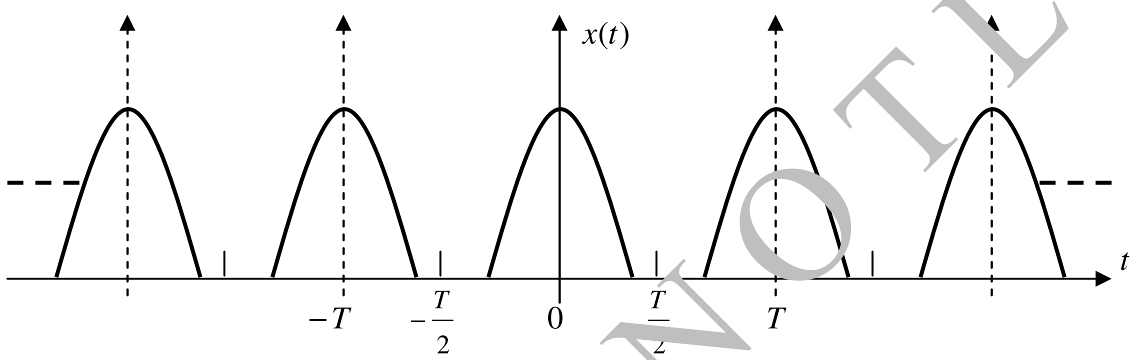
Sinyallerin Zaman – Frekans Analizleri : FOURIER TEORİSİ

Bu bölümden itibaren işaret işleme (signal processing) kavram ve yöntemlerine eğilerek işaretleri analiz etmeye çalışacağız. Özellikle bir işaretin frekansa bağlı değişimini gösteren analizi çok daha önemlidir.

FOURIER SERİSİ

Fourier serisi, Fransız matematikçi ve fizikçi (1768-1830) **Jean Baptista Joseph Fourier** ın 1800 li yıllarda (1822) ortaya koyduğu Fourier teorinin periyodik işaretler kısmıyla ilgili olan ilk bölümünü oluşturmaktadır. Bu amaçla, periyodik işaret olarak **durağan işaretler** (stationary signals) üzerinde durulacaktır. Aşağıda Fourier serisine tipik olan genel bir periyodik işaret verilmiştir.



Şekil 1.Periyodik işaret (sonsuz enerjili işaret): Fourier serisi

Verilen işaretin,

$x(t) = x(t+T)$ periyodiklik koşulunu sağladığını görmekteyiz.

Trigonometrik Fourier Serisi ile Periyodik İşaretlerin Gösterimi

$$f(t) = \{a_0 \underbrace{\cos(0\times\omega_0 t)}_{1}, a_1 \cos\omega_0 t, a_2 \cos 2\omega_0 t, \cdots, a_n \cos n\omega_0 t, \cdots$$

$$; b_0 \underbrace{\sin(0\times\omega_0 t)}_{0}, b_1 \sin\omega_0 t, b_2 \sin 2\omega_0 t, \cdots, b_n \sin n\omega_0 t, \cdots\}$$

$$f(t) = \{a_0, a_1 \cos\omega_0 t, a_2 \cos 2\omega_0 t, \cdots, a_n \cos n\omega_0 t, \cdots; b_1 \sin\omega_0 t, b_2 \sin 2\omega_0 t, \cdots, b_n \sin n\omega_0 t, \cdots\}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier Serisi Formülleri

Bulunan bağıntılar neticesinde Fourier serisi ne ait denklemleri toparlarsak aşağıdaki ifadeler yazılabilecektir. Fourier serisi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad ; \quad t_1 \le t \le t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

durumu göz önüne alınırsa

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t\, dt$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Alternatif gösterim

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

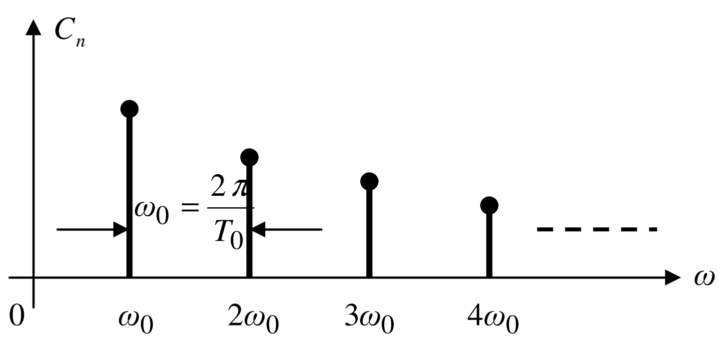
$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$C_0 = a_0$$

$$a_n = C_n \cos\theta_n$$

$$b_n = -C_n \sin\theta_n$$

Fourier Serisinin Spektrum Gösterimi



Şekil 2. $C_n - \omega$ Düzlemi : ayrık Fourier spektrumu

Fourier Serisinin Varlığı ve Dirichlet Koşulları

Fourier serisinin mevcudiyeti ve varlığı Dirichlet koşulları ile tanımlanmaktadır. İki türlü Dirichlet koşulu vardır ;

1. Zayıf Dirichlet koşulu

Bu koşulda Fourier serisinin varlığı test edilmektedir : $\int_{T_0} |f(t)|\, dt < \infty$

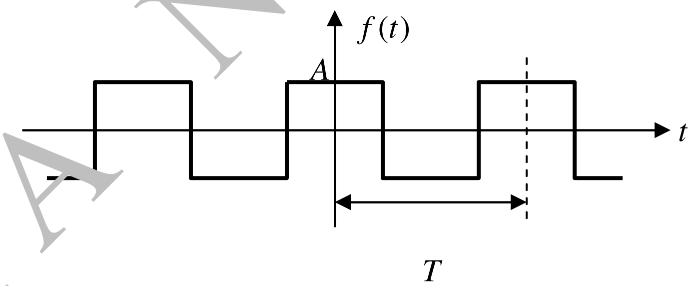
2. Kuvvetli Dirichlet koşulu

Eğer $f(t)$ fonksiyonunun bir periyodluk süreçte sonlu sayıda maksimum ve minumum noktası var ve eğer aynı zamanda aynı periyod içinde sonlu sayıda ve her bir sonlu süreksiz (discontinuity, piecewise fonksiyonlar) noktası varsa, *kuvvetli Dirichlet koşulu* olduğu kabul edilir.

Çok Bilinen İşaretlerin Fourier Serisiyle Gösterimi

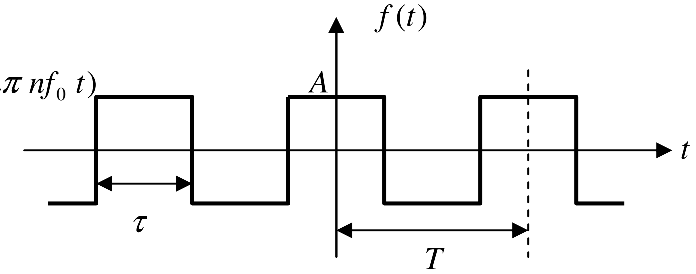
1. Kare dalga

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)2\pi f_0\, t]}{(2n-1)}$$



2. Darbe dizisi

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi f_0\, \tau) \cos 2\pi\, n f_0\, t)$$



Exponensiyel gösterim

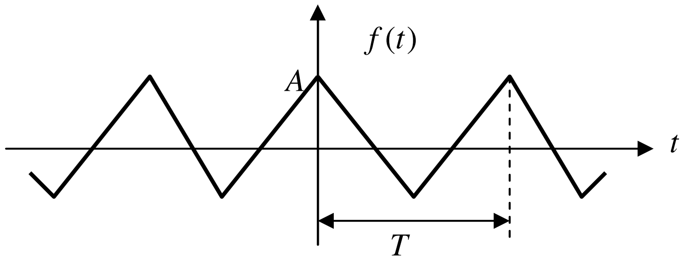
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{j\,2\pi\, n\, f_0\, t}$$

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j\,2\pi\, n\, f_0\, t}\, dt$$

$$D_n = \frac{A\tau}{T} \sin c(n\, f_0 \tau)$$

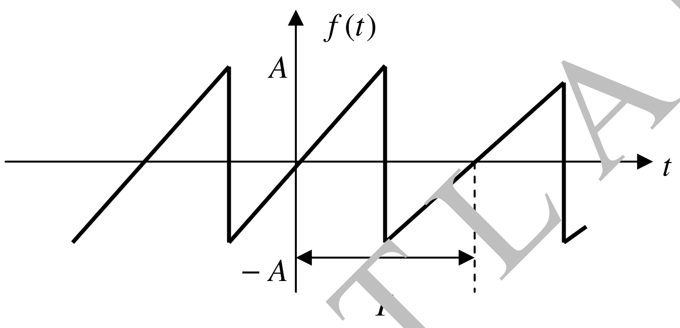
3. Üçgen dalga

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\sin(2\pi\, f_0\, t)}{n^2}$$



4. Testere dişi dalga

$$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\, f_0\, t)}{n}$$



Şekil 3.Çeşitli periyodik işaretlerin Fourier serisi Gösterimleri

Örnek

$f(t) = 2 + 7\cos(\frac{t}{2} + \theta_1) + 3\cos(\frac{2t}{3} + \theta_2) + 5\cos(\frac{7t}{6} + \theta_3)$ İşaretinin periyodikliğini araştırın.

Çözüm

Verieln işaret $f(t) = 2 + 7\cos(\omega_1 t + \theta_1) + 3\cos(\omega_2 t + \theta_2) + 5\cos(\omega_3 t + \theta_3)$ olarak düşünüldüğünde frekansların ($\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{2}{3}$, $\omega_3 = \frac{7}{6}$) olduğu görülecektir. İşaretin periyodik olması, $n = 0$ harmoniği hariç için harmoniklerdeki "t" değişkeninin katsayıları durumundaki frekansların yani ($\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}$) oranlarının rasyonel bir sayı olması ile mümkündür.

Buna bakarsak,

$\frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$ ve $\frac{2/3}{7/6} = \frac{4}{7}$

elde edilen $\frac{3}{4}$ ve $\frac{4}{7}$ rasyonel sayılar olduğundan, verilen işaretin periyodik olduğu görülür. Bunun ardından, temel frekansın ne olduğunun hesaplanması gerekir. Bunun için verilen zamana ait katsayılar

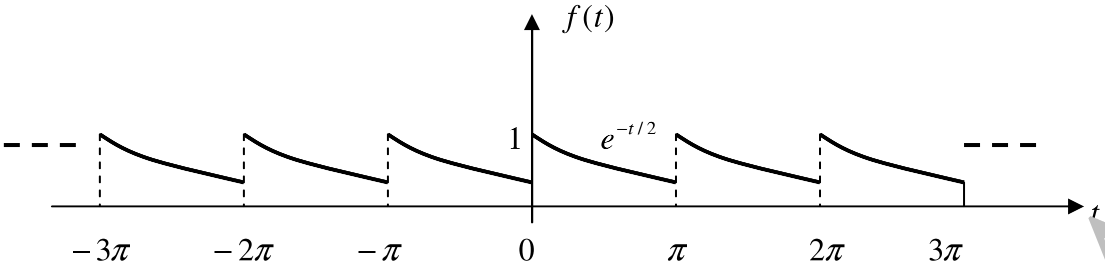
$3\,(\frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$, $4\,(\frac{1}{6}) = \frac{2}{3}$ ve $7\,(\frac{1}{6}) = \frac{7}{6}$

olarak düşünüldüğünde tüm harmonikleri kapsayan temel frekansın $\omega_0 = \frac{1}{6}$ olduğunu görmekteyiz. Temel frekans 3. 4. ve 7. harmoniklerle gösterildiğinden verilen $f(t)$ işareti üçüncü, dördüncü ve yedinci harmoniklerden oluşmaktadır. Temel frekans $\frac{1}{6}$ olduğuna göre temel periyod,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1/6}) = 12\pi$$

Örnek

Aşağıda değişimi verilen $f(t)$ işaretini Fourier serisine açın.



Şekil 4.Periodik bir işaretin Fourier serisi

Çözüm

Öncelikle Fourier serisine açılma koşulu olan işaretinin

$$f(t) = f(t+T)$$

olan periodik olma koşulunun şekilden

$$f(t) = f(t+\pi)$$

ile sağladığını görmekteyiz. İşaretin T_0 temel periodu π olduğundan ($T_0 = \pi$), periodik olup, Fourier serisine açılabileceği görülmektedir. Bu onaylamanın ardından Fourier serisinin a_0, a_n, b_n ve θ_n parametrelerinin bulunması aşamasına geçilebilir.

Daha önce yukarıda ana hatlarıyla ele alınan örneği bu kez Fourier serisinin formülasyonları kullanılarak tekrar çözülecektir. Eğer verilen şekil Fourier serisi ile ifade edilecekse periodik olması düşünüleceğinden, verilen işaretin bu önemli koşulu sağladığını değişiminden de görmekteyiz. Şimdi bu yeni duruma göre exponensiyel bir fonksiyonu gösteren $f(t) = e^{-t/2}$ işaretinin Fourier karşılığını bulmamız gerekiyor. Bunun için Fourier serisini gösteren genel ifadesindeki

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

a_0, a_n ve b_n katsayılarını ilgili denklemlerinden bulmamız gerekiyor.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

önecelikle

$$f(t) = e^{-t/2} \quad , \qquad 0 \le t \le \pi$$

ifadesinde,

$$T_0 = \pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$$

buna göre,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt$$

yazılır, buradan,

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\,dt$$
$$= 0.504$$

Serinin ortalama veya d.c. değeri olarak bilinen a_0, fonksiyon üst yarı düzlemde olduğu için $a_0 \neq 0$ bulundu. Eğer fonksiyon üst yarı düzlemde olmasaydı $a_0 = 0$ olurdu.

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\cos 2nt\,dt$$

bu bir kısmi integrasyon ifadesidir.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

çözüm için,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\cos 2nt\,dt$$

$$u = e^{-t/2} \quad , \quad dv = \cos 2nt\,dt$$
$$du = -\frac{1}{2}e^{-t/2}dt \quad , \quad v = \frac{1}{2n}\sin 2nt$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\,dv = \frac{2}{\pi}\left[uv - \int_0^{\pi} v\,du\right]$$

eğer,

$$p=-\frac{1}{2} \quad , \quad q=2n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\cos 2nt\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{pt}\cos \mathrm{q}\, t\, dt \\ &= \left[\frac{e^{pt}}{p^2+q^2}\left(p\cos qt+q\sin qt\right)\right]_0^{\pi} \\ &= 0.504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right) \end{aligned}$$

aynı şekilde b_n çözülürse, $b_n=\frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\sin 2nt\, dt$ burada da kısmi integrasyon gerekecektir.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\sin 2nt\, dt$$

$$u=e^{-t/2} \quad , \quad dv=\sin 2nt\, dt$$

$$du=-\frac{1}{2}e^{-t/2}dt \quad , \quad v=-\frac{1}{2n}\cos 2nt$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\, dv=\frac{2}{\pi}\left[uv-\int_0^{\pi} v\, du\right]$$

eğer,

$$p=-\frac{1}{2} \quad , \quad q=2n$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\sin 2nt\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{pt}\sin \mathrm{q}\, t\, dt \\ &= \left[\frac{e^{pt}}{p^2+q^2}\left(p\sin qt-q\sin qt\right)\right]_0^{\pi} \\ &= 0.504\left(\frac{8\mathrm{n}}{1+16n^2}\right) \end{aligned}$$

sonuçta bulunan katsayılara göre Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t)=0.504\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+16n^2}(\cos 2nt+4n\sin 2nt)\right] \quad , \quad 0\le t\le \pi$$

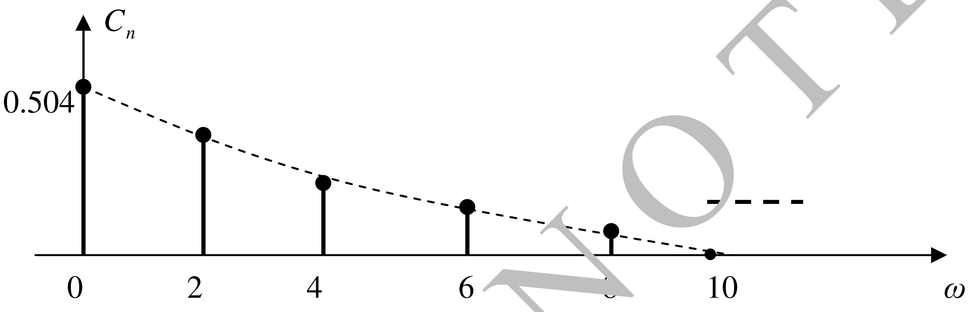
$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ gibi kompakt forma dönüştürürsek,

$$C_0 = 0.504$$

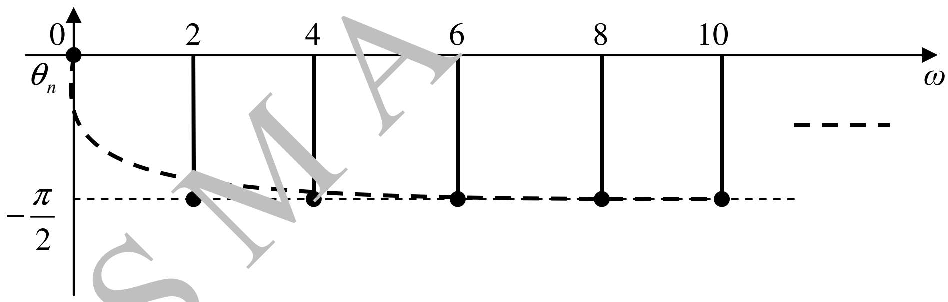
$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.504\sqrt{\frac{4}{(1+16n^2)^2} + \frac{64n^2}{(1+16n^2)^2}} = 0.504\left(\frac{2}{\sqrt{1+16n^2}}\right)$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}(-4n) = -\tan^{-1} 4n$$

$$f(t) = 0.504\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+16n^2}} \cos(n\omega_0 t - \tan^{-1} 4n)\right]$$



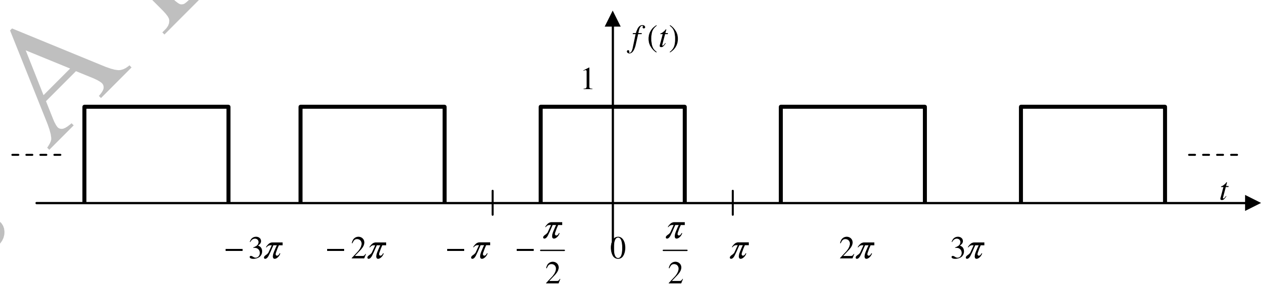
Şekil 5.Periodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri



Şekil 6.Periodik bir işaretin Fourier serisindeki Faz - Frekans görüntüsü

Örnek

Aşağıda verilen kare dalgayyı Fourier serisine açınız.



Şekil 7.Periodik darbe işaretinin Fourier serisi

Çözüm

Öncelikle Fourier serisine açılma koşulu olan işaretinin

$$f(t) = f(t+T)$$

olan periodiklik koşulunun şekilden yine,

$$f(t) = f(t+2\pi)$$

ile sağladığını görmekteyiz. İşaret $(T_0 = 2\pi)$ temel periodlu olup, Fourier serisine açılabileceği görülmektedir. Böylece Fourier serisinin a_0, a_n, b_n ve θ_n parametreleri hesaplanabilir. Şekilden de görüldüğü gibi işaret $f(t) = 1$, $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlıdır.

$$T_0 = 2\pi$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Fourier serisini gösteren genel ifadesindeki

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

a_0, a_n ve b_n katsayılarını ilgili denklemlerinden bulmamız gerekiyor.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

ilk anda tesbit ettiğimiz değerler

$$f(t) = 1 \quad , \qquad -\pi \le t \le \pi$$

ifadesinde yerine konulursa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

olur. Buradan,

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$
$$= \frac{1}{2}$$

Serinin ortalama veya d.c. değeri olarak bilinen a_0, eğer fonksiyon üst yarı düzlemde olmasaydı $a_0 = 0$ olurdu.

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cos nt\, dt = \frac{2\times 2}{2\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi\, n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi\, n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi\, n} = \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2\frac{\pi\, n}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{\pi\, n}{2}}$$

$$a_n = \mathrm{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift sayı} \\ \dfrac{2}{\pi\, n} & n = 1,5,9,13,\cdots \\ -\dfrac{2}{\pi\, n} & n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$

aynı şekilde b_n çözülürse,

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\times\sin nt\, dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{\pi\, n}\left[\cos n\frac{\pi}{2} - \cos n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 0$$

Zaten çift fonksiyon özelliğinden $b_n = 0$ olacağı açıktır. Öte yandan faz ifadesi ise, çift fonksiyon olduğundan ($arctg\,\frac{b}{a} = arctg\,\frac{0}{a} = 0$), buradan muhtemelen bir π kadarlık faz açısı görünüyor.

$$\theta = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ -\pi & n = \text{tek}, \qquad n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$

Sonuçta bulunan katsayılara göre Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos t + \frac{1}{3}\cos(3t-\pi) + \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{7}\cos(7t-\pi) + \frac{1}{9}\cos 9t + \frac{1}{11}\cos(11t-\pi)\cdots)\right]$$

Eğer

$$-\cos x = \cos(x \pm \pi)$$

özelliği kullanılırsa, seri aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t - \frac{1}{7}\cos 7t + \cdots\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\cos(2n-1)t$$

Bu ifadeyi,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

gibi kompakt forma dönüştürürsek,

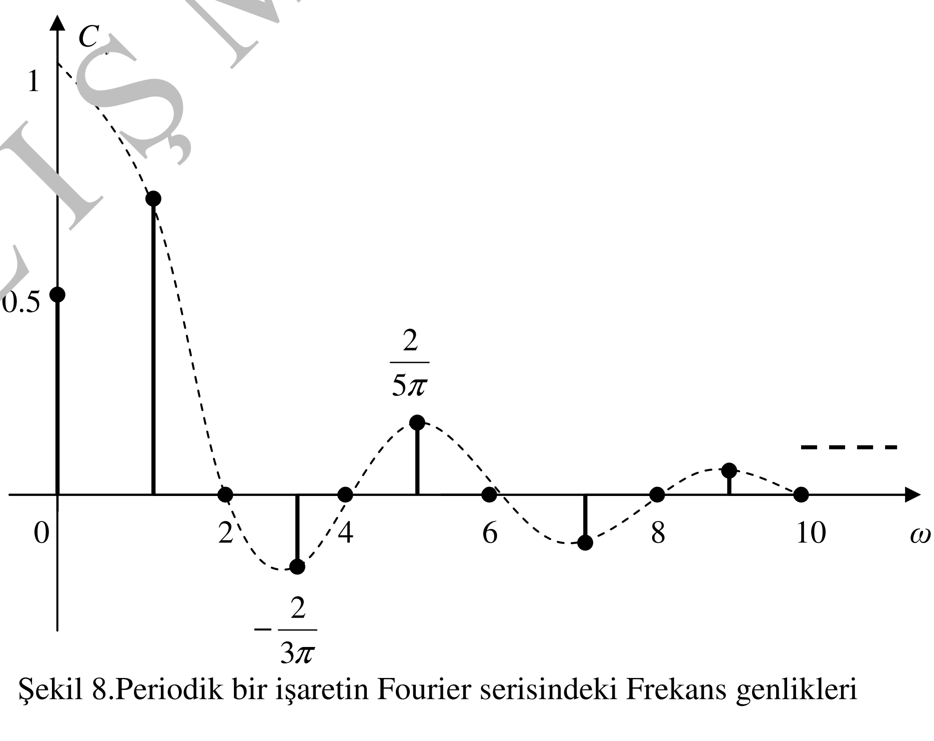
$$C_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a_n$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n = 0}{a_n}\right) = 0$$

$\theta_n = 0$ anlamı serinin bileşenleri (terimleri) arasında faz farkı yoktur, yani sıfırdır. Dolaysıyla faz spektrumlarına gerek yoktur. Ancak spektrumdan faz farkının π olması, bileşenlerin fazların aynı olma gerçeğini değiştirmez. Çünkü $-\cos x = \cos(x \pm \pi)$ olduğundan bileşenler aynı fazda olacaklardır. Bu durumda Fourier spektrumu,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\, n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos[(2n-1)\,t] \quad , \qquad n = \text{tek}$$



Şekil 8.Periodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri

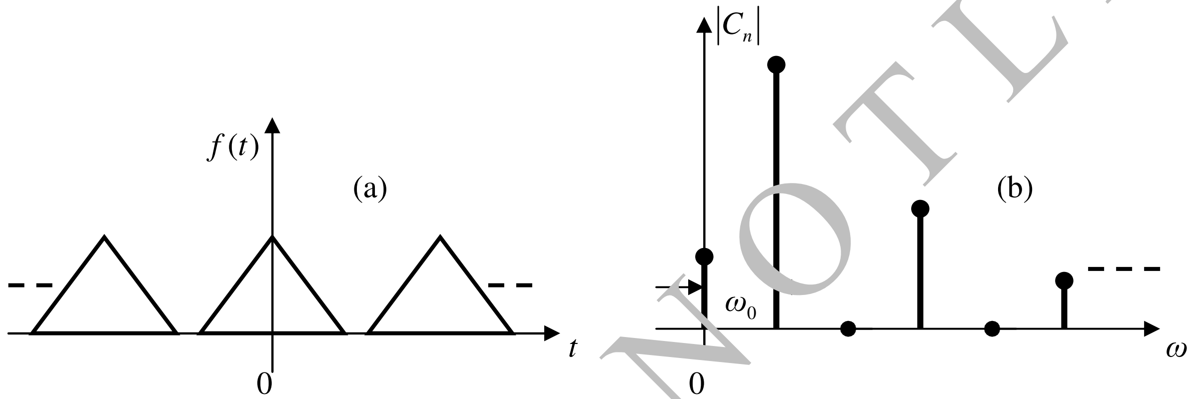
EXPONENSİYEL FOURİER SERİSİ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \, e^{jn\,\omega_0\, t}$$

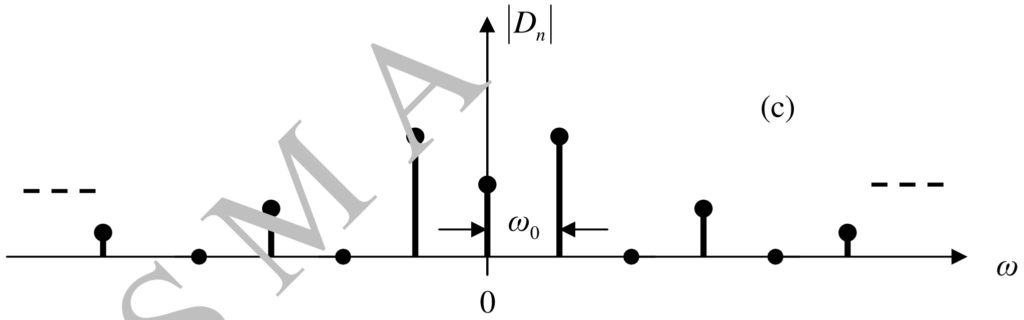
$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt$$ **Exponensiyel formüller**

Exponensiyel Fourier Serisinde Genlik ve Faz Spektrumun Dağılımı

Reel periyodik $f(t)$ işaretinin klasik ve exponensiyel gösterimdeki genlik spektrumlarını aşağıdaki gösterimleriye göz önüne alalım.

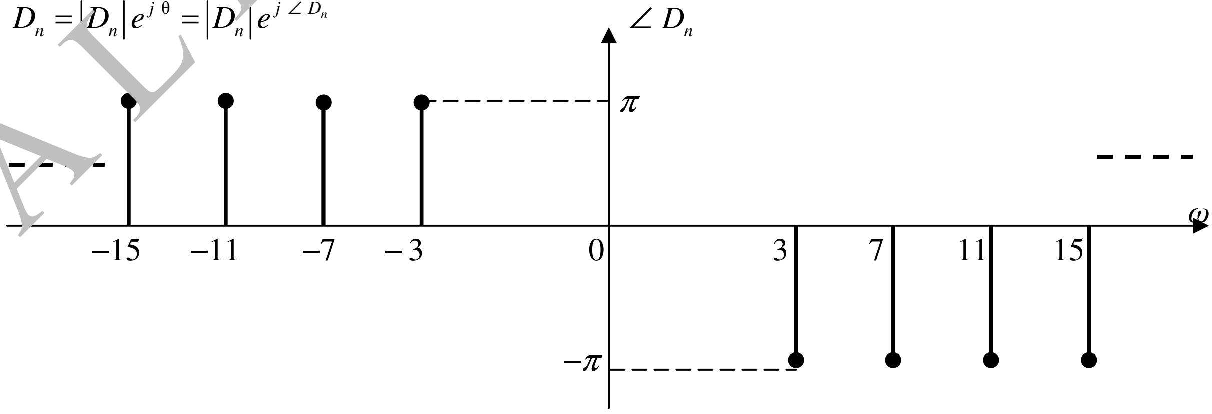


Şekil 9. (a) Fourier serisinde sürekli işaret, (b) ayrık frekans spektrumu



Şekil 10. (c) Fourier serisinde genlik spektrumu

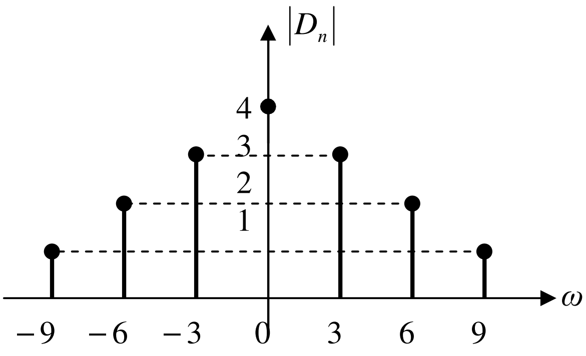
$$D_n = |D_n| e^{j\,\theta} = |D_n| e^{j\,\angle D_n}$$

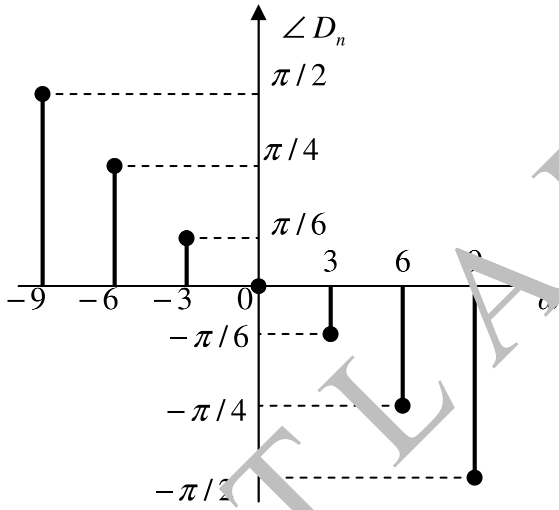


Şekil 11.Periyodik darbe işaretinin faz spektrumu

Örnek

Aşağıda $|D_n|$ genlik ve $\angle D_n$ faz bilgileri Fourier serisiyle verilmiş işareti araştırın.





Şekil 12. $|D_n|$ ve $\angle D_n$ Spektrumları

Çözüm

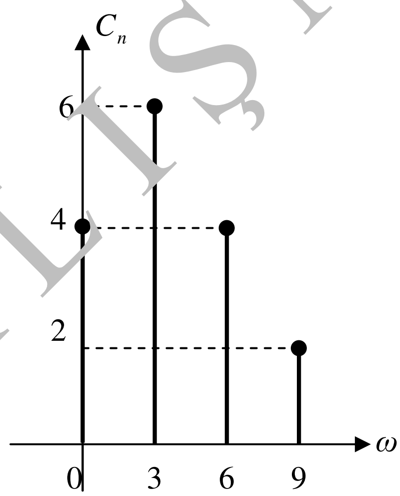
Bu işaretin exponensiyel Fourier serisine açmak için gereken parametreleri hesaplamamız gerekiyor. İlk olarak şekilden yararlanarak temel frekansın $\omega_0 = 3$ rad/sn olduğunu $n = 0,1,2,3$ harmonikleri için açıkça görmekteyiz. Bununla birlikte D_n, C_n ve $\angle D_n$ spektrumları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

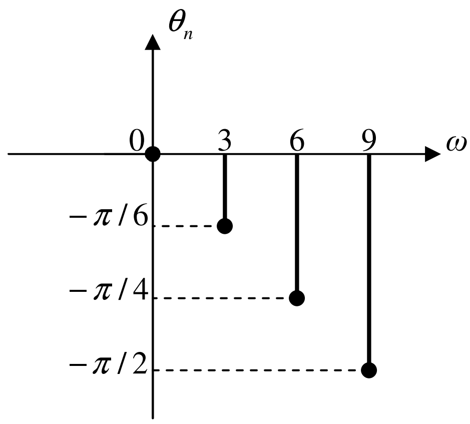
$D_0 = 4$, $D_1 = 3$, $D_2 = 2$, $D_3 = 1$

$|D_n| = C_n / 2$

$C_0 = 4$, $C_1 = 6$, $C_2 = 4$, $C_3 = 4$

Buna göre C_n spektrumu aşağıdaki gibi olacaktır.





Şekil 13. C_n Spektrumu

Faz spektrumundan ise

$\theta_1 = -\dfrac{\pi}{6}$, $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{4}$, $\theta_3 = -\dfrac{\pi}{2}$

bilgilerini elde etmekteyiz. Şimdi exponensiyel fourier serisi $n = 0,1,2,3$ harmonikleri için aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} D_n\, e^{j n \omega_0 t} = \sum_{n=-3}^{3} D_n e^{j n 3 t}$$

$$D_n = |D_n|\, e^{j\theta_n}$$

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} |D_n|\; e^{j\theta_n}\; e^{j n \omega_0 t} = \sum_{n=-3}^{3} |D_n|\; e^{j\theta_n} e^{j n 3 t} = |D_{-3}|\; e^{j\theta_{-3}} e^{j(-3)3t} + |D_{-2}|\; e^{j\theta_{-2}} e^{j(-2)3t}$$

$$+ |D_{-1}|\; e^{j\theta_{-1}} e^{j(-1)3t} + |D_0|\; e^{j\theta_0} e^{j(0)3t} + |D_1|\; e^{j\theta_1} e^{j(1)3t} + |D_2|\; e^{j\theta_2} e^{j(2)3t} + |D_3|\; e^{j\theta_3} e^{j(3)3t}$$

$$= (1)\, e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j9t} + (2)\, e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j6t} + (3)\, e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j3t} + (4)\, e^{0}$$

$$+ (3)\, e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j3t} + (2)\, e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j6t} + (1)\, e^{-j\frac{\pi}{2}\theta_3} e^{j9t}$$

$$= e^{-j(9t-\frac{\pi}{2})} + 2\, e^{-j(6t-\frac{\pi}{4})} + 3\, e^{-j(3t-\frac{\pi}{6})} + 4\, e^{j0t}$$

$$+ 3\, e^{j(3t-\frac{\pi}{6})} + 2\, e^{j(6t-\frac{\pi}{4})} + e^{j(9t-\frac{\pi}{2})}$$

$$= 4 + 3(e^{j(3t-\frac{\pi}{6})} + e^{-j(3t-\frac{\pi}{6})}) + 2(e^{j(6t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(6t-\frac{\pi}{4})}) + (e^{j(9t-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(9t-\frac{\pi}{2})})$$

$$= 4 + 2\left[3\left(\frac{e^{j(3t-\frac{\pi}{6})} + e^{-j(3t-\frac{\pi}{6})}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{j(6t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(6t-\frac{\pi}{4})}}{2}\right) + \left(\frac{e^{j(9t-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(9t-\frac{\pi}{2})}}{2}\right)\right]$$

$$= 4 + 2\left[3\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + \cos(9t - \frac{\pi}{2})\right]$$

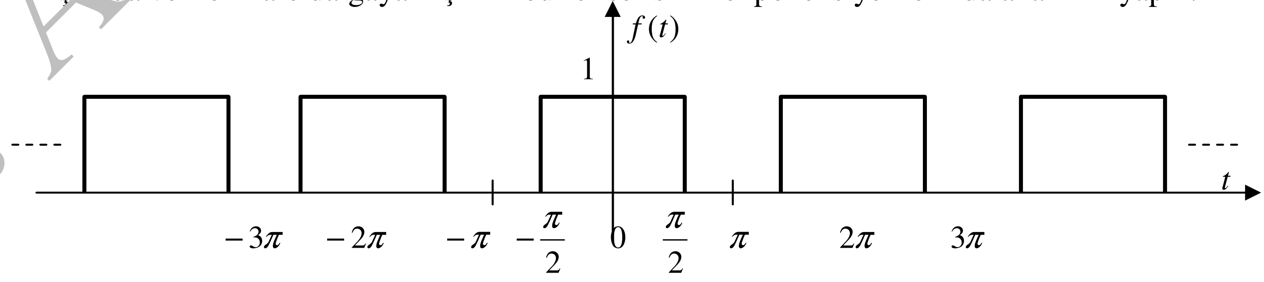
$$= 4 + \left[6\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 4\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + 2\cos(9t - \frac{\pi}{2})\right]$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$f(t) = 4 + 6\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{2})$$

Örnek

Aşağıda verilen kare dalgaya ilişkin Fourier serisinin exponensiyel formda analizini yapın.



Şekil 14.Periodik darbe işaretinin Fourier serisi

Çözüm

Şekilden de görüldüğü gibi işaret $f(t)=1$, $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ aralığında tanımlı ve π genişliğindeki dörtgen darbelerden oluşan periyodik işaretin periyodu $[-\pi,\pi]$, $T_0=2\pi$ ve , $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=1$. Seri periodik olduğundan, Fourier serisi karşılığı olarak,

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t} \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\, e^{-jnt}dt$$

Period T_0, $(-\pi/2,\pi/2)$, olarak düşünülürse, $T_0=2\pi$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$D_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)\, e^{-jnt}dt=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=-\frac{1}{2jn\pi}\left[e^{-jnt}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=-\frac{1}{2j\pi n}\left[e^{-jn(\pi/2)}-e^{-jn(-\pi/2)}\right]=-\frac{1}{2j\pi n}\left[e^{-jn\pi/2}-e^{jn\pi/2}\right]=\frac{1}{2j\pi n}\left[e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\frac{e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}}{2j}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]=\frac{1\times(1/2)}{n\pi\times(1/2)}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]=\frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\text{sinc}\,(\frac{n\pi}{2})$$

$$D_n=\frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2})$$

$n=0$ için, $\text{sinc}\,(0)=1$ olduğundan

$$D_0 = \frac{1}{2}\sin c(\frac{0\pi}{2}) = \frac{1}{2}\sin c(0) = \frac{1}{2}$$

$n = 2,6,10,14,18,\cdots$ için

$$D_n = \frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}} = 0$$

$n = 1,5,9,13,17,\cdots$ için

$$D_n = \frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi}$$

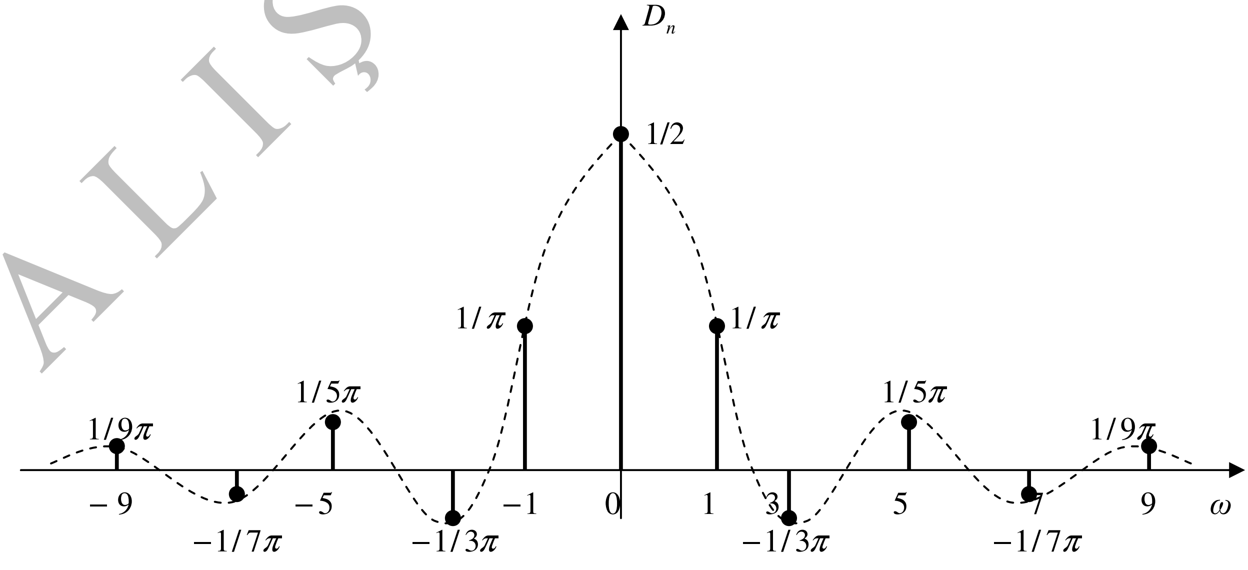
$n = 3,7,11,15,19,\cdots$

$$D_n = \frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}} = -\frac{1}{n\pi}$$

$$D_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad D_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \frac{1}{\pi n} & n = 1,5,9,13,\cdots \\ -\frac{1}{\pi n} & n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$

$$D_n = \frac{1}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}), \frac{1}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}), \frac{1}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}), \frac{1}{7\pi}\sin(\frac{7\pi}{2}), \frac{1}{9\pi}\sin(\frac{9\pi}{2}), \frac{1}{11\pi}\sin(\frac{11\pi}{2}), \cdots$$

$$D_n = \frac{1}{\pi}(\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}) + \frac{1}{7}\sin(\frac{7\pi}{2}) + \frac{1}{9}\sin(\frac{9\pi}{2}) + \frac{1}{11}\sin(\frac{11\pi}{2}) + \cdots)$$



Şekil 15.Periodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri

SÜREKLİ FOURIER SERİSİNİN ÖZELLİKLERİ

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\,n\,\omega_0\,t} \rightarrow D_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j\,n\,\omega_0\,t}dt$$

veya

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)\,e^{j\,n\,\omega_0\,t} \rightarrow X(n)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-j\,n\,\omega_0\,t}dt$$

Lineerlik

$x(t)$ ve $y(t)$ T_0 periodlu fonksiyonlar ve a_n ve b_n de bunların ilgili Fourier seri katsayıları ise,

$$x(t)\overset{FS}{\Rightarrow}a_n$$

$$y(t)\overset{FS}{\Rightarrow}b_n$$

bu fonksiyonların linear olması için çıkışın $z(t)$,

$$z(t)=c_1x(t)+c_2y(t)$$

olması gerekir.

$$c_1x(t)+c_2y(t)\overset{FS}{\Rightarrow}c_1a_n+c_2b_n$$

Fourier serisi bu özelliği sağladığı için lineer bir seri olduğu düşünülebilir.

Zaman öteleme (time shifting)

$$x(t)\overset{FS}{\Rightarrow}D_n=X(n)$$

$$x(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\,e^{jn\,\omega_0\,(t-t_0)}$$

$$=e^{-jn\,\omega_0\,t_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\,e^{jn\,\omega_0\,t}$$

$$=e^{-jn\,\omega_0\,t_0}\,x(t)$$

$$x(t-t_0)\overset{FS}{\Rightarrow}e^{-jn\,\omega_0\,t_0}\,D_n$$

$$x(t-t_0)\overset{FS}{\leftrightarrow}e^{-j\,n\,\omega_0\,t_0}X(n)$$

Zaman tersleme (time reversal)

$$x(-t) \overset{FS}{\leftrightarrow} = D_{-n} = X(-n)$$

$$x(t) \overset{FS}{\Rightarrow} D_n$$

$$x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \; e^{jn\,\omega_0\,(-t)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \; e^{jn\,(-\omega_0)\,t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n} \; e^{jn\,\omega_0\,t}$$

$$x(-t) \;\overset{FS}{\Rightarrow}\; D_{-n}$$

Zaman ölçekleme (time scaling)

$$x(t) \overset{FS}{\Rightarrow} D_n$$

$$x(\alpha\,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \; e^{jn\,\omega_0\,(\alpha\,t)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \; e^{jn\,(\alpha\,\omega_0)\,t}$$

Zaman Ölçekleme Özelliği

$$x(a\,t) \overset{FS}{\leftrightarrow} \begin{cases} X\left(\dfrac{n}{a}\right) & , \quad \dfrac{n}{a} \in Z \\ 0 & \end{cases}$$

Frekans Öteleme Özelliği : Modülasyon Özelliği

$$e^{j\,n_0\,\omega_0\,t}\,x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} X(n-n_0)$$

Fourier Serisi ve Güç

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

1) $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

ise bunun Parseval karşılığı

$$P_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right|^2 dt$$
$$= \left| C_0 \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right|^2$$
$$P_{av} = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

2) $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$

yapısında ise bunun Parseval karşılığı da aşağıdaki gibi olacaktır.

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{a_0^2 + a_n^2 + b_0^2})^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

3) Eğer Fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \, e^{j n \omega_0 t}$$

$$P_{av} = D_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| D_n \right|^2$$

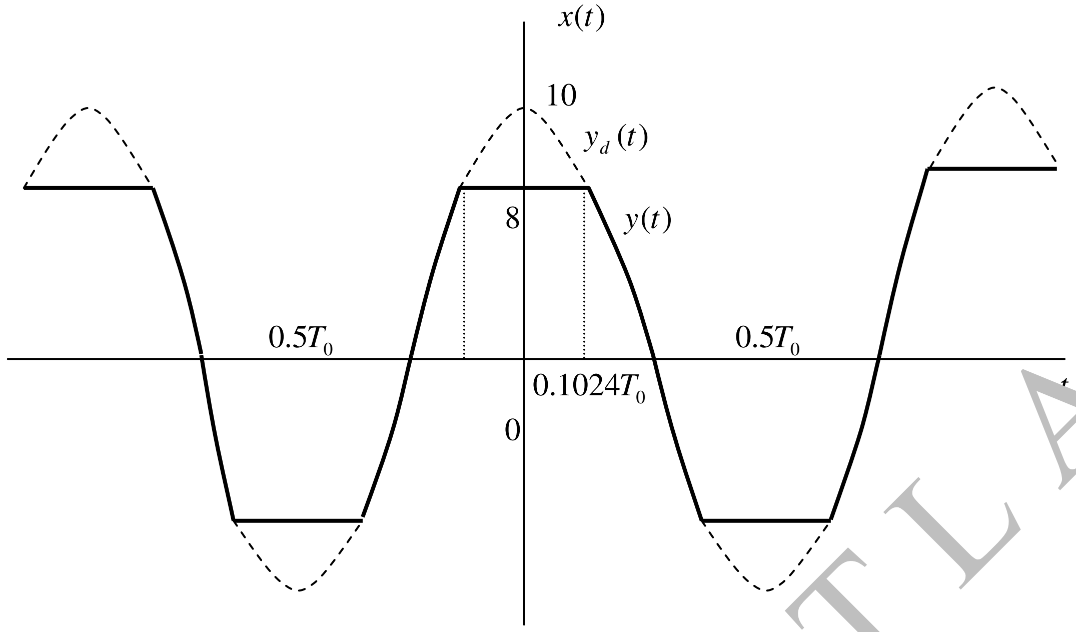
Harmonik Distorsiyonun Hesaplanması

Örnek

Giriş işareti $x(t) = 10 \cos \omega_0 t$ olarak verilen bir işaret çıkışında ± 8 volt seviyesinden kırpılırsa oluşan bozulmuş işaretteki harmoniklerin seviyesini hesaplayın (B.P. Lathi , *Signal Processing and Linear Systems*, s.213).

Çözüm

$x(t) = 10 \cos \omega_0 t$ işareti aşağıdaki gibidir.

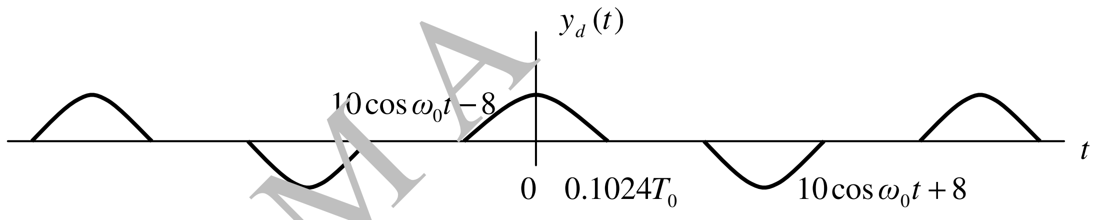


Şekil 16.Distorsiyonlu dalga : kırpılmış $\cos\omega_0 t$ işareti

Görüldüğü gibi kırpılan kısım $y_d(t)$ (kesik çizgili)

$$y_d(t) = x(t) - y(t)$$
$$y_d(t) = 10\cos\omega_0 t - 8$$

Buna göre $y_d(t)$ aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 17.Distorsiyonlu işaretin kırpılmış parçaları

Buna göre çıkıştaki $y_d(t)$ aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$y_d(t) = \begin{cases} 10\cos\omega_0 t - 8 & |t| \le 0.1024\,T_0 \\ 10\cos\omega_0 t + 8 & \dfrac{T_0}{2} - 0.1024\,T \le |t| \le \dfrac{T_0}{2} + 0.1024\,T \\ 0 & \end{cases}$$

Böyle bir tanıma sahip $y_d(t)$ işaretinin mevcut yöntemlerden herhangi biri kullanılarak Fourier serisine açılması mümkündür.Bu fonksiyonun Fourier serisi için gerekli işlemler yapıldığında $y_d(t)$ çift fonksiyon olduğu için $b_n = 0$ ve $C_n = a_n$ olur. Bu durumda Fourier serisi, $C_n = a_n$ katsayılarını içeren Fourier serisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega_0 t$$

Buradan C_n

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{20}{\pi}\left[\dfrac{\sin 0.6435(n+1)}{n+1} + \dfrac{\sin 0.6435(n-1)}{n-1}\right] - \dfrac{32}{\pi}\left[\dfrac{\sin 0.6435n}{n}\right] & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases}$$

buradan seri,

$$y_d(t) = 1.04\cos\omega_0 t + 0.733\cos 3\omega_0 t + 0.311\cos 5\omega_0 t + \cdots$$

olarak hesaplanır.

$$P_{yd} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|y_d(t)\right|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T_0/4}\int_0^{T_0/4} y_d^2(t)^2\, dt$$

$$P_{yd} = \frac{4}{T_0}\int_0^{0.1024T_0} (10\cos\omega_0 t - 8)^2\, dt$$

$$= 0.865$$

Giriş işaretinin $x(t) = 10\cos\omega_0 t$ enerjisi

$$P_f = \frac{10^2}{2} = 50$$

Buradan bozulmaya sebep olan harmoniklere ait toplam enerjisi hesaplanır,

$$D_{top} = \frac{P_{yd}}{P_f}\times 100$$

$$D_{top} = \frac{0.865}{50}\times 100 = \%1.73$$

Bulunan harmoniklere ait toplam enerjideki D_{top} her bir harmoniğin ne kadar payının olduğunu hesaplamak için de,

$$D_n = \frac{P_{D_n}}{P_f}\times 100$$

bağıntısından yararlanılır. Buradan birinci ve üçüncü harmoniklere ait bozulmayı hesaplayalım. Birinci harmonik için,

$$P_{D_1} = \frac{(1.04)^2}{2} = 0.5408$$

$$D_1 = \frac{0.5408}{50}\times 100 = \%1.08$$

üçüncü harmonik için,

$$P_{D_3} = \frac{(0.726)^2}{2} = 0.2635$$

$$D_3 = \frac{0.2635}{50} \times 100 = \%0.527$$

LINEER ZAMANDAN BAĞIMSIZ SÜREKLİ SİSTEMLERİN PERİYODİK GİRİŞLERE CEVABI

e^{St}

$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, f(t-\tau)\, d\tau = h(t) * e^{St} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{S(t-\tau)}\, d\tau$$

e^{St} fonksiyonunun özelliğinden dolayı burada " s " sabit durumundadır. İfade biraz düzenlenirse,

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-S\tau}\, d\tau$$
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-S\tau}\, d\tau$$

Burada bahsettiğimiz gibi " s " in değerleri için $H(s)$ transfer fonksiyonu sabit (reel veya kompleks) gibi davranmaktadır. Bu yüzden $H(s)$ fonksiyonu vektörel yaklaşımla, özdeğer (eigenvalue) olarak düşünülebilir.

$$y(t) = H(s)\, e^{St}$$

Bu yazımda "s" in kompleks değişken değeri için $H(s)$ transfer fonksiyonu olarak anılmaktadır. Bu durumda giriş işareti olarak $f(t)$ nin

$$f(t) = e^{St}$$

alınması durumunda transfer fonksiyonu,

$$H(s) = \frac{y(t)}{F(s)}$$

olacaktır. Bu yazım yalnızca LTIC sistemler için geçerli olacaktır, lineer olmayan sistemler için geçerli değildir. Bu durumu Fourier serisine uyarlarsak,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

Biliyoruz ki, giriş $f(t) = e^{St} = F(s)$ için çıkış,

$$y(t) = H(s)\,e^{St}$$

idi. Bu yaklaşımı frekansa göre yazarsak girişte e^{St} yerine $e^{j\omega t}$ buna uygun olarak da $H(s)\,e^{st}$ çıkış yerine de $H(j\omega)\,e^{j\omega t}$ alınacağından

$$\underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{giriş}} = \underbrace{H(j\omega)\,e^{j\omega t}}_{\text{çıkış}}$$

elde edilir. Dikkat edilirse girişteki $e^{j\omega t}$ fonksiyonu, çıkışta da aynen elde edilmiştir. Hatırlanacağı gibi bu tam değer fonksiyonlarının en önemli özelliği, ve de avantajıydı. Buna göre,

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t}}_{\text{giriş}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, H(jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}}_{\text{cevap}}$$

olacaktır. Böylece periodik bir giriş

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t} \qquad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

için LTIC sistem cevabı olarak

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, H(jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}$$

elde edilecektir. Diğer bir deyişle bir LTI sistemin Fourier serisi karekterindeki bir girişe, verdiği cevap elde edilmiştir. $H(jn\omega_0)$ nin sistem transfer fonksiyonu olduğu düşünülürse, periodik LTIC sistem için

$$H(jn\omega_0) = \frac{y(t)}{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t}}$$

Bunların sonucunda gerek elde edilen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, H(jn\omega_0 t)\, e^{jn\omega_0 t}$$

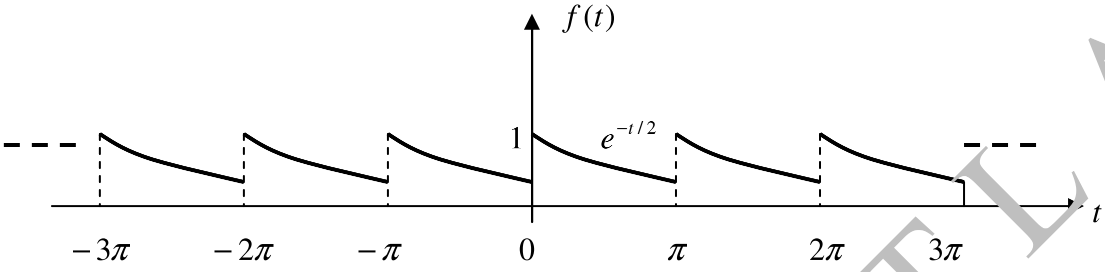
gerekse

$$H(jn\omega_0) = \frac{y(t)}{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t}}$$

ifadelerinden girişi sinusoid olan sistemin çıkışı veya transfer fonksiyonu da sinusoid özellikte elde edilmiştir. Ancak dikkat edilirse, çıkış girişle aynı frekansta olmasına rağmen, farklı genlik ve fazda oluşabilmektedir. Bu girişi sinusoid olan sistemlerin frekans cevaplarının önemli özelliğidir.

Örnek

Aşağıda girişi verilen LTIC sistemin



Şekil 18.Periodik bir işaretin Fourier serisi

transfer fonksiyonu $H(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2s + 3}$ ise, sistemin cevabını hesaplayınız.

Çözüm

Verilen $f(t)$ işaretinin Fourier serisine açılımı daha önce yapılmıştı.

$$a_n = 0.504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right) \quad \text{ve} \quad b_n = 0.504\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right)$$

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}\left[0.504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right) - j0.504\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right)\right] = 0.504\left[\left(\frac{1}{1+16n^2} - \frac{j4n}{1+16n^2}\right)\right]$$

$$= 0.504\left[\left(\frac{1-j4n}{1+16n^2}\right)\right] = 0.504\left[\frac{1-j4n}{(1-j4n)(1+j4n)}\right] = \frac{0.504}{1+j4n}$$

$$D_n = \frac{0.504}{1+j4n}$$

Ayrıca $T_0 = \pi$ ve $\omega_0 = 2$ idi. Bunların ışığında sistemin cevabı

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 3} \quad \text{ise}$$

$$H(s = jn\omega_0) = \frac{jn\omega_0}{(jn\omega_0)^2 + 2(jn\omega_0) + 3}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \, H(jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t} = \frac{0.504}{1+j4n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jn2)\, e^{jn2t}$$

$$= \frac{0.504}{1+j4n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{jn\omega_0}{(jn2)^2 + 2(jn2) + 3} e^{jn2t} = \frac{0.504}{1+j4n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j2ne^{jn2t}}{(jn2)^2 + j4n - 4n + 3}$$

$$y(t) = \frac{0.504}{1+j4n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j2ne^{jn2t}}{(jn2)^2 + j4n - 4n + 3} = \frac{0.504}{1+j4n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j2ne^{jn2t}}{-4n^2 - 4(1-j)n + 3}$$

$$y(t) = -\frac{0.504}{1+j4n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j2ne^{jn2t}}{4n^2 + 4(1-j)n - 3}$$