

KIYI VE LİMAN YAPILARI

INS-449

DR. ÖĞR. ÜYESİ KAĞAN CEBE

DERS-6

- LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI
- DALGA ENERJİSİ

KAYNAKLAR:

- YÜKSEL, Y. & ÇEVİK, E. KIYI MÜHENDİSLİĞİ, BETA YAY.
- ERGİN, A. COASTAL ENGINEERING, METU PRESS.

LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

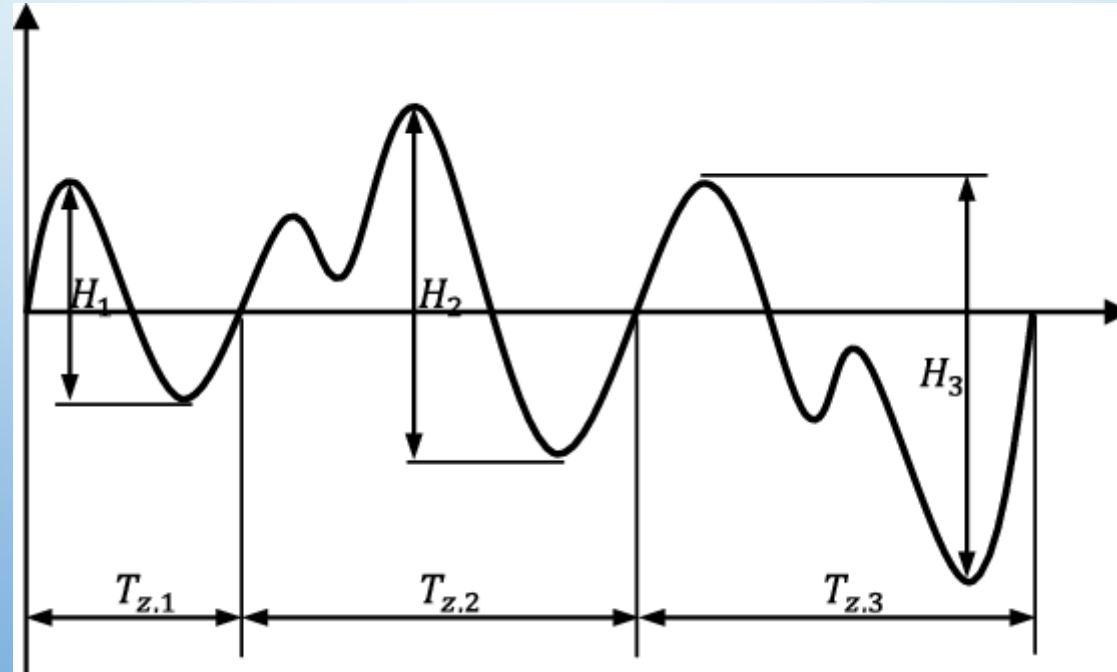
Dalga hareketinde yüzey seviyesinin değişimini lineer dalga teorisine göre küçük genlikli bir dalga için çıkarmıştık:

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\eta = a \cdot \cos[k \cdot x - \omega \cdot t]$$

Yüzeydeki su seviyesi değişimi, doğada birden fazla ilerleyen dalga tarafından oluşturulmaktadır ve düzensizdir.



LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Yüzeydeki profilin birden fazla ilerleyen dalga tarafından oluşturulduğu kabul edilirse, dalga sisteminin hız potansiyeli bu durumda tekil dalgaların potansiyellerinin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_N$$

Bu durumda yüzey su seviyesinin değişimi, akışkan partikül hızları da lineerlikten dolayı süperpoze edilebilir.

$$\eta_T = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_N$$

$$u_T = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N$$

ve

$$w_T = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_N$$

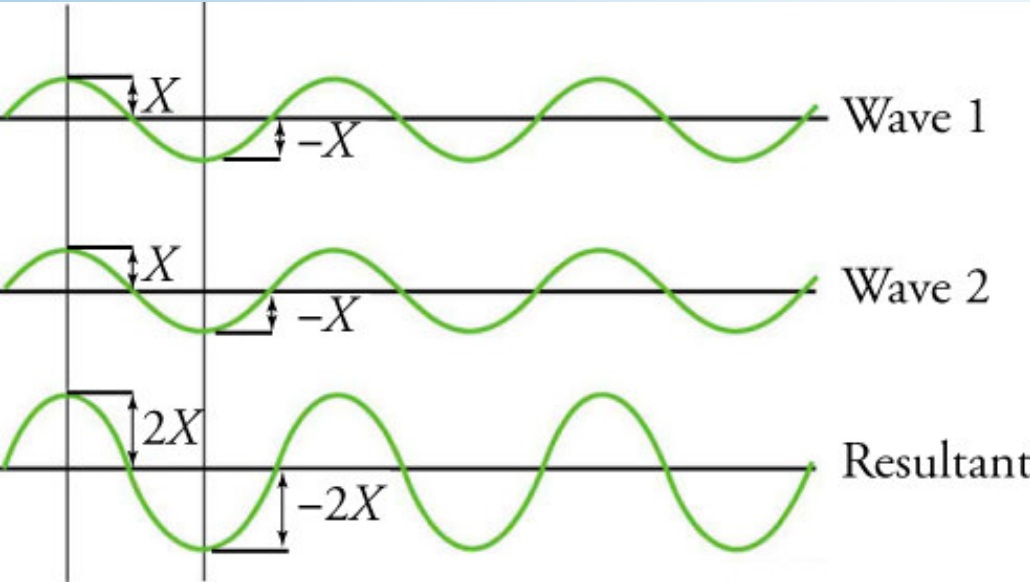
LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Aynı doğrultuda hareket eden aynı genliğe, aynı dalga boyu ve aynı periyoda sahip iki dalga için aşağıdaki süperpozisyonlar oluşur. Denklem harmonik bir denklemdir.

$$\eta_T = a_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) + a_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)$$

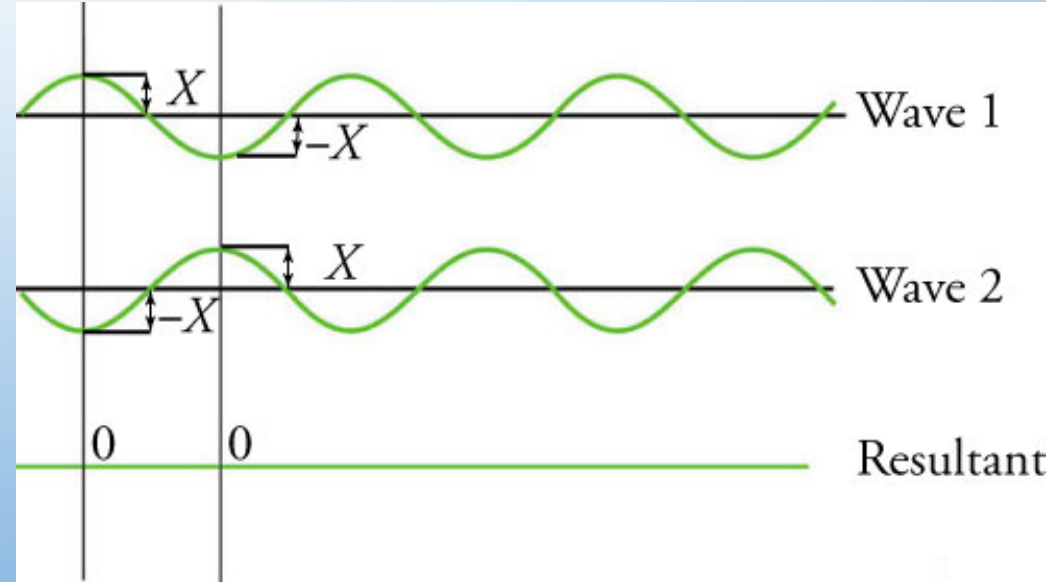
Faz farkı $(\delta_1 - \delta_2) = 0$ ise:

$$\eta_T = (a_1 + a_2) \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$



Faz farkı $(\delta_1 - \delta_2) = \pi$ ise

$$\eta_T = (a_1 - a_2) \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$



LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Aynı doğrultuda hareket eden fakat farklı periyotlara sahip iki dalga dikkate alındığında, artık iki dalga için k ve ω değerleri birbirinden farklı olacaktır.

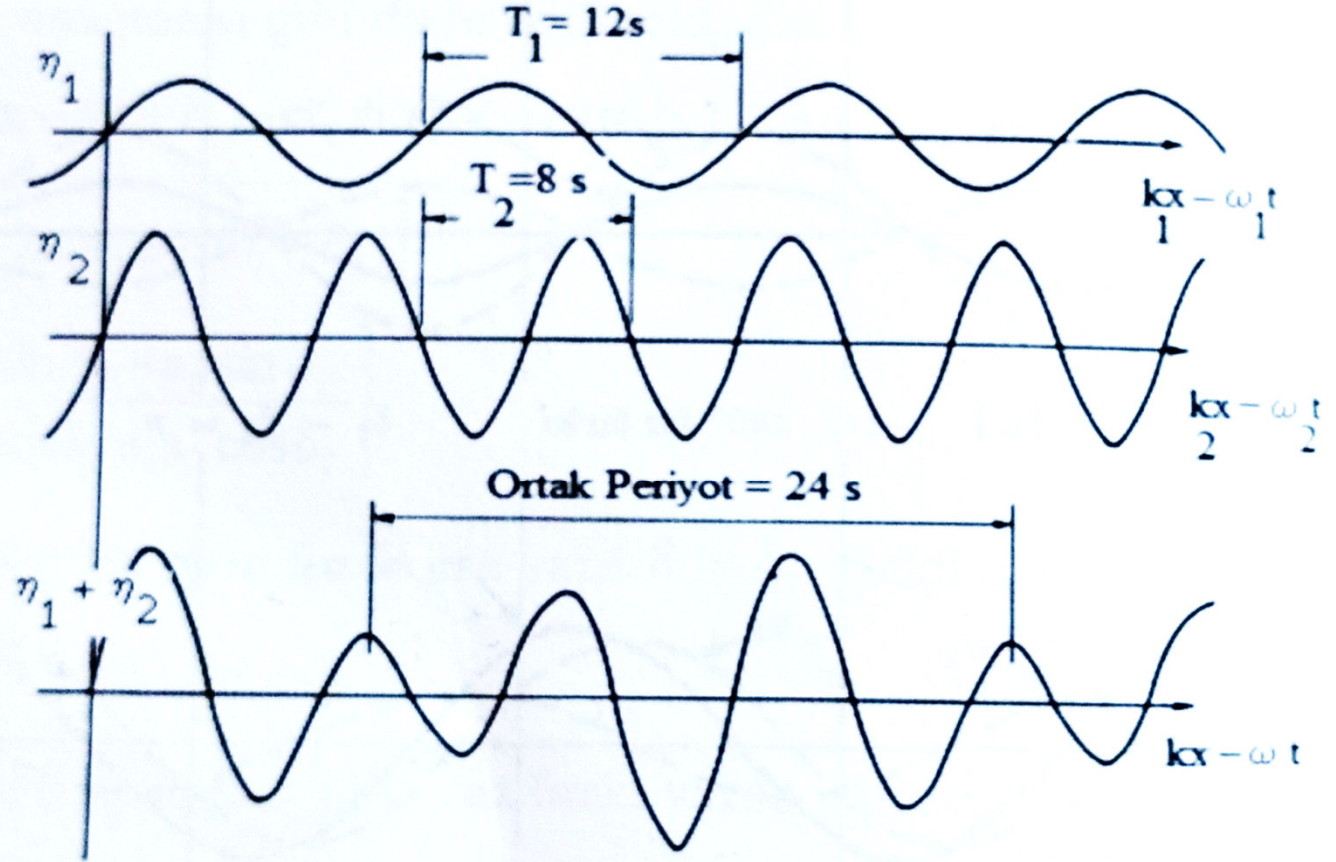
$$\eta_T = a_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1) + a_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2)$$

Artık denklem periyodun aynı olduğu durumdaki gibi harmonik denklem değildir. Ancak yine de periyodik olabilir. $\eta_T = 0$ olduğu bir nokta için analiz yaparsak, farklı k ve ω değerlerinden dolayı iki bileşen arasındaki faz ilişkisinde sürekli bir değişiklik gözlenecektir. Eğer $\eta_T = 0$ yapan ikinci bir nokta daha bulunabilirse bu durumda bu iki bileşenli dalga grubu periyodiktir diyebiliriz. Bu dalga grubunun periyodu bu durumda iki bileşenin periyodunun ortak katlarının en küçüğü olacaktır.

LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Örneğin farklı periyotlara sahip iki bileşenli bir dalga grubu düşünelim. Burada $T_1=12s$ ve $T_2=8s$ 'dir.

Bu iki dalganın süperpozisyonundan doğan dalga zarfının periyodu ise $T=24s$ 'dir.



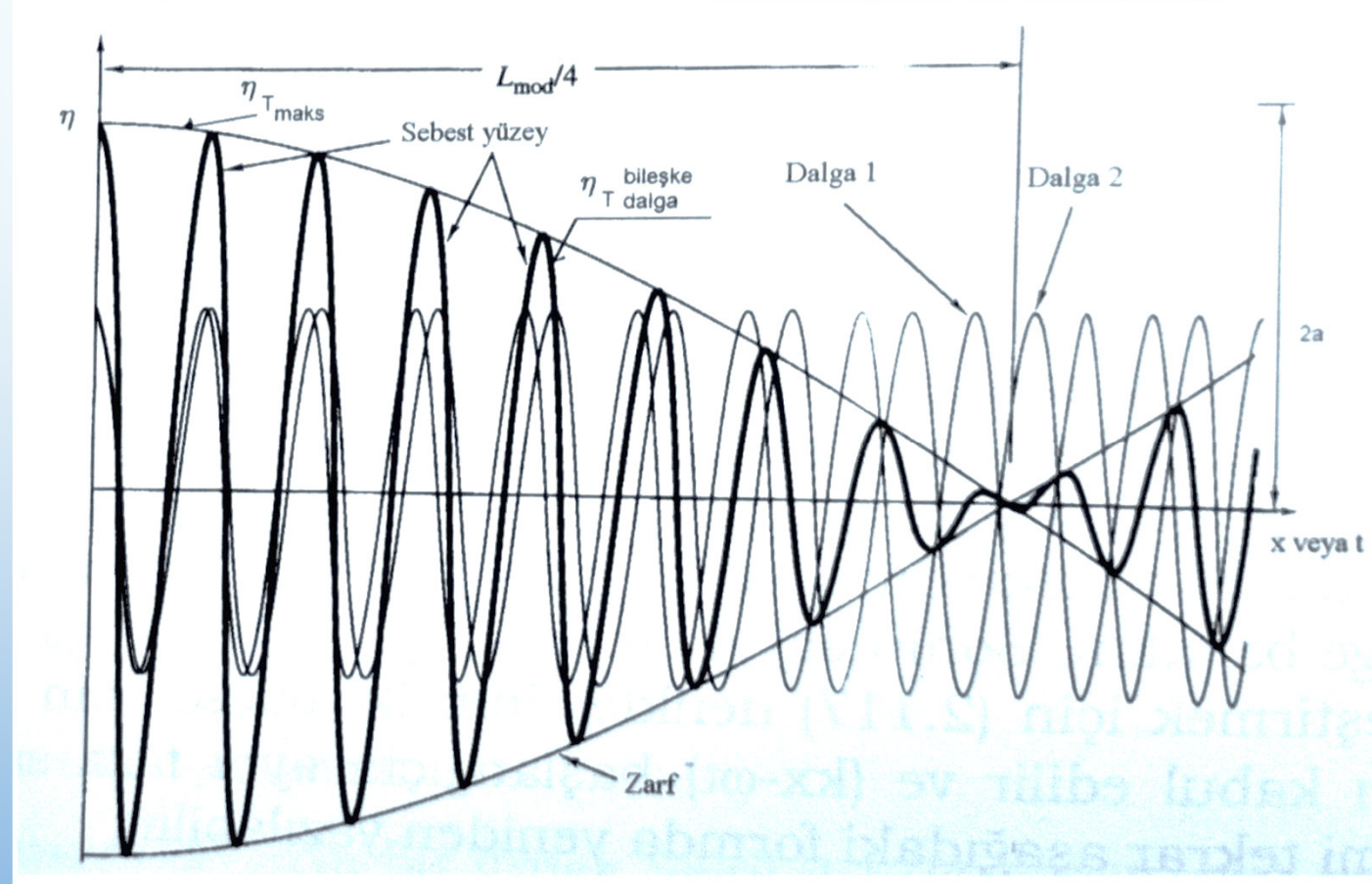
Şekil 2.17 Periyodik bileşke dalga (Ippen, 1966)

LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Bir dalga grubunun hızı genellikle tekil dalganın hızı ile aynı değildir.

Örneğin başlangıçta aynı fazda olan ve aynı genliğe sahip iki bileşenli dalga grubunun bileşkesi de sinüs dalgası şeklini almaktadır.

Bileşke dalga grubunun genliği ise 0 ile $2a$ arasında değişir.



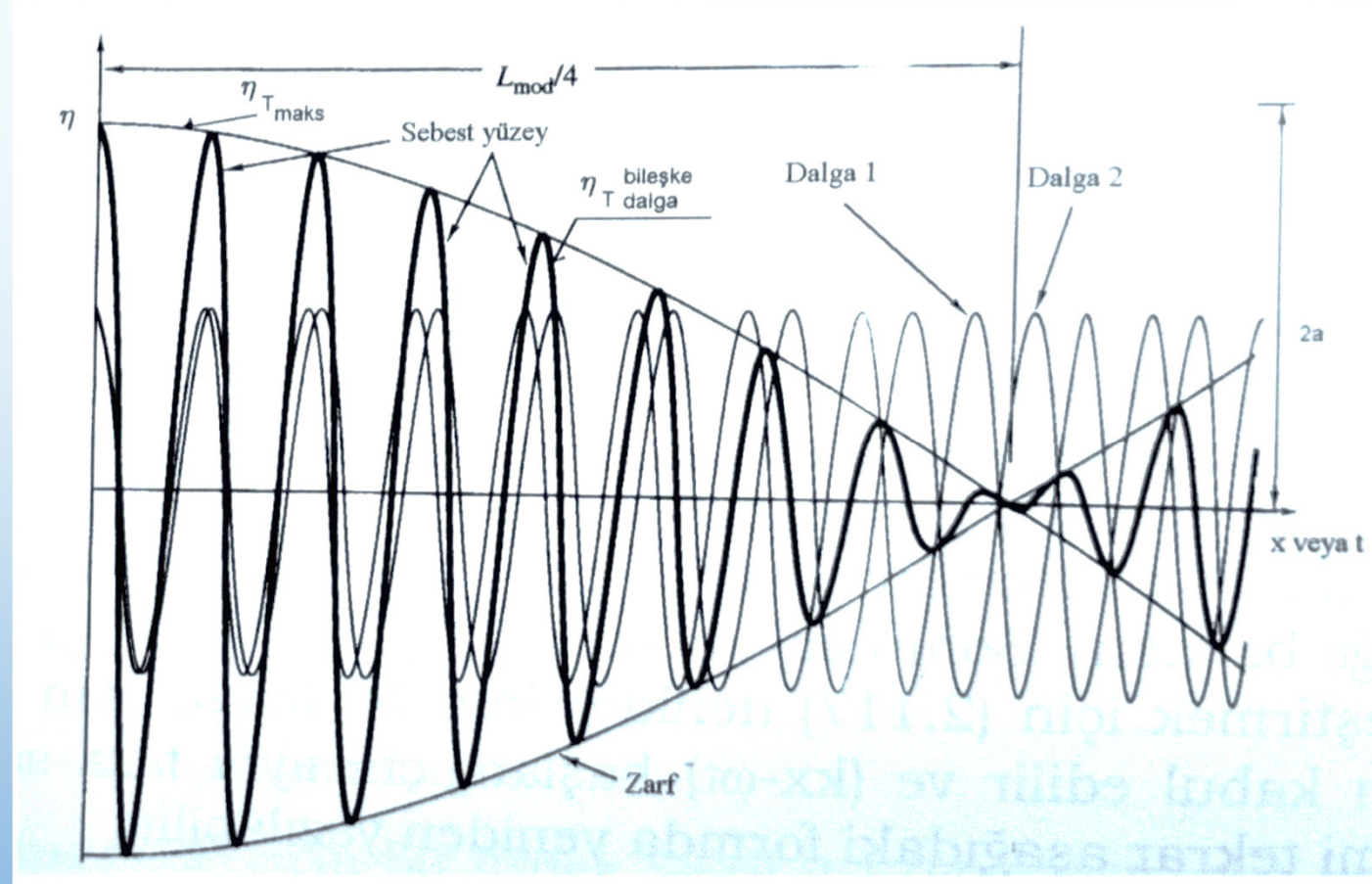
LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Bu dalga grubunun grup hızı C_g ise:

$$C_g = c \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)}_n$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

$$C_g = c \cdot n$$



LİNEER DALGALARIN SÜPERPOZİSYONU VE GRUP HIZI

Aynı doğrultuda ilerleyen birbirinden farklı periyota ve dalga numarasına sahip iki periyodik dalga sisteminin toplanması ile elde edilen dalga grubunun hızı:

$$C_g = c \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

$$C_g = c \cdot n$$

Derin Suda:

$$2kd/\sinh 2kd=0$$

$$n = \frac{1}{2} (1 + 0) = 0.5$$

$$C_g = 0.5 \cdot c$$

Sığ Suda:

$$2kd/\sinh 2kd=1$$

$$n = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$C_g = c$$

Sığ suda aynı doğrultuda ilerleyen dalga grubunun hızı, tekil dalganın hızı ile aynı iken, derin suda tekil dalgalar grup hızının 2 katı hızla hareket ederler.

DALGA ENERJİSİ

Dalga enerjisi birim genişlikte dalga boyunca su yüzeyi ile taban arasındaki su kütlesinin toplam enerjisidir.

Dalga enerjisi, tüm dalga uzunluğu boyunca, birim yüzey alanı için ortalama enerji miktarı olarak ifade edilir. Bu şekilde enerji miktarı öncelikle bir dalga boyu ve birim genişlik için potansiyel ve kinetik enerji hesaplanır ve daha sonra dalga boyu uzunluğuna bölünür.

Dalga sistemlerinin toplam enerjisi, sistemdeki iki bileşenin toplamıdır:

- **Potansiyel enerji**
- **Kinetik enerji**

POTANSİYEL ENERJİ

Serbest yüzeyde ilerleyen dalga formunun varlığından kaynaklanan enerji bileşenidir.

Akışkan sıkıştırılmaz kabulü ve yüzey gerilmesi ihmal edildiğinden dolayı,

potansiyel enerji bileşeni (PE) sadece yerçekiminden dolayıdır.

PE, suyun sakin su seviyesinden düşeyde yer değiştirmesi için yapılan iş olarak ifade edilebilir.

PE = ağırlık merkezi x yerçekimi ivmesi (g) x kütle

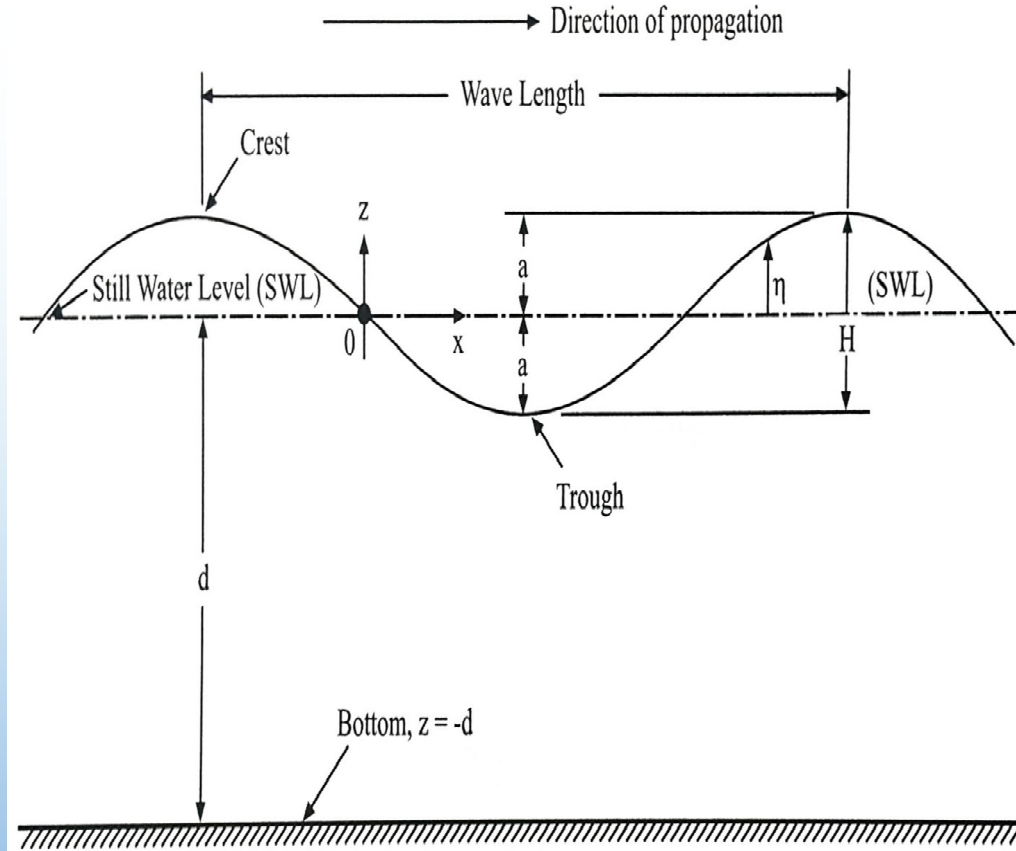


Figure. 4.3 Definition Sketch for Sinusoidal Wave (SPM, 1984)

POTANSİYEL ENERJİ

PE = ağırlık merkezi x Yerçekimi ivmesi (g) x kütle

$$dPE_1 = \left(\frac{d + \eta}{2} \right) g \cdot \rho(d + \eta) \cdot dx$$

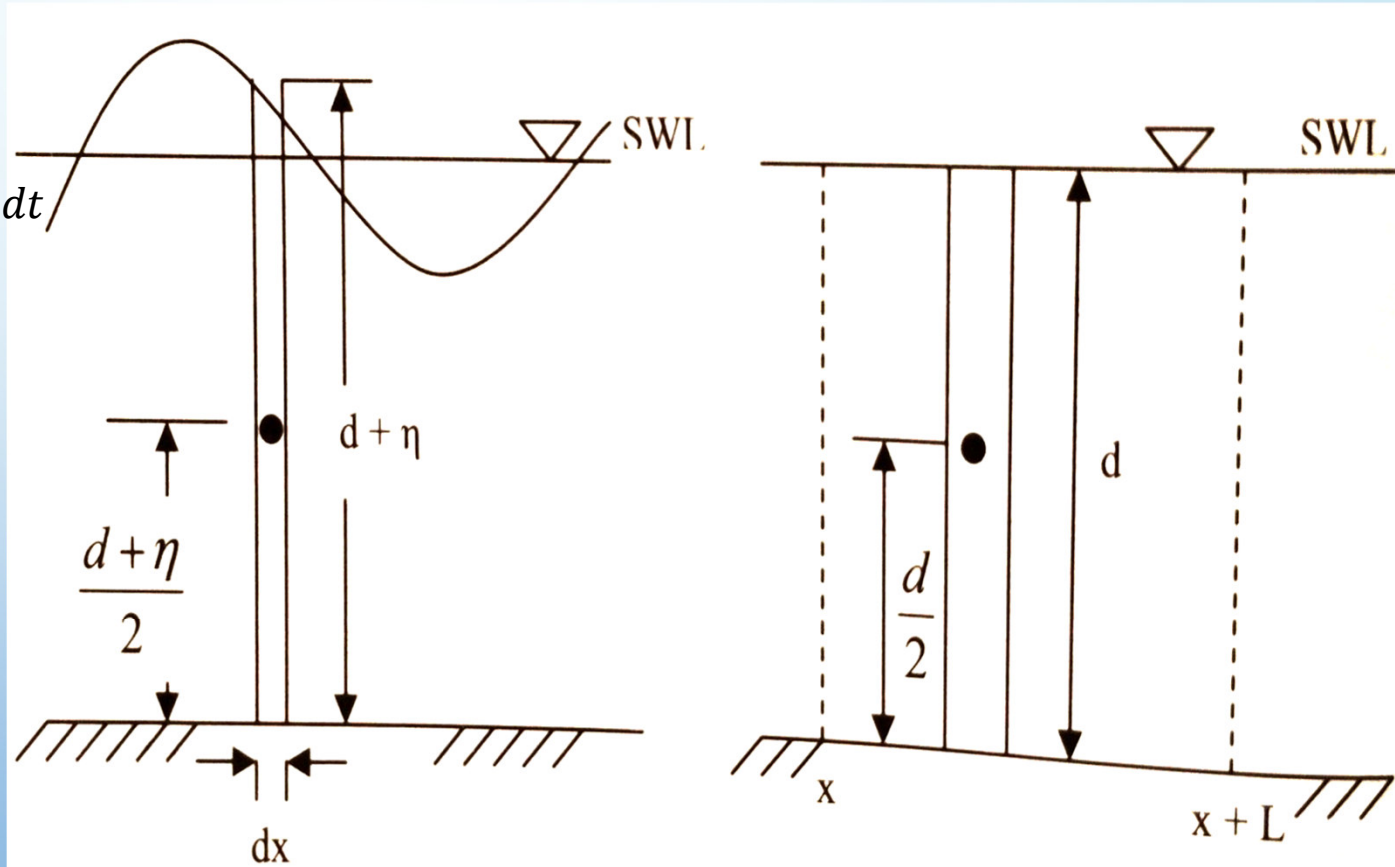
$$\overline{PE}_1 = \frac{\rho g}{2LT} \int_t^{T+t} \int_x^{x+L} (d + \eta)^2 dx \cdot dt$$

↓

$$\overline{PE}_1 = \frac{\rho g d^2}{2} + \frac{\rho g a^2}{4}$$

$$\overline{PE}_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{d^2}{2}$$

$$\overline{PE}_1 - \overline{PE}_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{16}$$



KİNETİK ENERJİ

Serbest yüzeyde ilerleyen dalga formunun altında hareket eden su partiküllerinin hızından kaynaklanan enerji bileşenidir.

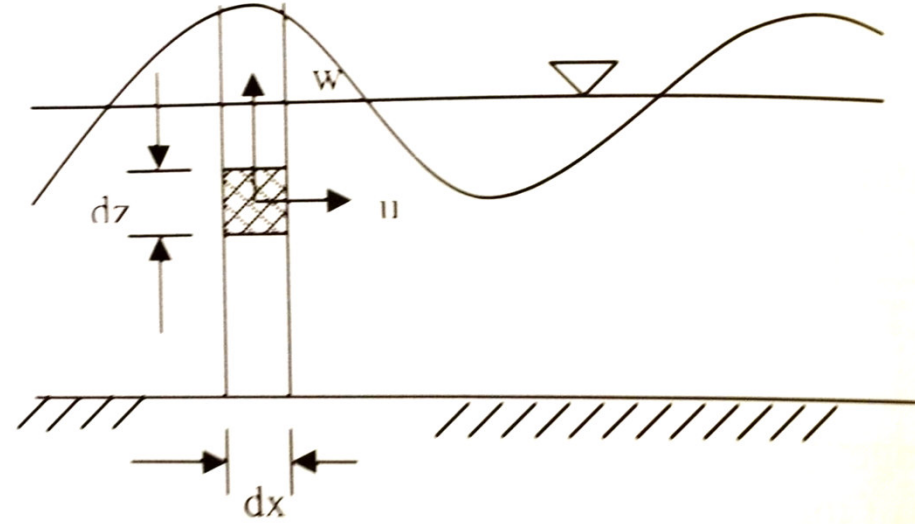
Kinetik enerji, dx uzunluğundaki küçük su elemanı için elemanın içerisindeki partiküllerin yatay ve düşeydeki hızlarına (u , w) bağlı olarak yazılabilir.

$$dKE = \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\rho \cdot dx \cdot dz$$

$$\overline{KE} = \frac{\rho}{2LT} \int_t^{t+T} \int_x^{x+L} \int_{-d}^{\eta} (u^2 + w^2) dx \cdot dz \cdot dt$$



$$\overline{KE} = \rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{16}$$



TOPLAM DALGA ENERJİSİ

Dalga enerjisi, tüm dalga uzunluğu boyunca, birim yüzey alanı için ortalama enerji miktarı olarak ifade edilir.

$$E_t = PE + KE$$

Dalga hareketinden kaynaklanan potansiyel ve kinetik enerji bir dalga boyu ve birim genişlik için ortalama enerji miktarı olarak hesaplanmıştır:

$$\overline{PE}_1 - \overline{PE}_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{16}$$

$$\overline{KE} = \rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{16}$$

$$E_t = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot L}{8}$$

ya da

$$E_t = \frac{\rho \cdot g \cdot a^2 \cdot L}{2}$$

TOPLAM DALGA ENERJİSİ

Toplam dalga enerjisini yüzey alanına bölersek Enerji Yoğunluğu ya da Spesifik Enerjiyi elde ederiz.

$$\bar{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8}$$

ya da

$$\bar{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot a^2}{2}$$

Dalganın potansiyel enerjisi, dalga yayılma hızıyla ileriye doğru yapılan harekete aktarılır. Kinetik enerji ise akışkan partiküllerinin hareketini oluşturur.

DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

Dalga ilerlemesi sırasında enerji kaybının olmadığı kabul edilerek değişken geometriye sahip kanallarda dalga özelliklerinin dönüşümleri farklı durumlar için incelenecektir.

Enerji kaybı olmadığı için tüm durumlarda toplam dalga enerjisi sabit olarak kabul edilir.

Kanallarda su derinlikleri ve kanal genişlikleri değişmesine rağmen kanal içinde ilerleyen dalganın enerjisi değişmemektedir.

DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

DURUM 1:

Su derinliği (d) sabit,
kanal genişliği (b_1 ve b_2) değişken

$$P_{w1} = P_{w2} \quad P_w = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_g$$

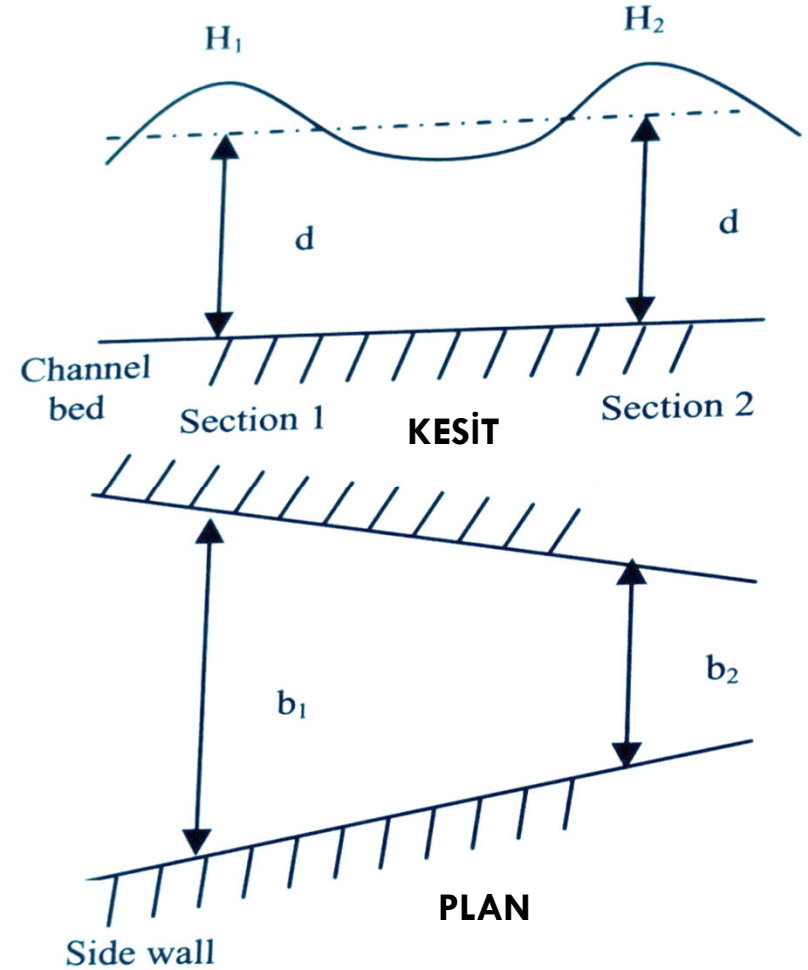
$$\frac{\rho \cdot g \cdot H_1^2}{8} C_{g1} \cdot b_1 = \frac{\rho \cdot g \cdot H_2^2}{8} C_{g2} \cdot b_2$$

$$C_g = c \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right)$$

Kanalda derinlik değişmediği için $d_1=d_2$ ve $C_{g1}=C_{g2}$

$$H_1^2 \cdot b_1 = H_2^2 \cdot b_2$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$$



DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

DURUM 2: Su derinliği (d_1 ve d_2) değişken,
kanal genişliği (b) sabit

$$P_{w1} = P_{w2} \quad P_w = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_g$$

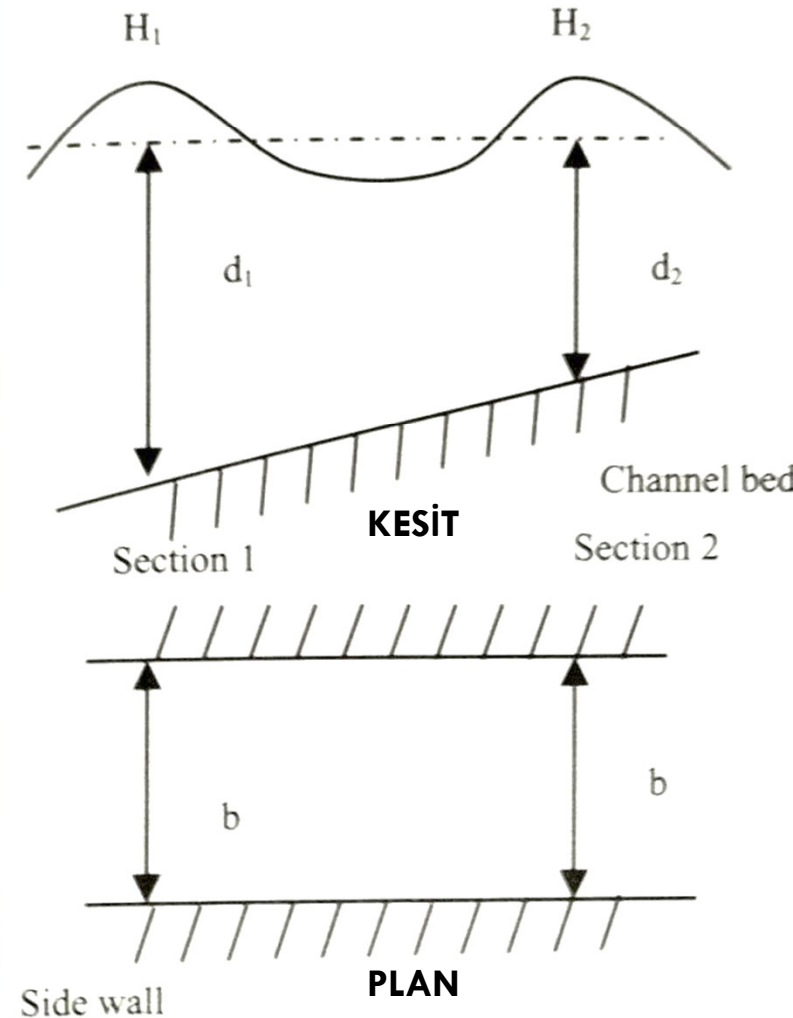
$$\frac{\rho \cdot g \cdot H_1^2}{8} C_{g1} \cdot b = \frac{\rho \cdot g \cdot H_2^2}{8} C_{g2} \cdot b$$

$$H_1^2 \cdot C_{g1} = H_2^2 \cdot C_{g2}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{C_{g2}}{C_{g1}}} = \sqrt{\frac{c_2 n_2}{c_1 n_1}}$$

$$c = \frac{L}{T}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{L_2 n_2}{L_1 n_1}}$$



DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

DURUM 3: Su derinliği (d_1 ve d_2) değişken,
kanal genişliği (b_1 ve b_2) değişken

$$P_{w1} = P_{w2} \quad P_w = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_g$$

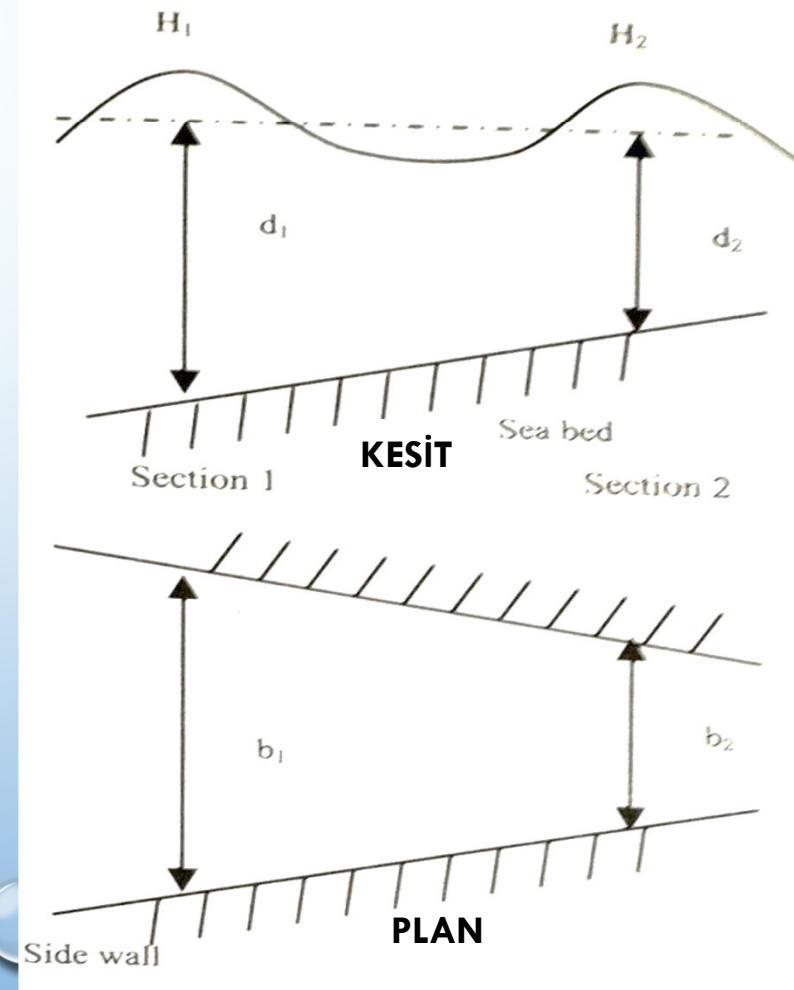
$$\frac{\rho \cdot g \cdot H_1^2}{8} C_{g1} \cdot b_1 = \frac{\rho \cdot g \cdot H_2^2}{8} C_{g2} \cdot b_2$$

$$H_1^2 \cdot C_{g1} \cdot b_1 = H_2^2 \cdot C_{g2} \cdot b_2$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{C_{g2}}{C_{g1}}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} = \sqrt{\frac{c_2 n_2}{c_1 n_1}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{L_2 n_2}{L_1 n_1}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$$

$$c = \frac{L}{T}$$



DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

ÖZEL DURUM: DERİN SUDAN İLERLEYEN DALGA İÇİN

Su derinliği (d_1 ve d_2) değişken,
kanal genişliği (b_1 ve b_2) değişken

$$P_{w1} = P_{w2}$$

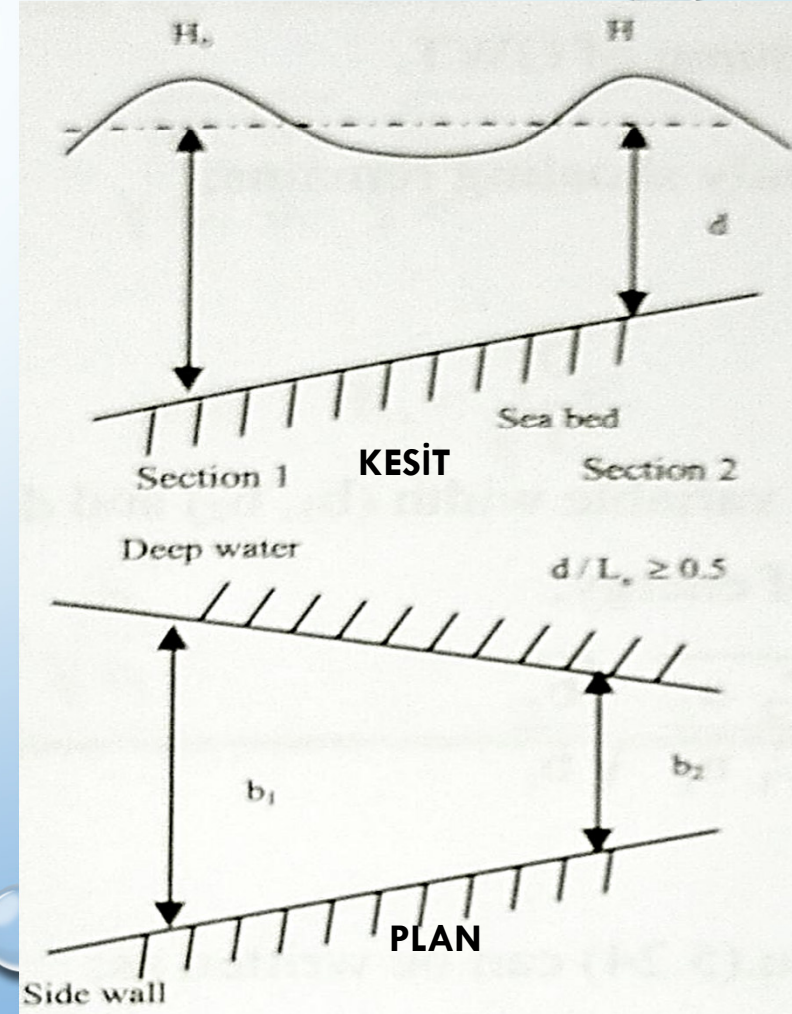
$$P_w = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_g$$

$$\frac{\rho \cdot g \cdot H_0^2}{8} C_{g0} \cdot b_0 = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_{g2} \cdot b_2$$

$$H_0^2 \cdot C_{g0} \cdot b_0 = H^2 \cdot C_g \cdot b$$

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_{g1}}} \sqrt{\frac{b_0}{b}} = \sqrt{\frac{c_0 n_0}{c \cdot n}} \sqrt{\frac{b_0}{b}}$$

Ks : sığlaşma katsayısı



DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

ÖZEL DURUM: DERİN SUDAN İLERLEYEN DALGA İÇİN

Dalgalar kıyıya doğru yaklaştıkça, azalan derinliğin etkisiyle dalga boyu ve ilerleme hızı azalır. İlerleme hızı ile bağlantılı olduğu için dalga yüksekliği de azalır.

$$\frac{H}{H_0} = K_s \sqrt{\frac{b_0}{b}}$$

$$K_s = \sqrt{\frac{c_0 n_0}{c \cdot n}}$$

$n_0 = 0.5$ derin suda

K_s : sığlaşma katsayısı GWT'de var.

Eğer kanal genişliğinde değişiklik yoksa, $b=b_0$ ise

$$\frac{H}{H_0} = K_s$$

DALGA DÖNÜŞÜMLERİ

ÖZEL DURUM: DERİN SUDAN İLERLEYEN DALGA İÇİN

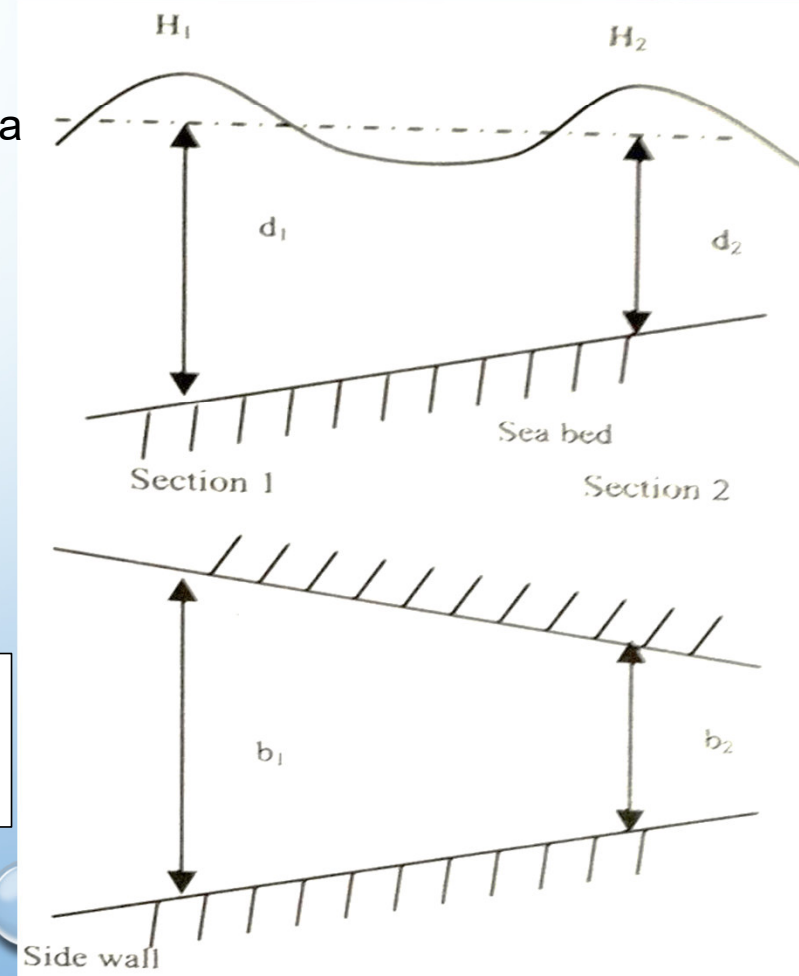
Farklı derinlik d_1 ve d_2 ve farklı genişliğe b_1 ve b_2 sahip kanallarda

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{C_{g2}}{C_{g1}}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} = \sqrt{\frac{c_2 n_2}{c_1 n_1}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$$

! Durum 3

$K_s = \sqrt{\frac{c_0 n_0}{c \cdot n}}$ ifadesi kullanılarak hesap yapılabilir.

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{C_{g2}}{C_{g0}}} \times \frac{C_{g0}}{C_{g1}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} = \underbrace{\sqrt{\frac{C_{g2}}{C_{g0}}}}_{1/K_{s2}} \underbrace{\sqrt{\frac{C_{g0}}{C_{g1}}}}_{K_{s1}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \rightarrow \boxed{\frac{H_1}{H_2} = \frac{K_{s1}}{K_{s2}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}}$$



Örnek: Periyodu 7s ve yüksekliği 3m olan bir derin su dalgası için derinliğin 11m olduğu bölgede spesifik dalga enerjisini ve enerji akısını belirleyiniz. ($\rho=1035\text{kg/m}^3$)

$$\bar{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8}$$

$$P_w = \bar{E} \cdot c \cdot n$$

Derin su şartlarında $L_0 = 1.56 T^2 = 1.56 \times 7 \times 7 = 76.5\text{m}$

$d/L_0 = 11/76.5 = 0.14$ için GWT'den $d/L=0.1749$, $kd=1.10$, $n=0.7471$, $K_s = 0.9146$

$L=11/0.1749 = 62\text{m}$ $c=L/T = 62/7 = 8.96\text{m/s}$

$H/H_0 = K_s$ $H=H_0 \times K_s = 3 \times 0.9146 = 2.74\text{m}$

$$\bar{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} = \frac{1035 \cdot 9.81 \cdot 2.74^2}{8} = 9.53 \text{ kN/m}$$

$$P_w = \bar{E} \cdot C \cdot n = 9.53 \cdot 8.96 \cdot 0.7471 = 61.28\text{kN/s}$$

Örnek: Periyodu 1s olan dalga şekildeki kanalda ilerlemektedir. Kesit 1'de dalga yüksekliği H=20cm ise Kesit 2'de dalga yüksekliği ne olur?

$$L_0 = 1.56T^2 \quad L_0 = 1.56 \text{ m}$$

$$d_1/L_0 = 1/1.56 = 0.64 > 0.5 \quad \text{derin su}$$

Derin suda $L=L_0$ ve $n=0.5$

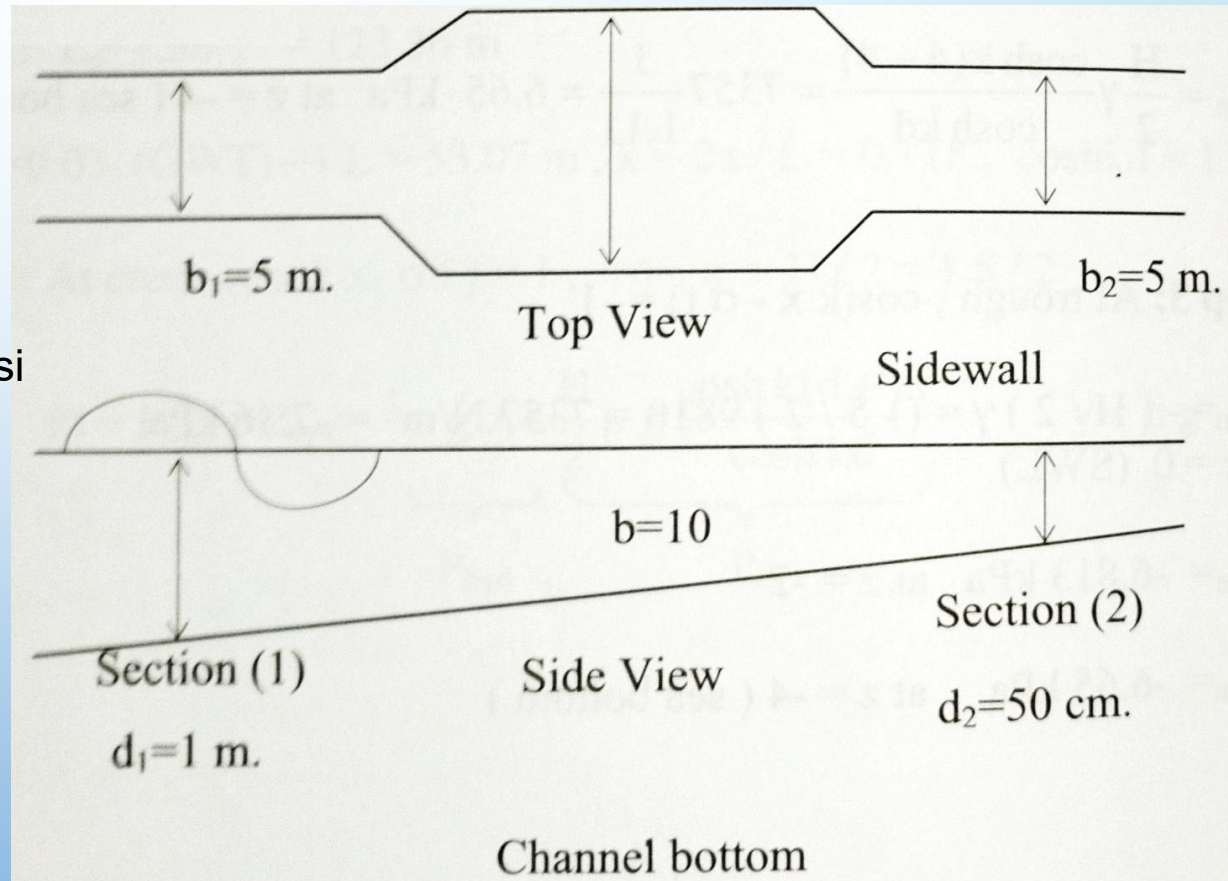
$$d_2/L_0 = 0.5/1.56 = 0.32 < 0.5 \quad \text{geçiş bölgesi}$$

GWTden $d/L = 0.33$, $K_s = 0.955$

$$\frac{H}{H_0} = K_s \sqrt{\frac{b_0}{b}}$$

$$\frac{H}{20} = 0.955 \sqrt{\frac{5}{5}}$$

$$H = 19.1 \text{ cm}$$



Örnek: Bir kanal içerisinde ilerleyen dalğanın spesifik enerjisinde (\bar{E}) %50 oranında azalma gerçekleşirse, dalga yüksekliğindeki azalma oranı ne olur?

$$\bar{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8}$$

$$\bar{E} \propto H^2$$

$$\frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\bar{E}_1} = 0.5$$

$$\frac{H_1^2 - H_2^2}{H_1^2} = 0.5$$

$$1 - \frac{H_2^2}{H_1^2} = 0.5$$

$$H_2 = H_1 \sqrt{0.5}$$

$$H_2 = 0.71H_1$$

H1'deki azalma ise

$$\frac{H_1 - H_2}{H_1} = 1 - \frac{H_2}{H_1} = 1 - 0.71 = 0.29 = \%29$$

Örnek: Derinliği 60cm olan, genişliği $b_1=1\text{m}$ 'den $b_2=0.5\text{m}$ 'ye düşen bir kanal içerisinde ilerleyen dalga grubunun periyodu $T=1.5\text{s}$ 'dir. Kesit 1'de ilk dalga $t=0$ 'da $H_1=20\text{cm}$ olarak ölçüldüyse,

a) Dalga grup hızını hesaplayınız.

$$L_0 = 1.56 \times T^2 = 1.56 \times 1.5^2 = 3.51\text{m}$$

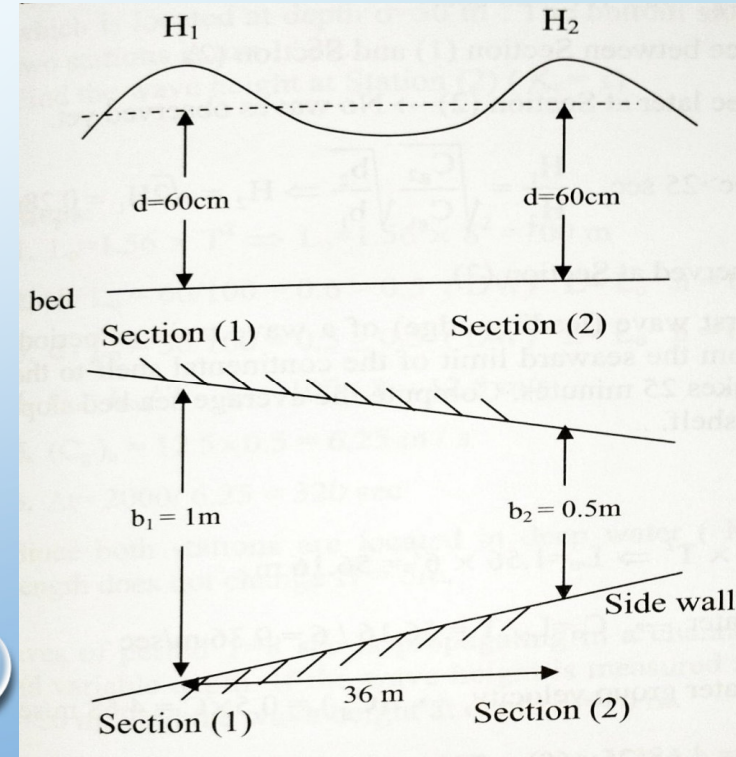
$$d_2/L_0 = 0.6/3.51 = 0.17 < 0.5 \text{ geçiş bölgesi}$$

$$\text{GWT'den } d/L = 0.20 \quad \frac{2kd}{\sinh 2kd} = 0.41 \quad L=0.6/0.2 = 3\text{m}$$

$C_{g1} = C_{g2} = c \cdot n$ derinlik değişmediği için

$$c=L/T = 3/1.5 = 2\text{m/s} \quad n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) = 0.5(1 + 0.41) = 0.7$$

$$C_{g1} = C_{g2} = 2 \times 0.7 = 1.4\text{m/s}$$



Örnek: Derinliği 60cm olan, genişliği $b_1=1\text{m}$ 'den $b_2=0.5\text{m}$ 'ye düşen bir kanal içerisinde ilerleyen dalga grubunun periyodu $T=1.5\text{s}$ 'dir. Kesit 1'de ilk dalga $t=0$ 'da $H_1=20\text{cm}$ olarak ölçüldüyse,

b) 36m ilerideki Kesit 2'de ilk dalga kaç sn sonra gözlemlenir ve dalga yüksekliği (H_2) ne olur?

$$C_{g1} = C_{g2} = 2 \times 0.7 = 1.4 \text{ m/s}$$

Dalga enerjisi grup hızı ile ilerler.

$$\Delta t = l / C_g = 36 / 1.4 = 25 \text{ s}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{C_{g2}}{C_{g1}}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{0.5}{1}}$$

$$H_2 = 20 / 0.707 = 28 \text{ cm}$$

