

VIII. Bölüm: Önemli Sürekli Olasılık Dağılımları

Bu bölümde, Weibull ve Pareto dağılımlarından sayı üreticiler tartışılarak değişik örnek hacimlerinde parametrelerin nokta ve aralık tahminleri tartışılacak ve Excel uygulamaları ile örneklendirilecektir.

Deney-14: Bu deneyde, bir sürekli X tesadüfi değişkenine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} = \frac{2}{25} x e^{-(x/5)^2}, x > 0$$

olan bir Weibull dağılımın ortalaması μ için $n = 50, 100, 200, 500$ ve 1000 birimlik örneklem verileri simüle ederek nokta ve güven aralığı tahmin etmek.

Matematiksel Açıklama: Sürekli ters dönüşüm yöntemi ile üretici fonksiyonu yazmalıyız. Öncelikle $F(x) \sim U(0, 1)$ 'dir. Burada $U, (0, 1)$ 'de sürekli düzgün dağılıma sahiptir. Excel programında bu değer, S_SAYI_ÜRET komutu ile üretilir ve $F(x)$ 'de X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. . Öncelikle verilen dağılımın dağılım fonksiyonu, $F(x) = 1 - e^{-(x/5)^2}$ olup üretici fonksiyon,

$$y_i = 5\sqrt{-\ln(1 - u_i)}$$

ile değişken değeri simüle edilir. Buradan $\bar{Y} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ tahmin edicisi μ 'nın

(yani; ortalamanın) en iyi nokta tahmin edicisi olur. Y 'nin varyans tahmini ise

$S_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ tahmin edicisi kullanılarak tahmin edilebilir. Böylece \bar{Y} 'nin

standart hatası ise $S_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{S_Y^2}{n}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Buradan A 'nın

$\%100(1 - \alpha)$ güven aralığı tahmini ise $\bar{Y} \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{Y}}$ tahmin edicisi yardımı ile

hesaplanır. Burada α önem seviyesi, $(1 - \alpha)$ güvenilirlik seviyesi ve $Z_{\alpha/2}$ ise

$\alpha/2$ 'deki standart normal dağılımın koordinat (tablo) değeridir. Örneğin; $\%95$

güvenilirlikle standart normal dağılımın koordinat değeri $Z_{0.025} = 1,96$ 'dır.

Sonuç Özetleme: Sonuçlar takipte verilen tablo şeklinde özetlenir.

Örnek Hacmi	Gerçek Değer	Nokta Tahmin	Std Hata	%95	
n	$\mu = \beta\Gamma(1 + 1/\alpha)$	$\bar{Y} = \hat{\mu}$	$S_{\bar{Y}}$	Alt Limit	Üst Limit
50	4.431				
100	4.431				
200	4.431				
500	4.431				
1000	4.431				

Yorum: Tablodaki sonuçlara dayalı yorum yapılmalıdır.

Deney-15: Bu deneyde, bir sürekli X tesadüfi değişkenine ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} = \frac{3(5)^3}{x^4}, x > 5 > 0$$

olan bir Pareto dağılımın ortalaması μ için $n = 50, 100, 200, 500$ ve 1000 birimlik örneklem verileri simüle ederek nokta ve güven aralığı tahmin etmek.

Matematiksel Açıklama: Sürekli ters dönüşüm yöntemi ile üretici fonksiyonu yazmalıyız. Öncelikle $F(x) \sim U(0, 1)$ 'dir. Burada U , $(0, 1)$ 'de sürekli düzgün dağılıma sahiptir. Excel programında bu değer, S_SAYI_ÜRET komutu ile üretilir ve $F(x)$ 'de X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Öncelikle verilen dağılımın dağılım fonksiyonu, $F(x) = 1 - (5/x)^3$ olup üretici fonksiyon,

$$y_i = 5(1 - u_i)^{-1/3}$$

ile değişken değeri simüle edilir. Buradan $\bar{Y} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ tahmin edicisi μ 'nın (yani; ortalamanın) en iyi nokta tahmin edicisi olur. Y 'nin varyans tahmini ise $S_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ tahmin edicisi kullanılarak tahmin edilebilir. Böylece \bar{Y} 'nin

standart hatası ise $S_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{S_Y^2}{n}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Buradan A 'nın

%100(1 - α) güven aralığı tahmini ise $\bar{Y} \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{Y}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Burada α önem seviyesi, $(1 - \alpha)$ güvenilirlik seviyesi ve $Z_{\alpha/2}$ ise $\alpha/2$ 'deki standart normal dağılımın koordinat (tablo) değeridir. Örneğin; %95 güvenilirlikle standart normal dağılımın koordinat değeri $Z_{0.025} = 1,96$ 'dır.

Sonuç Özetleme: Sonuçlar takipte verilen tablo şeklinde özetlenir.

Örnek Hacmi	Gerçek Değer	Nokta Tahmin	Std Hata	%95	
n	$\mu = \alpha\beta/(\alpha - 1)$	$\bar{Y} = \hat{\mu}$	$S_{\bar{Y}}$	Alt Limit	Üst Limit
50	7.5				
100	7.5				
200	7.5				
500	7.5				
1000	7.5				

Yorum: Tablodaki sonuçlara dayalı yorum yapılmalıdır.