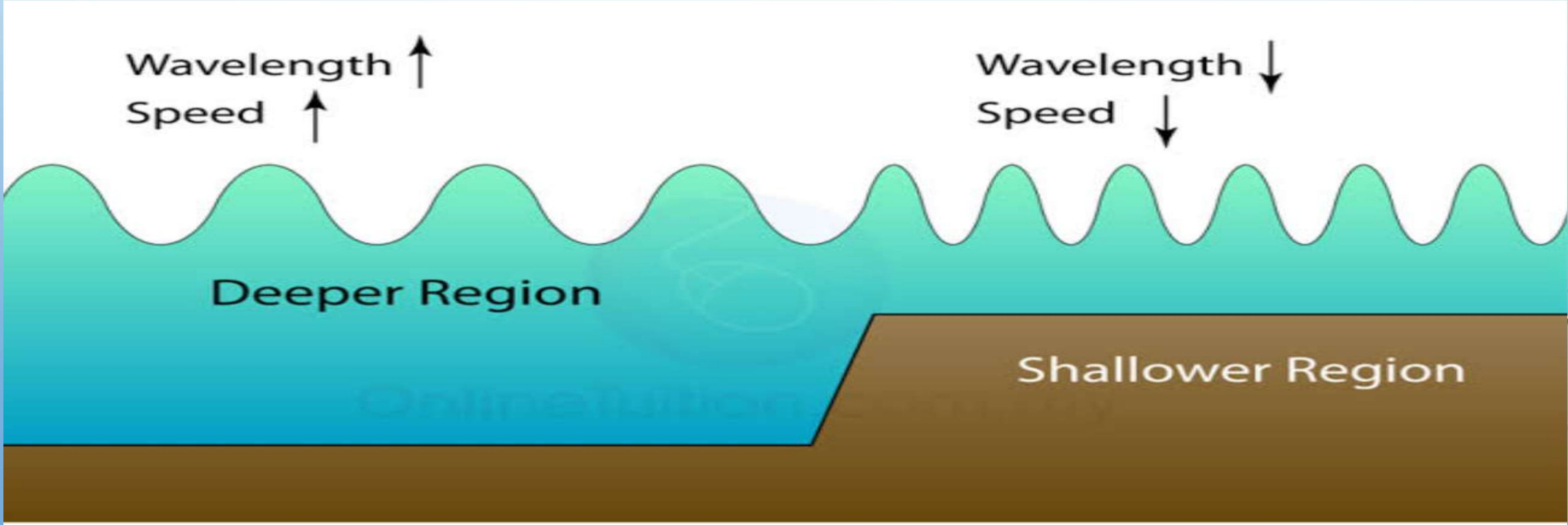
KÜÇÜK GENLİKLİ DALGALARIN RÖLATİF DERİNLİĞE GÖRE SINIFLANDIRILMASI

Ağırlık Dalgalarının derinlikle birlikte değişmeyen tek özelliği periyodudur.

Dalga periyodu (T) tüm derinliklerde sabittir.

Geçiş bölgesinde L=Lo.tanh(kd) olduğuna göre

$$\frac{L}{L_0} = \tanh(kd) < 1$$



KÜÇÜK GENLİKLİ DALGALARIN RÖLATİF DERİNLİĞE GÖRE SINIFLANDIRILMASI

Ağırlık Dalga Tablosu (Gravity Wave Table - GWT):

Geçiş bölgesinde

$$\frac{L}{L_0} = \tanh(kd) < 1$$

denklemin her iki tarafını L ve Lo'a bölüp d ile çarparsak

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L}\tanh(kd)$$

Ağırlık Dalga Tablosu (GWT)'de

Sığ su koşulları $\frac{d}{L} \leq \frac{1}{20}$ ise

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L}\tanh(kd) = \frac{1}{20}\tanh\left(\frac{2\pi 1}{20}\right) = 0.0157$$

Derin su koşulları $\frac{d}{L} \geq \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{d}{L_0} = \frac{d}{L}\tanh(kd) = \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{2\pi 1}{2}\right) = 0.5$$

Örnek: d_1=61m derinlikte periyodu T=8s olarak ölçülen dalga sisteminin d_2=30m ve d_3=1m derinlikler için dalga boyunu hesaplayınız.

$L_0 = 1.56\ T^2 = 100m$

a) $d_1/L_0 = 60/100 = 0.6 > 0.5$ derin su koşulları $L=L_0$

b) $d_2/L_0 = 30/100 = 0.3$, $0.0157 < 0.3 < 0.5$ geçiş bölgesi su koşulları

1.YÖNTEM: İterasyon

$L=L_0 \tanh(2\pi d/L) = 100 \times \tanh(2\pi x30/L)$ L için bir başlangıç değeri alalım $L=L_0$=100m olsun

1.adım $L=100\tanh(2\pi x30/100)=95.5m$ 2.adım $L=100\tanh(2\pi x30/95.5)=96.2m$

3.adım $L=100\tanh(2\pi x30/96.2)=96.1m$ 4.adım $L=100\tanh(2\pi x30/96.1)=96.1m$

2. YÖNTEM: GWT den $\tanh(2\pi d/L)=0.961$

$L=L_0 \tanh(2\pi d/L) = 100 x\ 0.961 = 96.1m$

c) $d_3/L_0 = 1/100 = 0.01 < 0.0157$ sığ su koşulları

$L= T\sqrt{gd} = 8\sqrt{9.81x1} = 25.06m$

Örnek: Bir kıyı hattı boyunca çekilen hava fotoğraflarından iki dalga sistemi gözlenmektedir. Bu dalgaların 61m ve 12m dalga boylarına sahip oldukları hava fotoğraflarından belirlenmiştir. Uzun dalganın periyodunun 10s olduğu dalganın kırılma hattına gelen dalgalar gözlemlenerek bulunmuştur. Bu dalgaların gözlemlendiği derinliği ve kısa dalga sisteminin periyodunu bulunuz.

$$\boxed{L = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \cdot tanh[k \cdot d] = \mathrm{L}_0 \cdot tanh[k \cdot d]}$$

L=61m T=10s L_0=1.56T2 = 156m

tanh(kd) = L/L_0 =61/156 = 0.391

GWT'den bu değere karşılık gelen d/L, 0.0576 ile 0.0714 arasındadır.

İnterpolasyon yapılırsa $^d/_L = 0.0576 + \frac{(0.0714-0.0576)}{(0.420-0.347)}(0.391 - 0.347)$=0.0659

d/L = 0.0659 Buradan d=4.02m bulunur.

Aynı noktada gözlenen ikinci dalga sistemi için

L=(($g \cdot T^2$)/2π)$\cdot tanh[k \cdot d]$ = 12 =(9.81xT^2/2π)tanh(2π4.02/12)

T=2.82s

Örnek: 10s periyotlu bir dalga d=200m derinlikten d=3m derinliğe doğru üniform eğimli bir sahilde ilerlemektedir. C dalga yayılma hızını ve L dalga boyunu d=200m ve d=3m için hesaplayınız.

$$\boxed{L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} = 1.56T^2}$$

L_0= 156m

d=200m d/L_0 = 200/156 = 1.2821 > 0.5 derin su koşulları $d/L = d/L_0$ $L=L_0$=156m

d=3m d/L_0 = 3/156 = 0.0192 >0.0157 geçiş bölgesi,

GWT'den enterpolasyonla: $^{d}/_{L} = 0.0403 + \frac{(0.0576-0.0403)}{(0.02-0.01)}(0.0192 - 0.01)$ =0.05622

L=3/0,05622 = 53.36m

C= L/T = 53.36 /10 = 5.33m/s

Örnek: 7s periyotlu bir dalga açıkdenizden kıyıya doğru üniform eğimli bir sahilde ilerlemektedir.

a) **Derin ve sığ su limitlerini belirleyiniz.**

derin su : $d/L > 0.5$ $L_0 = 1.56T^2 = 76.44m$ $d_0 = 38.22m$

sığ su : $d/L < 0.05$ $d/L_0 = 0.0157$ $d_s = 76.44 \times 0.0157 = 1.2m$

b) **D=50m ve d=1m de dalga yayılma hızını belirleyiniz.**

d=50m derin su koşulu $C_0 = 1.56 \times T = 1.56 \times 7 = 10.92m/s$

d=1m sığ su koşulu $C_s = \sqrt{gd} = \sqrt{9.81x1} = 3.13m/s$