VII. Bölüm: Önemli Kesikli Olasılık Dağılımları

Bu bölümde, Geometrik ve Poisson dağılımlarından sayı ürticiler tartışılarak değişik örnek hacimlerinde parametrelerin nokta ve aralık tahminleri tartışılacak ve Excel uygulamaları ile örneklendirilecektir.

Deney-10: Bu deneyde, bir kesikli X tesadüfi değişkenine ilişkin olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}=0.6\,(0.4)^{x-1}, x=1,2,\cdots$$

olan bir geometrik dağılımının ortalaması μ için $n=50, 100, 200, 500$ ve 1000 birimlik örneklem verileri simüle ederek nokta ve güven aralığı tahmin etmek.

Matematiksel Açıklama: Kesikli ters dönüşüm yöntemi ile üretici fonksiyonu yazmalıyız. Öncelikle $F(x){\sim}U(0,1)$'dir. Burada U, $(0,1)$ 'de sürekli düzgün dağılıma sahiptir. Excel programında bu değer, S_SAYI_ÜRET komutu ile üretilir ve $F(x)$'de X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Öncelikle bir geometrik dağılımın dağılım fonksiyonu, $F(x)=1-(1-p)^x=1-q^x=1-(0.4)^x$ olup üretici fonksiyon,

$$y_i=\left[\!\left[\frac{ln(1-u_i)}{\ln(0.4)}+1\right]\!\right]=Tamsayı\left(\frac{ln(1-u_i)}{\ln(0.4)}+1\right)$$

üretici fonksiyonu geometrik değişkeni simüle edilir. Buradan $\bar{Y}=\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$ tahmin edicisi μ'nün (yani; ortalamanın) en iyi nokta tahmin edicisi olur. Y'nin varyans tahmini ise $S_Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$ tahmin edicisi kullanılarak tahmin edilebilir. Böylece $\bar{Y}$'nın standart hatası ise $S_{\bar{Y}}=\sqrt{\frac{S_Y^2}{n}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Buradan A'nın $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı tahmini ise $\bar{Y}\pm Z_{\alpha/2}S_{\bar{Y}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Burada α önem seviyesi, $(1-\alpha)$ güvenilirlik seviyesi ve $Z_{\alpha/2}$ ise $\alpha/2$'deki standart normal dağılımın koordinat (tablo) değeridir. Örneğin; %95 güvenilirlikle standart normal dağılımın koordinat değeri $Z_{0.025}=1{,}96$'dır.

Sonuç Özetleme: Sonuçlar takipte verilen tablo şeklinde özetlenir.

Örnek Hacmi	Gerçek Değer $\mu = 1/p$	Nokta Tahmin	Std Hata	%95	
n		$\bar{Y} = \hat{\mu}$	$S_{\bar{Y}}$	Alt Limit	Üst Limit
50	$1.\bar{6}$				
100	$1.\bar{6}$				
200	$1.\bar{6}$				
500	$1.\bar{6}$				
1000	$1.\bar{6}$				

Yorum: Tablodaki sonuçlara dayalı yorum yapılmalıdır.

Deney-11: Bu deneyde, bir kesikli X tesadüfi değişkenine ilişkin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x! = e^{-2}2^x/x!, x = 0,1,2,\cdots$$

olan bir Poisson dağılımının ortalaması μ için $n = 50, 100, 200, 500$ ve 1000 birimlik örneklem verileri simüle ederek nokta ve güven aralığı tahmin etmek.

Matematiksel Açıklama: Kesikli ters dönüşüm yöntemi ile üretici fonksiyonu yazmalıyız. Öncelikle $F(x) \sim U(0, 1)$'dir. Burada U, $(0, 1)$ 'de sürekli düzgün dağılıma sahiptir. Excel programında bu değer, S_SAYI_ÜRET komutu ile üretilir ve $F(x)$'de X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Öncelikle bir Poisson dağılımın dağılım fonksiyonu, açık bir biçimde yazmak olası olmadığından üretici fonksiyonu,

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{Eğer } u_i < \dfrac{1}{e^2} \\ 1, & \text{Eğer} \dfrac{1}{e^2} \le u_i < \dfrac{3}{e^2} \\ 2, & \text{Eğer} \dfrac{3}{e^2} \le u_i < \dfrac{5}{e^2} \\ 3, & \text{Eğer} \dfrac{5}{e^2} \le u_i < \dfrac{19}{3e^2} \\ 4, & \text{Eğer} \dfrac{19}{3e^2} \le u_i < \dfrac{21}{3e^2} \\ 5, & \text{Eğer} \dfrac{21}{3e^2} \le u_i < \dfrac{109}{15e^2} \\ 6, & \text{Eğer} \dfrac{109}{15e^2} \le u_i < \dfrac{331}{45e^2} \\ 7, & \text{Eğer } u_i \ge \dfrac{331}{45e^2} \end{cases}$$

kullanılarak simüle edilir. Buradan $\bar{Y} = \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ tahmin edicisi μ'nün (yani; ortalamanın) en iyi nokta tahmin edicisi olur. Y'nin varyans tahmini ise $S_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ tahmin edicisi kullanılarak tahmin edilebilir. Böylece $\bar{Y}$'nın standart hatası ise $S_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{S_Y^2}{n}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Buradan A'nın $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı tahmini ise $\bar{Y} \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{Y}}$ tahmin edicisi yardımı ile hesaplanır. Burada α önem seviyesi, $(1-\alpha)$ güvenilirlik seviyesi ve $Z_{\alpha/2}$ ise $\alpha/2$'deki standart normal dağılımın koordinat (tablo) değeridir. Örneğin; %95 güvenilirlikle standart normal dağılımın koordinat değeri $Z_{0.025} = 1{,}96$'dır.

Sonuç Özetleme: Sonuçlar takipte verilen tablo şeklinde özetlenir.

Örnek Hacmi	Gerçek Değer $\mu = \lambda$	Nokta Tahmin	Std Hata	%95	
n		$\bar{Y} = \hat{\mu}$	$S_{\bar{Y}}$	Alt Limit	Üst Limit
50	2				
100	2				
200	2				
500	2				
1000	2				

Yorum: Tablodaki sonuçlara dayalı yorum yapılmalıdır.