VI. BÖLÜM: LİNEER DENKLEMLER

VI.1. Giriş

Lineer denklemler teorisi, lineer cebir (materisler kuramı) konusunda oldukça önemli bir rol oynar. Aslında lineer cebirde bir çok problem bir lineer denklem sisteminin incelenmesine eşdeğerdir.

VI.2. Lineer denklem

Tanım-VI.1: R reel vektör uzayında bir lineer denklem,

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

eşitliği ile verilir. Burada a_i ve $b \in R$ ve x_i'ler de belirsiz (bilinmeyen veya değişkenler) değerlerdir. x_i'lere karşılık gelen a_i sabitlerine katsayılar ve b'ye de sabit terim veya kısaca denklem sabiti denir. $x_1 = k_1, \cdots, x_n = k_n$ bilinmeyenlerinin meydana getirdiği küme, eğer x_i'ler yerine k_i'ler yazıldığında elde edilen $a_1k_1 + \cdots + a_nk_n = b$ eşitliği sağlanıyorsa bu denklemin bir çözümüdür. Dolayısıyla bu değerler kümesi denklemi sağlıyor denilir. Eğer bilinmeyenler denklemde k_i'lerle aynı sırada ise bu çözüme n-elemanlı dizi çözüm veya kısaca n-elemanlı çözüm denir ve $\boldsymbol{u} = (k_1, \cdots, k_n)$ vektörü ile gösterilir.

Örnek-VI.1: $x + 2y - 4z + s = 3$ denklemi ele alınsın. Burada 4-elemanlı $\boldsymbol{u} = (3,2,1,0)$ verilen denklemin çözümüdür. Çünkü $3 + 2(2) - 4(1) + 0 = 3 \;=>\; 3 = 3$ eşitliği sağlanmaktadır. Örneğin; 4-elemanlı, $\boldsymbol{v} = (1,2,4,5)$ ise denklemin çözümü değildir. Zira $6 \neq 3$ olduğundan denklem sağlanmamaktadır.

Böylece denklem (1)'in çözümleri bulunabilir. Burada üç durum sözkonusudur. Bunlar:

a) Katsayılardan biri sıfır olmasın (örneğin; $a_1 \neq 0$). Bu durumda denklem (1) şu şekilde $x_1 = a_1^{-1}[b - (a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)]$ yazılabilir. $x_2, \cdots, x_n$ bilinmeyenlerine değerler vererek x_1 için bir değer bulunur. İşte bu değerler bir çözümünü oluşturur. Tek bilinmeyenli $ax = b$, $a \neq 0$ lineer denklemin tek bir çözümü vardır. Yani; $x = a^{-1}b$'dir.

Örnek-VI.2: $2x - 4y + z = 8$ denklemi verilsin. Bu denklem, $2x = 8 + 4y - z$ veya $x = 4 + 2y - \frac{1}{2}z$ şeklinde yazılabilir. y ve z için herhangi iki değer x için bir değer verir ve bu değer de bu denklemin çözümü olur. Örneğin; $y = 2$ ve $z = 4$ için $x = 4 + 2(2) - \frac{1}{2}(4) =>$ $x = 6$ bulunur. Bu durumda 3-elemanlı, $\boldsymbol{u} = (6,2,4)$ denklemin bir çözümüdür.

b) Denklem (1)'deki bütün kaysayılar sıfır (yani; $\forall a_i = 0$), ancak sabit sıfır değildir ($b \neq 0$). Bu durumda $0x_1 + \cdots + 0x_n = b, (\ b \neq 0)$ denklemi elde edilir ki bu bir çekişki oluşturduğundan çözüm yoktur.

c) Denklem (1)'deki butün kaysayılar sıfır ve sabit de sıfırdır değildir (yani; $\forall a_i = 0\,, b = 0$). Bu durumda $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$ denklemi elde edilir ki R uzayındaki her n-elemanlı sabitler denklemin bir çözümüdür.

VI.3. Lineer Denklem Sistemleri

Tanım-V.2: $x_1, \cdots, x_n$ n bilinmeyenli m adet lineer denklem sistemi,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

ile verilir. Burada Burada a_{ij} ve $b_i \in R$'dir. Eğer $b_1, \cdots, b_m$ sabitlerinin hepsi sıfır ise sistem homojen denklem sistemi adını alır. Bir n- elemanlı $\boldsymbol{u} = (k_1, \cdots, k_n)$ reel sayıları sistemdeki her denklemi sağlarsa bu bir çözümdür. İşte böylesi bir çözüme özel çözüm denir. Bu tip çözümlerin tümü genel çözüm adını alır Böylece sistem (2)'nin homojen sistemi,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

ile verilir. Sistem (3)'ün her zaman n- elemanlı bir $\boldsymbol{o} = (0, \cdots, 0)$ sıfır çözümü vardır ve sıfır çözüm diye adlandırılır. Herhangi bir diğer çözüm, eğer varsa, sıfır olamayan çözüm adını alır.

Sistem (2) ve (3) arasındaki abağıntı takipteki teoremle açıklanabilir.

Teorem-VI.1: $\boldsymbol{u}$, sistem (2) homojen olmayan sistemin bir özel çözümü ve V'de homojen sistem (3)'ün genek çözümü ise o zaman $\boldsymbol{u} + V = \{\boldsymbol{u} + V\colon\ \boldsymbol{v} \in V\}$ 'dir.

VI.4. Lineer Denklem Sisteminin Çözümü

VI.4.1 Gauss Yok Etme Metodu İle Çözüm

Sistem (2) göz önüne alınsın. İlgili sistem takipteki gibi daha basit bir forma indirgenebilir.

1. **Adım:** Denklemler öyle değiştirilsin ki birinci bilinmeyen (x_1) ilk denklemde sıfır olamayan bir katsayıya sahip olsun ($a_{11} \neq 0$).
2. **Adım:** Her $i > 1$ için $L_1 \to -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$ işlemi yapılır.

Bu işlemlerden sonra sistem (2)'ye özdeş olan (yani; sistem (2) ile aynı çözüm kümesine sahip olan) sistem elde edilir. Şöyleki

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{21}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

olur. Bu son sistem diğer denklelemlerden bir bilinmeyeni yok eder ve Gauss yok etme metodu olarak bilinir.

Örnek-VI.3: Takipteki denklem sistemi göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} L_1: 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ L_2: 3x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = -7 \\ L_3: \quad 4x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

x_1 bilinmeyenini ikinci ve üçüncü denklemlerden yok ediniz.

Çözüm-VI.3: $L_2 \to -3L_1 + 2L_2$ ve $L_3 \to -2L_1 + L_3$ değerleri hesaplanırsa

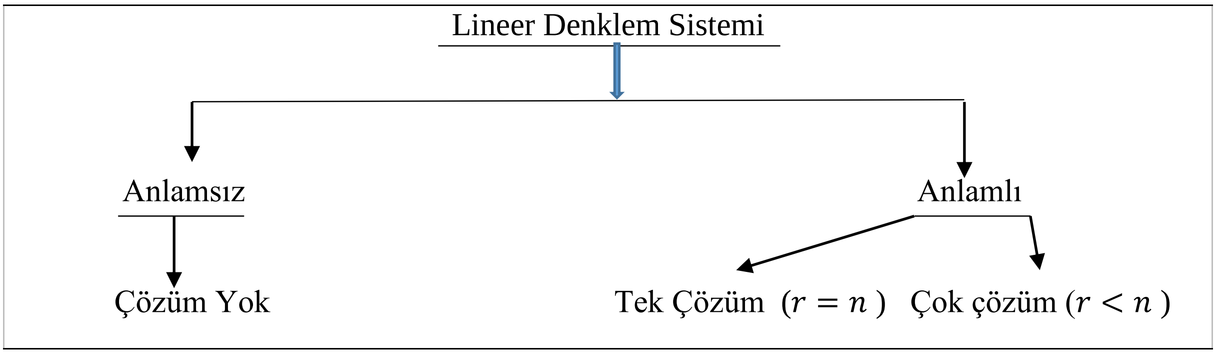
$$\begin{cases} L_1: 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ L_2: \qquad\qquad 5x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -17 \\ L_3: \qquad\qquad\quad 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Böylece ilk sistem özdeş sisteme indirgenir ve bu metotla birinci denklem hariç ilk sistemden daha az bilinmeyenli bir alt sistem meydana gelmiş olur. Burada ayrıca dikkat edilmelidir ki a) Eğer bu yok etme (yada indirgeme) sonucunda $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, b \neq 0$ gibi bir denklem ortaya çıkarsa bu denklem anlamsız olduğundan sistemin çözümü yoktur denilir, b) Eğer $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ gibi bir denklem ortaya çıkarsa çözüme bir katkısı ya da etkisi olmadığından bu denklem sistemden çıkarılır.

Gauss yok etme işlemine her yeni daha küçük ve alt sistemle devam edilirse indirgeme işlemi sonucu ilk sistem ya anlamsız ya da özdeş sisteme indirgenmiş olur.

Teorem-VI.2: Basamak formundaki (en son indirgenmiş) sistemin çözümünde iki durum geçerlidir. a) Bilinmeyenler kadar denklem vardır ($r = n$). Dolayısıyla sistemin tek çözümü vardır. b) Bilinmeyen sayısından daha az denklem vardır ($r < n$). Dolayısıyla sistemde $(n - r)$ serbest değişkenlere keyfi değerler verilip sistemin çok çözümü vardır.



Şekil-VI.1: Lineer denklem sistemlerinin genel görüntüsü.

Örnek-VI.4: Takipteki denklem sisteminin durumunu belirleyiniz.

$$\begin{cases} L_1: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ L_2: 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ L_3: 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

Çözüm-VI.4: Gerekli yok etme işlemi uygulanırsa sistem,

$$\begin{array}{ll} -3/ & \begin{array}{r} -3/ \\ 2/ \\ 2/ \end{array} \begin{cases} L_1: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ L_2: 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ L_3: 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases} \sim \begin{array}{r} -3/ \\ 1/ \end{array} \begin{cases} L_1: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ L_2: \quad x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 5 \\ L_3: \quad 3x_2 + 12x_3 - 15x_4 = 7 \end{cases} \end{array}$$

$$\sim \begin{cases} L_1: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ L_2: \quad x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 5 \\ L_3: \quad 0 = -8 \end{cases}$$

basit sisteme indirgenmiş olur, ancak $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -8$ veya $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 8$ olup bir çelişki oluşmuştur. Bu denklem anlamsız olduğundan sistemin çözümü bulunamaz.

Örnek-VI.5: Takipteki denklem sisteminin durumunu belirleyiniz.

$$\begin{cases} L_1: \quad x + 2y - 3z = 4 \\ L_2: \quad x + 3y + z = 11 \\ L_3: 2x + 5y - 4z = 13 \\ L_4: 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

Çözüm-VI.5: Gerekli yok etme işlemi uygulanırsa sistem,

$$\begin{array}{lll} -2/ & -2/ & \begin{array}{r} -1 \\ 1/ \\ 1/ \\ 1/ \end{array} \begin{cases} L_1: \quad x + 2y - 3z = 4 \\ L_2: \quad x + 3y + z = 11 \\ L_3: 2x + 5y - 4z = 13 \\ L_4: 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases} \sim \begin{array}{r} -2/ \quad -1/ \\ 1/ \\ 1/ \end{array} \begin{cases} L_1: \quad x + 2y - 3z = 4 \\ L_2: \quad y + 4z = 7 \\ L_3: \quad y + 2z = 5 \\ L_4: \quad 2y + 8z = 14 \end{cases} \end{array}$$

$$\sim \begin{cases} L_1: \quad x + 2y - 3z = 4 \\ L_2: \quad y + 4z = 7 \\ L_3: \quad -2z = -2 \\ L_4: \quad 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} L_1: \quad x + 2y - 3z = 4 \\ L_2: \quad y + 4z = 7 \\ L_3: \quad -2z = -2 \end{cases}$$

elde edilir. Sistemde hiç bir deklem anlamsız olmadığından sistemin anlamlı olduğu görülür. Ayrıca basamak formunda üç bilinmeyenli üç adet denklem olduğundan sistemin tek çözümlü olduğu söylenir. Üçüncü denklemden $2z = 2 => z = 1$ bulunur. Bu sonuç ikinci denklemde değerlendirilirse $y + 4(1) = 7 => y = 3$ olur. Birinci denklemden (veya ilk verilen sistemdeki herhangi birinden) $x + 2(3) - 3(1) = 4 => x = 1$ bulunur. Böylece 3-elemanlı $(1,3,1)$ sistemin tek çözümüdür.

Örnek-VI.6: Takipteki denklem sisteminin durumunu belirleyiniz.

$$\begin{cases} L_1: \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ L_2: \quad 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ L_3: 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases}$$

Çözüm-VI.6: Gerekli yok etme işlemi uygulanırsa sistem,

$$\begin{array}{ll} -5/ & \begin{array}{r} -2/ \\ 1/ \\ 1/ \end{array} \begin{cases} L_1: \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ L_2: \quad 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ L_3: 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases} \sim \begin{array}{r} -2/ \\ 1/ \end{array} \begin{cases} L_1: x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ L_2: \quad x_3 - 2x_4 = 1 \\ L_3: \quad 2x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases} \end{array}$$

$$\sim \begin{cases} L_1: x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ L_2: \quad x_3 - 2x_4 = 1 \\ L_3: \quad 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} L_1: x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ L_2: \quad x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

elde edilir. Sistemde hiç bir deklem anlamsız olmadığından sistemin anlamlı olduğu görülür. Ayrıca basamak formunda dört bilinmeyenli iki adet denklem olduğundan sistemin çok çözümlü olduğu söylenir. Aslında iki serbest değişken, x_2 ve x_4 vardır ve böylece x_2 ve x_4 bilinmeyenlerine çeşitli değerler vererek bir özel çözüm elde edilebilir. Örneğin; $x_2 = 2$ ve $x_4 = 1$ olsun. $x_4 = 1$ iken ikinci denklemden $x_3 - 2(1) = 1 \Rightarrow x_3 = 3$ bulunur. İlk denklemde $x_2 = 2$ $x_3 = 3$ ve $x_4 = 1$ yazılırsa $x_1 = 1$ bulunur. Böylece 4-elemanlı $(1,2,3,1)$ sistemin özel bir çözümüdür.

Bu denklem sisteminin genel çözümü ise şöyle bulunabilir. Şimdi serbest değişkenlere herhangi $x_2 = a$ ve $x_4 = b$ reel sayıları atansın. İkinci denklemde $x_4 = b$ yazılırsa $x_3 = 2b + 1$ bulunur. Bu iki sonucu ve $x_2 = a$ değerinin birinci denklemde yerine yazılması sonucu $x_1 = 4 - 2a + b$ sonucu elde edilir. Böylece sistemin genel çözümü, $(4 - 2a + b,\ a, 2b + 1, b)$ yazılır.

Bir homojen denklem sistemi düşünüldüğünde (yani Sistem (3)) sistemin açık bir şekilde anlamlı olduğu görülür. Dolayısıyla homojen sistem her zaman eş değer basamak formundaki bir homojen sisteme indirgenebilir. Bu nedenle sistemin çözümünde iki durumdan söz edilebilir. Bu durumlar: a) Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı birbirine eşittir $(r = n)$. Dolayısıyla sistemin yanlız bir sıfır çözümü vardır. b) Bilinmeyen sayısından az denklem vardır $(r < n)$. Dolayısıyla sistemin sıfır olmayan $(n - r)$ adet serbest değişkenli çok çözümü vardır.

Teorem-VI.3: Denklem sayısından fazla bilinmeyenli bir homojen lineer denklem siseminin sistemin sıfır olmayan bir çözümü vardır.

Örnek-VI.7: Takipteki homojen denklem sisteminin durumunu belirleyiniz ve çözümünü bulunuz.

$$\begin{cases} L_1: \ \ x + y - z = 0 \\ L_2: 2x - 3y + z = 0 \\ L_3: x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Çözüm-VI.7: Gerekli yok etme işlemi uygulanırsa sistem,

$$\begin{matrix} -1/ & -2/ \\ & 1/ \\ & 1/ \end{matrix}\begin{cases} L_1: \ \ x + y - z = 0 \\ L_2: 2x - 3y + z = 0 \\ L_3: x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{matrix} \\ -1/ \\ 1/ \end{matrix}\begin{cases} L_1: \ \ x + y - z = 0 \\ L_2: -5y + 3z = 0 \\ L_3: -5y + 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} L_1: \ \ x + y - z = 0 \\ L_2: -5y + 3z = 0 \\ L_3: \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} L_1: \ \ x + y - z = 0 \\ L_2: -5y + 3z = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Basamak formundaki bu sistemde üç bilinmeyenli iki denklem olduğundan sistemin sıfır olmayan çok çözümü vardır. Örneğin; $z = 5$ için $y = 3$ ve $x = 2$ bulunur. Yani; 3-elemanlı $(2,3,5)$ sistemin sıfır olamayan özel bir çözümüdür.

Ödev-VI.1: Takipteki homojen denklem sisteminin durumunu belirleyiniz ve çözümünü bulunuz.

$$\begin{cases} L_1: \quad x + y - z = 0 \\ L_2: 2x + 4y - z = 0 \\ L_3: 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

(C: Sıfır çözümü vardır.)

VI.5 Uygulama-I: Gauss Yok Etme Metodu İle İlgili

U-VI.1: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin durumunu belirleyiniz ve eğer varsa çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.1: Denklem sisteminin durumu Gauss yok etme metodu ile tespit edilebilir. Böylece

$$\begin{array}{r} -5/ \quad -3/ \\ 1/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 7 \\ 5 & 3 & -4 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ -1/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 11 & \vdots & 10 \\ 0 & -7 & 11 & \vdots & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & -7 & 11 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki üçüncü denklem çelişki içerisinde olduğundan denklem anlamsız ve sistem de anlamsızdır. Dolayısıyla sistemin çözümü yoktur.

U-VI.2: $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin durumunu belirleyiniz ve eğer varsa çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.2: Denklem sisteminin durumu Gauss yok etme metodu ile tespit edilebilir. Böylece

$$\begin{array}{r} -5/ \quad -3/ \\ 2/ \\ 2/ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 3 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 5 & 4 & 3 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ -3/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & -28 \\ 0 & 3 & 16 & \vdots & -42 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & -14 & \vdots & 42 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki hiç bir denklem çelişki içerisinde olmadığından sistem anlamlıdır. Dolayısıyla sistemde üç bilinmeyenli üç denklem bulunduğundan tek çözüm vardır. Üçüncü denklemden $-14z = 42 => z = -3$ bulunur. İkinci denklemden $y + 10(-3) = -28 => y = 2$ ve birinci denklemden de $2x + 1(2) - 2(-3) = 10 => 2x = 2 => x = 1$ bulunur. Sonuç olarak; 3-elemanlı tek çözüm, $(1,2,-3)$ olarak yazılır.

U-VI.3: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin durumunu belirleyiniz ve eğer varsa çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.3: Denklem sisteminin durumu Gauss yok etme metodu ile tespit edilebilir. Böylece

$$\begin{array}{cc} -4/ & -2/ \\ & 1/ \\ & 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \vdots & 6 \\ 2 & -1 & 4 \vdots & 2 \\ 4 & 3 & -2 \vdots & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ -1/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \vdots & 6 \\ 0 & -5 & 10 \vdots & -10 \\ 0 & -5 & 10 \vdots & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \vdots & 6 \\ 0 & -5 & 10 \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 0 \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki hiç bir denklem çelişki içerisinde olmadığından sistem anlamlıdır. Üçüncü denklemin çözüme katkısı olmadığından işlemden çıkarılır dolayısıyla sistemde üç bilinmeyenli iki denklem bulunduğundan sistemin (3-2) = 1 serbest değişkenli çok çözümü vardır. Sistemin serbest değişkeni z olduğundan genel çözümü elde edebilmek için $z = a \in R$ olsun. İkinci denklemden $-5y + 10a = -10 \ => y = 2a + 2$ ve birinci denklemden de $x + 2(2a + 2) - 3(a) = 6 => x = -a + 2 =>$ bulunur. Sonuç olarak; 3-elemanlı genel çözüm, $(2 - a, 2a + 2, a)$ olarak yazılır. Örneğin sistemin bir özel çözümü için $a = 1$ olsun. $x = 1$, $y = 4$ ve $z = 1$ veya $(1,4,1)$ elde edilir.

U-VI.4: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümü olabilmesi için a, b ve c sabitleri üzerine hangi kısıtlama konulmalıdır.

Çözüm-VI.4: Önce denklem sisteminin durumu Gauss yok etme metodu ile tespit edelim.

$$\begin{array}{cc} -1/ & -2/ \\ & 1/ \\ & 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \vdots & a \\ 2 & 6 & -11 \vdots & b \\ 1 & -2 & 7 \vdots & c \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 2/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \vdots & a \\ 0 & 2 & -5 \vdots & b - 2a \\ 0 & -4 & 10 \vdots & c - a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \vdots & a \\ 0 & 2 & -5 \vdots & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 \vdots & 2b - 5a + c \end{bmatrix}$$

özdeş sistemi elde edilir. Eğer üçüncü denklem $0 = k, k \neq 0$ formunda olursa sistemin çözümü olmaz. Yani $2b - 5a + c \neq 0$ olursa bu sistemin çözümü yoktur. Eğer $2b - 5a + c = 0$ olursa sistemin denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olacağından çok çozümü bulunabilir.

U-VI.5: $\left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{array}\right\}$ homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm-VI.5: Denklem sisteminin durumu Gauss yok etme metodu ile tespit edilebilir. Böylece

$$\begin{array}{cc} -4/ & -3/ \\ & 1/ \\ & 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & :0 \\ 3 & -7 & -2 & 4 & :0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & :0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 11/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & :0 \\ 0 & -1 & -11 & 10 & :0 \\ 0 & 11 & -7 & 10 & :0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & :0 \\ 0 & -1 & -11 & 10 & :0 \\ 0 & 0 & -128 & 120 & :0 \end{bmatrix}$$

özdeş sistemi elde edilir. Sistemde bilinmeyen sayısından az denklem sayısı olduğunda (yani; $3 < 4$) (4-3) = 1 serbest değişken vardır ve bu serbest değişken de x_4'tür. Genel çözümü elde etmek için $x_4 = a \in R$ olsun. Üçüncü denklemden $-128x_3 + 120a = 0 => x_3 = \frac{15}{16}a$ ve ikinci denklemden $-x_2 - 11\left(\frac{15}{16}a\right) + 10a = 0 => x_2 = -\frac{5}{16}a$ ve nihayet birinci denklemden de $x_1 - 2\left(-\frac{5}{16}a\right) + 3\left(\frac{15}{16}a\right) - 2a = 0 => x_1 = -\frac{23}{16}a$ olur ve böylece sistemin 4-elemanlı genel çözümü, $\left(-\frac{23}{16}a, -\frac{5}{16}a, \frac{15}{16}a, a\right)$ olarak yazılır. Örneğin bir özel çözüm için $a = 16$ olsun. Bu durumda sistemin özel çözümü, $(-23, -5, 15, 16)$ olur.

U-VI.6: $\left.\begin{matrix} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{matrix}\right\}$ denklem sistemindeki k değerini öyle bulunuz ki sistem; a) tek çözümlü, b) çözümsüz ve c) çok çözümlü olsun.

Çözüm-VI.6: Denklem sisteminin durumu, Gauss yok etme metodu ile tespit edilebilir. Böylece

$$\begin{matrix} -1/ & -1/ \\ & k/ \\ & k/ \end{matrix}\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ -1/ \\ (k+1)/ \end{matrix}\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & (k^2-1) & (k-1) & \vdots & (k-1) \\ 0 & (k-1) & (k^2-1) & \vdots & (k-1) \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & (k^2-1) & (k-1) & \vdots & (k-1) \\ 0 & 0 & (k^3+k^2-2k) & \vdots & (k^2-k) \end{bmatrix}$$ özdeş sistemi elde edilir. a) Bu sistemin tek çözümlü olabilmesi için üçüncü denklemin anlamlı olması ve sistemde kalması gereklidir. Üçüncü denklem, $(k^2 + k - 2)z = (k - 1)$ şeklinde düzenlenebilir. Burada z'nin katsayısı sıfırdan farklı olmalıdır. Buradan $k_{1,2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{1+8})}{2} = \{-2; 1\}$ bulunur. Öyle ise $k = R|\{-2;\ 0;\ 1\}$ için sistem tek çözümlüdür. b) Sistemin çözümsüz olabilmesi için üçüncü denklemin sağ tarafı sıfırdan farklı, sol tarafı sıfır olmalıdır (yani denklem anlamsız olmalıdır). Sağ tarafı sıfır yapan k değerleri, $k = \{0; 1\}$, sol tarafı sıfır yapan k değerleri, $k = \{-2;\ 0; 1\}$ olduğuna göre $k = -2$ için üç numaralı denklemin sol yarısı sıfır olduğu halade sağ tarafı 6 olup denklem anlamsız olmaktadır. Dolayısıyla sistemin çözümü olmaz. c) Sistemin çok çözümlü olabilmesi için üç numaralı denklemin hem sağ ve hem de sol tarafı sıfır olamalıdır. Zira üçüncü denklemin sistemden ayrılması gereklidir. Böylece her iki tarafı da sıfır yapan k değerleri ise her iki tarafın ortak çözüm kümesi olan $k = \{0; 1\}$ değerleridir.

U-VI.7: $\left.\begin{matrix} x - 3z = -3 \\ 2\,x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{matrix}\right\}$ denklem sistemindeki k değerini öyle bulunuz ki sistem; a) tek çözümlü, b) çözümsüz ve c) çok çözümlü olsun.

Çözüm-VI.7: Denklem sisteminin durumu, Gauss yok etme metodu ile tespit edilebilir. Böylece

$$\begin{matrix} -1/ & -2/ \\ & 1/ \\ & 1/ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -3 \\ 2 & k & -1 & \vdots & -2 \\ 1 & 2 & k & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ -2/ \\ k/ \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -3 \\ 0 & k & 5 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & (k+3) & \vdots & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -3 \\ 0 & k & 5 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & A & \vdots & B \end{bmatrix}$$ özdeş sistemi elde edilir. Burada $A = (k^2 + 3k - 10)$ ve $B = (4k - 8)$ ile verilir. a) Bu sistemin tek çözümlü olabilmesi için üçüncü denklemin anlamlı olması ve sistemde kalması gereklidir.

Üçüncü denklem, $(k^2+3k-10)z=(4k-8)$ şeklinde düzenlenebilir. Burada z'nin katsayısı sıfırdan farklı olmalıdır. Buradan $k_{1,2}=\frac{(-3\pm\sqrt{9+40})}{2}=\{-5;2\}$ bulunur. Öyle ise $k=R|\{-5;\ 2\}$ için sistem tek çözümlüdür. b) Sistemin çözümsüz olabilmesi için üçüncü denklemin sağ tarafı sıfırdan farklı, sol tarafı sıfır olmalıdır (yani denklem anlamsız olmalıdır). Sağ tarafı sıfır yapan k değerleri, $k=2$, sol tarafı sıfır yapan k değerleri, $k=\{-5;\ 2\}$ olduğuna göre $k=-5$ için üç numaralı denklemin sol yarısı sıfır olduğu halde sağ tarafı -28 olup denklem anlamsız olmaktadır. Dolayısıyla sistemin çözümü olmaz. c) Sistemin çok çözümlü olabilmesi için üç numaralı denklemin hem sağ ve hem de sol tarafı sıfır olamalıdır. Zira üçüncü denklemin sistemden ayrılması gereklidir. Böylece her iki tarafı da sıfır yapan k değeri ise her iki tarafın ortak çözüm kümesi olan $k=2$ değerleridir.

U-VI.8: $\left.\begin{aligned} x+2y-3z=a\\ 3x-y+2z=b\\ x-5y+8z=c\end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümü olabilmesi için a, b ve c sabitleri üzerine hangi kısıtlama konulmalıdır.

Çözüm-VI.8: Önce denklem sisteminin durumu Gauss yok etme metodu ile tespit edelim.

$$\begin{array}{cc} -1/ & -3/ \\ & 1/ \\ & 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3\vdots & a\\ 3 & -1 & 2\vdots & b\\ 1 & -5 & 8\vdots & c\end{bmatrix}\sim \begin{array}{c} \\ -1/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3\vdots & a\\ 0 & -7 & 11\vdots & b-3a\\ 0 & -7 & 11\vdots & c-a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3\vdots & a\\ 0 & -7 & 11\vdots & b-3a\\ 0 & 0 & 0\vdots & 2a-b+c\end{bmatrix}$$

özdeş sistemi elde edilir. Eğer üçüncü denklem $0=b, b\neq 0$ formunda olursa sistemin çözümü olmaz. Yani $2a-b+c\neq 0$ olursa bu sistemin çözümü yoktur. Eğer $2a-b+c=0$ olursa sistemin denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olacağından çok çözümü bulunabilir.

VI.6 Çalışma Soruları-I: Gauss Yok Etme Metodu İle İlgili

ÇS-VI.1: $\left.\begin{aligned} x+3y-2z=0\\ x-8y+8z=0\\ 3x-2y+4z=0\end{aligned}\right\}$ homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü olup olmadığını inceleyiniz. (C: Sistemin çok çözümü vardır)

ÇS-VI.2: $\left.\begin{aligned} ax+by=e\\ cx+dy=f\end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin; a) tek çözümlü, b) çözümsüz ve c) çok çözümü olduğunu gösteriniz.

ÇS-VI.3: $\left.\begin{aligned} x+2y+kz=1\\ 2x+ky+8z=3\end{aligned}\right\}$ denklem sistemindeki k değerini öyle bulunuz ki sistem; a) tek çözümlü, b) çözümsüz ve c) çok çözümlü olsun.

ÇS-VI.4: $\left.\begin{aligned} x+y+kz=2\\ 3x+4y+2z=k\\ 2x+3y-z=1\end{aligned}\right\}$ denklem sistemindeki k değerini öyle bulunuz ki sistem; a) tek çözümlü, b) çözümsüz ve c) çok çözümlü olsun.

ÇS-VI.5: $\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{array}\right\}$ homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü varsa bulunuz.

ÇS-VI.6: $\left.\begin{array}{r} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin; a) tek çözümlü, b) çözümsüz ve c) çok çözümü olduğunu gösteriniz.

VI.4.2 Determinantlar ile Çözüm (Cramer Kuralı)

n bilinmeyenli n adet lineer denklemden oluşan bir sistem,

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{*}$$

düşünülsün. $A=\left[a_{ij}\right]$ sistemin katsayılar matrisi olmak üzere Δ bu matrisin determinantını göstersin. Ayrıca Δ_i, A matrisinin *i.* sütününun sabit terilmli sütunla yer değiştirmesinden oluşmuş matrisin determinantını göstersin. Determinantlar ve (*) ile verilen sistemin çözümü arasındaki temel bağıntı takipteki iki teoremle verilir.

Teorem-VI.4: $AX=B$ sisteminin ancak ve ancak $\Delta=|A|\neq 0$ ise tek bir çözümü vardır. Bu tek çözüm se $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$ eşitlikleri ile verilir.

Bu teorem, lineer denklem sistemlerinin çözümü için **Cramer Kuralı** olarak bilinir. Bu teoremin yalnızca eşit sayıda bilinmeyeni ve denklemi olan sistemler için geçerli olduğu ve $\Delta=|A|\neq 0$ durumunda çözüm vereceği açıktır. Buna karşılık bir homojen sistem için takipteki teorem verilir.

Teorem-VI.5: $AX=0$ sisteminin ancak ve ancak $\Delta=|A|\neq 0$ ise sıfır olmayan bir çözümü vardır.

Lineer denklem sistemlerinin çözümümünde Cramer Kuralı yaklaşımının Gauss yok etme metodundan daha avantajlı olmadığını söylemek mümkündür. Ancak teorik ve tarihsel nedenlerle ilgi çekici olduğu söylenebilir. Bununla birlikte sistemin çok çözümleri de Gauss indirgeme metodu uygulandıktan sonra Cramer kuralı ile bulunabilir.

Örnek-VI.8: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=7 \\ 3x+5y=1 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin Cramer kuralı ile çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.8: Katsayılar matrisi, $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ olup $\Delta=|A|=19\neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Ayrıca $\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=38$ ve $\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-19$ sonuçları elde edilir. Böylece $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{38}{19}=2$ ve $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{19}{19}=-1$ sistemin çözümüdür.

Örnek-VI.9: $\left.\begin{matrix} ax - 2by = c \\ 3ax - 5by = 2c \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin Cramer kuralı ile çözümünü bulunuz. Burada a, b ve c sıfırdan farklı sabitlerdir.

Çözüm-VI.9: Katsayılar matrisi, $A = \begin{bmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{bmatrix}$ olup $\Delta = |A| = ab \neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Ayrıca $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -bc$ ve $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = -ac$ sonuçları elde edilir. Böylece $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{bc}{ab} = -\frac{c}{a}$ ve $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{ac}{ab} = -\frac{c}{b}$ sistemin çözümüdür.

Örnek-VI.10: $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin Cramer kuralı ile çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.10: Katsayılar matrisi, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ olup $\Delta = |A| = -22 \neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Ayrıca $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -66$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 22$ ve $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -44$ sonuçları elde edilir. Böylece $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{22}{-22} = -1$ ve $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$ sistemin çözümüdür. Böylece 3-elemanlı dizi çözüm $(3, -1, 2)$ ile verilir.

VI.4.3 Matris Tersi ile Çözüm

n bilinmeyenli n adet lineer denklemden oluşan bir sistem, $AX = B$ matris gösterimi ile ifade edilebiliyordu. Burada eğer $|A| \neq 0$ ise $X = A^{-1}B$ eşitliği yardımı ile $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ bilinmeyen vektörü bulunabilir.

Örnek-VI.11: $\left.\begin{matrix} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = 1 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin matris tersi ile çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.11: Katsayılar matrisi, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ olup $\Delta = |A| = -26 \neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Böylece $A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ olup $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B$ eşitliğinden $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 21 \\ 29 \end{bmatrix}$ sonuçları elde edilir. Böylece $x = \frac{21}{26}$ ve $y = \frac{29}{26}$ sistemin çözümüdür.

Örnek-VI.12: $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin matris tersi ile çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.12: Katsayılar matrisi, $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ olup$\Delta=|A|=-22\neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Böylece $A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}=-\frac{1}{22}\begin{bmatrix}11 & -11 & 11\\ -11 & 5 & -7\\ 11 & -7 & 1\end{bmatrix}$ olup $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A^{-1}B$ eşitliğinden $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=-\frac{1}{22}\begin{bmatrix}11 & -11 & 11\\ -11 & 5 & -7\\ 11 & -7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 8\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}66\\ -22\\ 44\end{bmatrix}$ sonuçları elde edilir. Böylece $x=3$, $y=-1$ve $z=2$ sistemin çözümüdür. Böylece 3-elemanlı dizi çözüm $(3,-1,2)$ ile verilir.

Örnek-VI.13: $\left.\begin{matrix}x+2y-3z=1\\ 2x+5y-8z=4\\ 3x+8y-13z=7\end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin durumunu Gauss yok etme metodu ile belirleyiniz ve matris tersi ile çözümünü bulunuz.

Çözüm-VI.12: Denklem sisteminin durumu belirlemek için Gauss yok etme metodunu uygulayalım. Böylece

$$\begin{matrix}-3/ & -2/\\ & 1/\\ & 1/\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & \vdots & 1\\ 2 & 5 & -8 & \vdots & 4\\ 3 & 8 & -13 & \vdots & 7\end{bmatrix}\sim\begin{matrix}\\ -2/\\ 1/\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & 2 & -4 & \vdots & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & \vdots & -1\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir ki denklemlerde bir çelişki olmadığından sistem anlamlı olup sistemin bir serbest değişkenli çok çözümü vardır. Bu serbest değişken ise z'dir. $z=a\in R$ olmak üzere sistemin genel çözümü bulunabilir. Sistemdeki herhangi iki denklem seçilerek $z=a$ için iki bilinmeyenli iki denklem sistemi oluşturulur. Örneğin; 1 ve 2 denklemlerinden $x+2y=3a+1$ ve $2x+5=8a+4$ sistemi elde edilir. Katsayılar matrisi, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ olup $\Delta=|A|=1\neq 0$ olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Böylece $A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ olup $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-1}B$ eşitliğinden $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3a+1\\ 8a+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a-3\\ 2a+2\end{bmatrix}$ sonuçları elde edilir. Böylece $x=-a-3$, $y=2a+2$ ve $z=a$ sistemin çözümüdür. Böylece 3-elemanlı dizi çözüm $(-a-3,2a+2,a)$ ile verilir. Örneğin sistemin bir özel çözümü $z=a=1$ için $x=-4$, $y=4$ ve $z=1$ olup 3-elemanlı özel dizi çözüm $(-4,4,1)$ ile verilir.

VI.5. Bölümle İlgili Genel Uygulama

Uygulama-VI.1: $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $A\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{u}$ olacak şekilde bir $\boldsymbol{u}$ vektörü bulunuz.

Çözüm-VI.1: $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ olsun. $A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u}$ => $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ => $\begin{cases} x + 3y = 3x \\ 4x - 3y = 3y \end{cases}$ veya $\left.\begin{matrix} -2x + 3y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{matrix}\right\}$ denklem sistemi elde edilir. Burada birbirine eşit iki denlem olduğundan sistemin tek serbest değişkenli çok çözümü bulunabilir. Yani $x = \frac{3}{2}y$ yazılır. Sistemin genel çözümü, örneğin; $y = a \in R$ olmak üzere $x = \frac{3}{2}a$ bulunur. Bir özel çözüm için $a = 2$ olsun buradan $x = 3$ bulunur.

Uygulama-VI.2: $\left.\begin{matrix} 2x + 3y - 4z = 7 \\ x - 2y - 5z = 3 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin çözümünü; a) Gauss metodu, b) Cramer kuralı ve c) matris tersi ile bulunuz.

Çözüm-VI.2: a) Gauss metodu ile: $\begin{matrix} -1/ \\ 2/ \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \vdots & 7 \\ 1 & -2 & -5 \vdots & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \vdots & 7 \\ 0 & -7 & -6 \vdots & -1 \end{bmatrix}$ özdeş sistemi elde edilir. Böylece boyA=3-2=1 serbest değişken olup z'dir. $z = a \in R$ için ikinci denklemden $-7y - 6a = -1$ => $y = \frac{1}{7}(1 - 6a)$ ve birinci denklemden $2x + \frac{3}{7}(1 - 6a) - 4a = 7$ => $2x = \frac{(46a+46)}{7}$ => $x = \frac{23}{7}(a + 1)$ bulunur. 3-elemanlı dizi çözüm, $\left(\frac{23}{7}(a + 1), \frac{1}{7}(1 - 6a), a\right)$ yazılır. b) Cramer kuralı ile çözmek için denklemlerde $z = a \in R$ yazarak denklem sistemi yeniden düzenlenir. Şöyle ki $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = 7 + 4a \\ x - 2y = 3 + 5a \end{matrix}\right\}$ olur. Bu ise iki bilinmeyenli iki denklemin çözümüne eş değerdir. Böylece katsayılar matrisi, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ olup $\Delta = |A| = -7 \neq 0$ olduğundan sistemin çözümü bulunabilir. $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 + 4a & 3 \\ 3 + 5a & -2 \end{vmatrix} = -23 - 23a$ ve $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 + 4a \\ 1 & 3 + 5a \end{vmatrix} = -1 + 6a$ bulunur. Buradan $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{23}{7}(a + 1)$ ve $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{7}(1 - 6a)$ bulunur. Sonuç olarak; 3-elemanlı dizi çözüm, $\left(\frac{23}{7}(a + 1), \frac{1}{7}(1 - 6a), a\right)$ yazılır. c) matris tersi ile çözüm $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 + 4a \\ 3 + 5a \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 23a + 23 \\ 1 - 6a \end{bmatrix}$ olup 3-elemanlı dizi çözüm, $\left(\frac{23}{7}(a + 1), \frac{1}{7}(1 - 6a), a\right)$ elde edilir.