III.BÖLÜM. DETERMİNANT VE BİR MATRİSİN TERSİ

III.1. Determinant

Her $A = \left[a_{ij}\right]_{(n\times n)}$ kare matrisi için A'nın determinantı adı verilen özel bir sabit tanımlanır. Bu sabit, $det(A)$ veya $|A|$ ile gösterilir. Sadece karesel matrisler için tanımlı olup özellikle matrislerin tersini faydalı olur.

III.1.1 Bir ve İki Mertebeden Matrislerin Determinantı

Mertebesi bir ve iki olan matrislerin determinantı sırası ile $|a_{11}| = a_{11}$ ve $^{+}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ hesaplanır. Bir sabitin determinantı kendisidir. Mertebesi iki olan kare matrisin dterminantı ise (+) ile gösterilen ok boyunca yer alan iki elemanın çarpımı eksi (-) ile gösterilen ok boyunca yer alan iki elemanın çarpımıdır.

Örnek-III.1: a) $A = [24]$, $B = [-6]$ ve $C = [(t+1)]$ sabitlerinin; b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm-III.1: a) $|A| = |24| = 24$, $|B| = |-6| = -6$ ve $|C| = (t+1)$ olur. b) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$ ve $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16$ bulunur.

III.1.2 Üçüncü Mertebeden Matrislerin Determinantı

$A = \left[a_{ij}\right]_{(3\times3)}$ matrisi düşünülsün. Sadece üçüncü mertebeden karesel matrisler için tanımlı olan Sarrus kuralı olarak bilinen yöntem kullanılarak determinant hesabı şu şekilde verilir.

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \quad -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

(ilk iki sütun kaydırması ile) ve ya

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{matrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{31}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \text{ -}(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{31}a_{11}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad +a_{33}a_{12}a_{21})$$

(ilk iki satır kaydırması ile) ile hesaplanır.

Örnek-III.2: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ => $|A|$'yı hesaplayınız.

Çözüm-III.2: $|A| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 40 - 2 + 0 - (5 + 12 + 0) = 38 - 17 = 21$ bulunur.

Ödev-III.1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ => $|A|$'yı hesaplayınız. (**C:** $|A| = 55$)

III.1.3 Yüksek Mertebeden Matrislerin Determinantı

Bu bölümde mertebesi 3 ve daha yüksek matrislerin determinantını hesaplamak için genel hesaplama yöntemi verilecektir.

III.1.3.1 Minörler ve Kofaktörler

Tanım-III.1: Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{(n \times n)}$ kare matrisi verilsin. A'daki i'inci satır ve j'inci sütunun çıkarılmasıyla elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ mertebeden karesel ve alt matris M_{ij} ile gösterilsin. Bu M_{ij} matrisinin determinantına (yani; $\left|M_{ij}\right|$ değerine) a_{ij} elemanının **minörü** adı verilir. a_{ij} elemanının **kofaktörü** ise A_{ij} ile gösterilir ve $A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ eşitliği ile hesaplanır.

Örnek-III.3: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. a_{13} ve a_{32} elemanlarının minör ve kofaktörlerini hesaplayınız.

Çözüm-III.3: a_{13} elemanının minörü, $|M_{13}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$ ve kofaktörü ise $A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = -3$ bulunur. Benzer şekilde; a_{32} elemanının minörü, $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6$ ve kofaktörü ise $A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -(-6) = 6$ bulunur.

Tanım-III.2: $A = \left[a_{ij}\right]_{(n \times n)}$ kare matrisinin determinantı, herhangi bir satırın veya sütunun elemanlarının, kendilerine ait kofaktörlerle çarpılıp toplanmasına eşittir. Şöyle ki i'inci satır için $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ ve j'inci sütun için ise $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ eşitliği ile hesaplanır.

Örnek-III.4: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını birinci satıra göre hesaplayınız.

Çözüm-III.4: $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2(6-63) + 3(-1)(5-56) + 4(45-48) = 2(-57) - 3(-51) + 4(-3) = -114 + 153 - 12 = 27$ ■

Ödev-III.2: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ => $|A|$'yı ikinci satıra göre hesaplayınız. (**C:** $|A| = 38$)

III.2. Determinantın Özellikleri

A ve B aynı mertebeden bir kare matris olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.

a) $|A| = |A^t|$ ‘dir.

b) Eğer A’nın herhangi bir sıfır satırı veya sütunu varsa $|A| = 0$’dır.

c) Eğer A eşit ya da denk iki satırı veya sütunu varsa $|A| = 0$’dır.

d) Eğer A üçgen matris ise $|A|$ =Köşegen Elemanlarının çarpımıdır. Özel olarak $|I| = 1$’dir.

e) Eğer B, A’nın herhangi iki satırının veya sütunun değiştirilmesi oluşan bir matris ise $|B| = -|A|$’dır.

f) Eğer B, A’nın herhangi bir satırının veya sütunun bir k sabiti ile çarpılmasından oluşan bir matris ise $|B| = k|A|$’dır.

g) Eğer B, A’nın herhangi bir satırının veya sütunun katı diğer bir satıra veya sütuna eklenmesiyle oluşan bir matris ise $|B| = |A|$’dır.

h) Determinantlar çarpılabilir fonksiyondur. A ile B matrisinin çarpımının determinantı, $|AB| = |A||B|$’dir.

III.1.4 Matrisin Mertebesini Düşürerek Determinantı

Algoritma-III.1: Bu algoritma ile n’inci mertebeden bir matrisin determinantının değeri $(n-1)$’inci mertebeden bir matrisin determinantının değerine indirger. Bu algoritma genellikle $n > 3$ için daha uygundur.

$A = [a_{ij}]_{(n\times n)}$, $n > 1$ ve sıfırdan farklı bir matris olsun.

1. **Adım:** $a_{ij} = 1$ veya mümkün değilse $a_{ij} \neq 0$ şeklinde herhangi bir merkez eleman seçilir.
2. **Adım:** Birinci adımda seçilen a_{ij} temel alınarak a_{ij} elemanını içinde bulunduran satır veya sütun üzerindeki diğer bütün elemanları sıfır yapan temel satır veya sütun işlemleri uygulanır.
3. **Adım:** a_{ij} elemanını içeren satır veya sütuna göre determinant açılır. Böylece $|A_{(n\times n)}| = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{(n-1)\times(n-1)}|$ yazılır.

Örnek-III.5: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını matrisin mertebesini 2’ye düşürerek hesaplayınız.

Çözüm-III.5: Öncelikle $a_{33} = 1$ olduğundan merkez olarak seçilebilir. Buradan üçüncü satır veya üçüncü sütuna ait diğer elemanları bu merkeze göre sıfırlamaya çalışabiliriz. Tercihimiz üçüncü sütun olsun. Bu sütunun birinci satır elemanı 4, ikinci satır elemanı da 7 olup bu değerler merkeze göre sıfırlanmalıdır. Bu işlem şöyle yapılır.

$\begin{array}{r} -1/ \\ -1/ \\ 7/\quad 4/ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 30 & 33 & 0 \\ 51 & 57 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ olur ki A matrisinin determinantı ikinci mertebeden bir matrisin determinantına indirgenmiş olur. Böylece $|A| = (-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 30 & 33 \\ 51 & 57 \end{vmatrix} = 1710 - 1683 = 27$ bulunur. ■

Bu algoritma merkez eleman için illaki 1 değeri olmasını gerektirmez. Örneğin, birinci satır birinci sütun değeri, $a_{11} = 2$ merkez olarak seçilebilir. Yine birinci sütuna göre tercih yapalım. Bu durumda ikinci satır 5 ve üçüncü satırda 8 değerlerini $a_{11} = 2$ merkeze göre sıfırlamaya çalışalım. Önce birinci satır 2'ye bölünerek a_{11} elemanı bir yapılır.

$\begin{array}{r} 1/2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} 8/\quad 5/ \\ -1/ \\ -1/ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix}$ olur. Buradan A matrisinin determinantı, $|A| = (-1)^{1+1}(2)\begin{vmatrix} 3/2 & 3 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 2\,(45 - 18)/2 = 27$ bulunur.

Örnek-III.6: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını matrisin mertebesini 3'e düşürerek hesaplayınız.

Çözüm-III.6: Öncelikle $a_{23} = 1$ olduğundan merkez olarak seçilebilir. Buradan ikinci satır veya üçüncü sütuna ait diğer elemanları bu merkeze göre sıfırlamaya çalışabiliriz. Tercihimiz üçüncü sütun olsun. Bu sütunun birinci satır elemanı 2, üçüncü satır elemanı -3 ve dördüncü satır elemanı da -1 olup bu değerler merkeze göre sıfırlanmalıdır.

$\begin{array}{r} 1/ \\ 1/\quad 3/\quad -2/ \\ 1/ \\ 1/ \end{array}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ elde edilir. Böylece A'nı determinantı, $|A| = (-1)^{2+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -[4 - 18 + 5 - (30 + 3 - 4)] = -(-9 - 29) = 38$ bulunur. ■

III.1.5 Determinantlarla İlgili Uygulama

U.III.1: $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ise $|A| = |A^t|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm-U.III.1: $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$ ve $|A^t| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$ olup eşittir.

U.III.2: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ ise $|A|$ ve $|B|$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.2: A matrisinin ikinci satırı sıfır olduğundan $|A| = 0$ ve B matrisinin üçüncü sütunu sıfır olduğundan $|B| = 0$'dır.

U.III.3: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ ise $|A|$ ve $|B|$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.3: A matrisinin birinci ve ikinci satırı birbirine eşit olduğundan $|A| = 0$ ve B matrisinin birinci ve ikinci sütunu eşit olduğundan $|B| = 0$'dır.

U.III.4: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ ise $|A|$ ve $|B|$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.4: A matrisi üst üçgen bir matris olduğundan $|A| = 2(6)1 = 12$ ve B matrisi de alt üçgen bir matris olduğundan $|B| = 2(6)1 = 12$ bulunur.

U.III.5: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ve ayrıca $|A| = 9$ ise $|B|$ ve $|C|$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.5: B matrisi A'nın birinci ve ikinci satırlarının yer değiştirmesinden oluşan bir matris olduğundan $|B| = -|A| = -9$ ve C matrisi de A'nın ikinci ve üçüncü sütunlarının yer değiştirmesinden oluşan bir matris olduğundan $|C| = -|A| = -9$ yazılabilir.

U.III.6: $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -4 & -3 & 1 \\ 10 & 10 & 15 \end{bmatrix}$ ve ayrıca $|A| = -95$ ise $|B|$ değerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.6: B matrisi A'nın birinci sütununun 2 ile çarpımından oluşan bir matris olduğundan $|B| = 2|A| = -190$ yazılabilir.

U.III.7: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 8 & -5 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ve ayrıca $|A| = -102$ ise $|B|$ değerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.7: B matrisinin ikinci sütunu, A'nın birinci ve ikinci sütununun toplamından oluşan bir matris olduğundan $|B| = |A| = -102$ yazılabilir.

U.III.8: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, ayrıca $|A| = -2$ ve $|B| = 22$ ise $|AB|$ değerini hesaplayınız.

Çözüm-U.III.8: $|AB| = |A||B| = -2(22) = -44$ yazılabilir.

III.2. Bir Matrisin Tersi

İstatistik analizlerde matris tersi oldukça önemli bir yer tutar. Burada matris tersi bulmada kullanılan yöntemler verilecektir. Bu yöntemler takipteki bölümlerde örnekleriyle gösterilecektir.

III.2.1 Denklem Sistemlerinin Çözümü ile Bir Matrisin Tersi

Tanım-III.3: $A = [a_{ij}]_{(n\times n)}$ bir kare matris ve $B = [b_{ij}]_{(n\times n)}$'de aynı mertebeden A'nın tersi olsun $AB = BA = I$ olacak şekilde B matrisi bulunabilirse B matrisine A'nın tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Örnek-III.7: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} => A^{-1}$ matrisini bulunuz.

Çözüm-III.7: $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} => \left.\begin{matrix} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ 2b_{11} + 5b_{21} = 0 \end{matrix}\right\}$ (1) ve $\left.\begin{matrix} 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ 2b_{12} + 5b_{22} = 1 \end{matrix}\right\}$ (2) sistemlerinin çözümü (eğer varsa) A'nın tersi (yani, B matrisi) olur.

Sistem (1)'den $\left.\begin{matrix} 2/ & 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ -3/ & 2b_{11} + 5b_{21} = 0 \end{matrix}\right\} \sim \left.\begin{matrix} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ -7b_{21} = 2 \end{matrix}\right\} =>$ ikinci eşitlikten $-7b_{21} = 2$ $=> b_{21} = -\frac{2}{7}$ ve birinci eşitlikten de $3b_{11} + 4(-\frac{2}{7}) = 1 => 3b_{11} = \frac{15}{7} => b_{11} = \frac{5}{7}$ bulunur.

Sistem (2)'den $\left.\begin{matrix} 2/ & 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ -3/ & 2b_{12} + 5b_{22} = 1 \end{matrix}\right\} \sim \left.\begin{matrix} 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ -7b_{22} = -3 \end{matrix}\right\} =>$ ikinci eşitlikten $-7b_{21} = -3 \quad => b_{22} = \frac{3}{7}$ ve birinci eşitlikten de $3b_{12} + 4(\frac{3}{7}) = 0 => 3b_{11} = -\frac{12}{7} => b_{12} = -\frac{4}{7}$ bulunur. Sonuç olarak; $B = A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ elde edilir.■

Örnek-III.8: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} => A^{-1}$ matrisini bulunuz.

Çözüm-III.8: $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =>$ eşitliğinde üç denklem sistemi elde edilir. Bunlar;

$$\left.\begin{matrix} 3b_{11} + 3b_{21} + b_{31} = 1 \\ 2b_{11} + 5b_{21} + 4b_{31} = 0 \\ b_{11} + 4b_{21} + 6b_{31} = 0 \end{matrix}\right\} (1) \left.\begin{matrix} 3b_{12} + 3b_{22} + b_{32} = 0 \\ 2b_{12} + 5b_{22} + 4b_{32} = 1 \\ b_{12} + 4b_{22} + 6b_{32} = 0 \end{matrix}\right\} (2) \text{ ve } \left.\begin{matrix} 3b_{13} + 3b_{23} + b_{33} = 0 \\ 2b_{13} + 5b_{23} + 4b_{33} = 0 \\ b_{13} + 4b_{23} + 6b_{33} = 1 \end{matrix}\right\} (3)$$

üç bilinmeyenli üç adet denklem sisteminin çözümü gereklidir. Böylece sistem (1)'den

$$\left.\begin{matrix} 1/ \quad 2/ & 3b_{11} + 2b_{21} + b_{31} = 1 \\ -3/ & 2b_{11} + 5b_{21} + 4b_{31} = 0 \\ -3/ & b_{11} + 4b_{21} + 6b_{31} = 0 \end{matrix}\right\} \sim \left.\begin{matrix} 3b_{11} + 2b_{21} + b_{31} = 1 \\ 10/ \quad -11b_{21} - 10b_{31} = 2 \\ -11/ \quad -10b_{21} - 17b_{31} = 1 \end{matrix}\right\} \sim \begin{matrix} 3b_{11} + 2b_{21} + b_{31} = 1 \\ -11b_{21} - 10b_{31} = 2 \\ 87b_{31} = 9 \end{matrix} =>$$

üçüncü eşitlikten $87b_{31} = 9 \quad => b_{21} = \frac{3}{29}$, ikinci eşitlikten $-11b_{21} - 10(\frac{3}{29}) = 2 =>$

$-11b_{21} = \frac{88}{29} => b_{21} = -\frac{8}{29}$ ve birinci eşitlikten $3b_{11} + 2\left(-\frac{8}{29}\right) + \frac{3}{29} = 1 \quad => 3b_{11} = \frac{42}{29}$ $=> b_{11} = \frac{14}{29}$ bulunur. Öncelikle A simetrik olduğundan $b_{21} = b_{12} = -\frac{8}{29}$ yazılabilir. Bu sonuç sistem (2)'nin herhangi iki denkleminde değerlendirilirse (örneğin birinci ve ikinci denklem)

$$\left.\begin{array}{ll} -4/ & 2b_{22} + b_{32} = 24/29 \\ 1/ & 5b_{22} + 4b_{32} = 45/29 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} 2b_{22} + b_{32} = 24/29 \\ -3b_{22} = -51/29 \end{array}\right\} -3b_{22} = -51/29 => b_{22} = 17/29$$ ve

$2(17/29) + b_{32} = 24/29 \quad => \quad b_{32} = -10/29$ olur. Böylece $b_{32} = b_{23} = -10/29$ bu sonuçlar sistem (3)'de herhangi iki denklemde yerine yazılırsa denklem 1 ve 3'den

$$\left.\begin{array}{ll} 4/ & 3b_{13} + b_{33} = 20/29 \\ -1/ & 2b_{13} + 4b_{33} = 50/29 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} 3b_{13} + b_{33} = 20/29 \\ 10b_{13} = 30/29 \end{array}\right\} => 10b_{13} = 30/29 => b_{13} = 3/29$$ ve

$3(3/29) + b_{33} = 20/29 \quad => \quad b_{33} = 11/29$ bulunur. Sonuç olarak A'nın tersi, $B = A^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 14 & -8 & 3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 3 & -10 & 11 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Örnek-III.9: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} => A^{-1}$ değerini hesaplayınız.

Çözüm-III.9: $AB = I \;=>\; AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =>$

$$\left.\begin{array}{r} 2b_{11} + 4b_{21} + 5b_{31} = 1 \\ b_{11} + 2b_{21} + 3b_{31} = 0 \\ 3b_{11} + 5b_{21} + 7b_{31} = 1 \end{array}\right\} (1) \quad \left.\begin{array}{r} 2b_{12} + 4b_{22} + 5b_{32} = 0 \\ b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = 1 \\ 3b_{12} + 5b_{22} + 7b_{32} = 0 \end{array}\right\} (2) \text{ ve } \left.\begin{array}{r} 2b_{13} + 4b_{23} + 5b_{33} = 0 \\ b_{13} + 2b_{23} + 3b_{33} = 0 \\ 3b_{13} + 5b_{23} + 7b_{33} = 1 \end{array}\right\} (3) \text{ üç}$$

bilinmeyenli üç adet denklem sistemi elde edilir. Önce sistem (1)' çözelim.

$$\begin{array}{lcl} 3/1/2b_{11} + 4b_{21} + 5b_{31} = 1 & & 2b_{11} + 4b_{21} + 5b_{31} = 1 \\ -2/b_{11} + 2b_{21} + 3b_{31} = 0 & \sim & -b_{31} = 1 \\ -2/3b_{11} + 5b_{21} + 7b_{31} = 1 & & 2b_{21} + b_{31} = 3 \end{array} \quad => b_{31} = -1;\; 2b_{21} + b_{31} = 3 \;=$$

$> 2b_{21} - 1 = 3 \;=> 2b_{21} = 4 \;=> b_{21} = 2$ ve $2b_{11} + 4b_{21} + 5b_{31} = 1 => \; 2b_{11} + 4(2)$ $+5(-1) = 1 => 2b_{11} = -2 => b_{11} = -1$ bulunur. Benzer şekilde sistem (2)'den

$$\begin{array}{lcl} 3/1/2b_{12} + 4b_{22} + 5b_{32} = 0 & & 2b_{12} + 4b_{22} + 5b_{32} = 0 \\ -2/b_{12} + 2b_{22} + 3b_{32} = 1 & \sim & -b_{32} = -2 \\ -2/3b_{12} + 5b_{22} + 7b_{32} = 0 & & 2b_{22} + b_{32} = 0 \end{array} \quad => b_{32} = 2;\; 2b_{22} + b_{32} = 0 \;=>$$

$2b_{21} + 2 = 0 \;=> 2b_{22} = -2 \;=> b_{22} = -1$ ve $2b_{12} + 4b_{22} + 5b_{32} = 0 => \; 2b_{11} + 4(-1)$ $+5(2) = 0 => 2b_{12} = -6 => b_{12} = -3$ bulunur. Sistem (3)'den ise

$$\begin{array}{l} 3/1/2b_{13}+4b_{23}+5b_{33}=0 \\ -2/b_{13}+2b_{23}+3b_{33}=0 \\ -2/3b_{13}+5b_{23}+7b_{33}=1 \end{array} \sim \begin{array}{r} 2b_{13}+4b_{23}+5b_{33}=0 \\ -b_{33}=0 \\ 2b_{22}+b_{32}=-2 \end{array} \quad => b_{33}=0;\ 2b_{23}+b_{33}=-2 =$$

$> 2b_{23}=-2 \ => b_{23}=-1$ ve $2b_{13}+4b_{23}+5b_{33}=0 => \ 2b_{13}+4(-1) \ \ +5(0)=0=$

$> 2b_{13}=4 => b_{13}=2$ bulunur. Sonuç olarak; $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

Ödev-III.3: a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ve b) **:** $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ => ters matrisini hesaplayınız.

(**C:** a) $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve b) $A^{-1}=\frac{1}{283}\begin{bmatrix} 135 & -62 & 44 & -59 \\ -62 & 127 & -81 & 25 \\ 44 & -81 & 94 & -36 \\ -59 & 25 & -36 & 74 \end{bmatrix}$)

III.2.2 Blok Matris Yaklaşımı ile Bir Matrisin Tersi

Bu yöntemle bir matrisin tersi için algoritma şu şekilde verilir.

1. **Adım:** $(n \times n)$ boyutlu bir A kare matris için $(n \times 2n)$ boyutlu bir M matrisi, $M=[A \vdots I]$ biçiminde bir blok matrisi oluşturulur. Yani; M'nin sol yarısında A ve sağ yarısında da A'nın birim matrisi, I bulunur.
2. **Adım:** M satırca eş olan (denk matrise) indirgenir. Eğer bu işlemin sonucu, M'nin A kısmında bir sıfır satır oluşursa işleme son verilir. Zira A matrisinin tersi yoktur. Diğer durumlarda ise A matrisi kısmı üst üçgen matrise dönüşür.
3. **Adım:** M, $[I \vdots B]$ satırca kanonik forma indirgenir. Burada M'nin sol yarısına A matrisi yerine birim matris gelir.
4. **Adım:** $A^{-1}=B$ olarak bulunur.

Not-III.1: Eğer birinci satırın ilk elemanı sıfır ise ilk elemanı sıfır olmayan satırla yer değiştirerek işleme başlamak mümkündür. Zira herhangi bir satırın yerinin değişmesi o matrisin tersinin sonucunu değiştirmez.

Örnek-III.10: Örnek-III.7'de verilen matrisin tersini bu yöntemle hesaplatınız.

Çözüm-III.10: $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre blok matris, $M=\begin{bmatrix} 3 & 4 & \vdots & 1 & 0 \\ 2 & 5 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ yazılır. Bu matris satırca eş olan matrise indirgenir.

$\begin{array}{r} -2/ \\ 3/ \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 4 & \vdots & 1 & 0 \\ 2 & 5 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 7 & \vdots & -2 & 3 \end{bmatrix}$ böylece indirgeme işlemi tamamlanır. Bu matrisin sol yarısı üçgen matris oluşturduğundan matrisin tersi bulunabilir. Şimdi kanonik form işlemi yapılabilir.

$$\begin{array}{r}\\1/7\end{array}\begin{bmatrix}3&4&\vdots&1&0\\0&7&\vdots&-2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&4&\vdots&1&0\\0&1&\vdots&-2/7&3/7\end{bmatrix}\sim\begin{array}{r}1/\\-4/\end{array}\begin{bmatrix}3&4&\vdots&1&0\\0&1&\vdots&-2/7&3/7\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{array}{r}1/3\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}3&0&\vdots&15/7&-12/7\\0&1&\vdots&-2/7&3/7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\vdots&5/7&-4/7\\0&1&\vdots&-2/7&3/7\end{bmatrix}$$ olup işlem tamamlanır. Böylece A matrisinin tersi, $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5&-4\\-2&3\end{bmatrix}$ bulunur.

Örnek-III.11: Örnek-III.8'de verilen matrisin tersini bu yöntemle hesaplatınız.

Çözüm-III.11: $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&5&4\\1&4&6\end{bmatrix}$ olduğuna göre blok matris, $M=\begin{bmatrix}3&2&1&\vdots&1&0&0\\2&5&4&\vdots&0&1&0\\1&4&6&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}$ yazılır. Bu matris satırca eş olan matrise indirgenir.

$$\begin{array}{r}1/\quad 2/\\-3/\\-3/\end{array}\begin{bmatrix}3&2&1&\vdots&1&0&0\\2&5&4&\vdots&0&1&0\\1&4&6&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{array}{r}\\10/\\-11/\end{array}\begin{bmatrix}3&2&1&\vdots&1&0&0\\0&-11&-10&\vdots&2&-3&0\\0&-10&-17&\vdots&1&0&-3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}3&2&1&\vdots&1&0&0\\0&-11&-10&\vdots&2&-3&0\\0&0&87&\vdots&9&-30&33\end{bmatrix}$$ böylece indirgeme işlemi tamamlanır. Bu matrisin sol yarısı üçgen matris oluşturduğundan matrisin tersi bulunabilir. Şimdi kanonik form işlemi yapılabilir.

$$\begin{array}{r}\\ \\1/87\end{array}\begin{bmatrix}3&2&1&\vdots&1&0&0\\0&-11&-10&\vdots&2&-3&0\\0&0&87&\vdots&9&-30&33\end{bmatrix}\sim\begin{array}{r}1/\\-1/\\-1/\quad -10/\end{array}\begin{bmatrix}3&2&1&\vdots&1&0&0\\0&-11&-10&\vdots&2&-3&0\\0&0&1&\vdots&3/29&-10/29&11/29\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r}\\(1/11)\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}3&2&0&\vdots&26/29&10/29&-11/29\\0&11&0&\vdots&-88/29&187/29&-110/29\\0&0&1&\vdots&3/29&-10/29&11/29\end{bmatrix}\sim\begin{array}{r}1/\\-2/\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}3&2&0&\vdots&26/29&10/29&-11/29\\0&1&0&\vdots&-8/29&17/29&-10/29\\0&0&1&\vdots&3/29&-10/29&-11/29\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{array}{r}(1/3)\\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}3&0&0&\vdots&42/29&-24/29&9/29\\0&1&0&\vdots&-8/29&17/29&-10/29\\0&0&1&\vdots&3/29&-10/29&-11/29\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&14/29&-8/29&3/29\\0&1&0&\vdots&-8/29&17/29&-10/29\\0&0&1&\vdots&3/29&-10/29&-11/29\end{bmatrix}$$

olup işlem tamamlanır. Böylece A matrisinin tersi, $A^{-1}=\frac{1}{29}\begin{bmatrix}14&-8&3\\-8&17&-10\\3&-10&-11\end{bmatrix}$ bulunur.

Örnek-III.12: $A=\begin{bmatrix}2&4&5\\1&2&3\\3&5&7\end{bmatrix} => A^{-1}$ değerini hesaplayınız.

Çözüm-III.12: $A=\begin{bmatrix}2&4&5\\1&2&3\\3&5&7\end{bmatrix}$ olduğuna göre blok matris, $M=\begin{bmatrix}2&4&5&\vdots&1&0&0\\1&2&3&\vdots&0&1&0\\3&5&7&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}$ yazılır.

Bu matris satırca eş olan matrise indirgenir.

3/ $$\begin{array}{r} 1/ \\ -2/ \\ -2/ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&5&1&0&0\\ 1&2&3&0&1&0\\ 3&5&7&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&5&1&0&0\\ 0&0&-1&1&-2&0\\ 0&2&1&3&0&-2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&5&1&0&0\\ 0&2&1&3&0&-2\\ 0&0&-1&1&-2&0\end{array}\right]$$

böylece indirgeme işlemi tamamlanır. Bu matrisin sol yarısı üçgen matris yapmak için ikinci satır ile üçüncü satırın yerleri değiştirilmesi gerekir. Böylece indirgeme işlemi sonunda bir üçgen matris oluştuğundan matrisin tersi bulunabilir. Şimdi kanonik form işlemi yapılabilir.

$$\begin{array}{r} \\ \\ (-1) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&5&1&0&0\\ 0&2&1&3&0&-2\\ 0&0&-1&1&-2&0\end{array}\right] \sim \begin{array}{r} 1/ \\ 1/ \\ -5/\quad -1/ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&5&1&0&0\\ 0&2&1&3&0&-2\\ 0&0&1&-1&2&0\end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ (1/2) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&0&6&-10&0\\ 0&2&0&4&-2&-2\\ 0&0&1&-1&2&0\end{array}\right] \sim \begin{array}{r} 1/ \\ -4/ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&4&0&6&-10&0\\ 0&1&0&2&-1&-1\\ 0&0&1&-1&2&0\end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} (1/2) \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&-2&-6&4\\ 0&1&0&2&-1&-1\\ 0&0&1&-1&2&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-1&-3&2\\ 0&1&0&2&-1&-1\\ 0&0&1&-1&2&0\end{array}\right]$$ işlem tamamlanır.

Sonuç olarak; $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1&-3&2\\ 2&-1&-1\\ -1&2&0\end{bmatrix}$ bulunur.

III.2.3 Determinantlarla Bir Matrisin Tersi

III.2.3.1 Klasik Ek Matris

Tanım-III.4: $A = [a_{ij}]_{(n\times n)}$ bir kare matris olmak üzere A'nın klasik eki $adjA$ veya $\tilde{A}$ ile gösterilir ve A'nın kofaktörlerinden oluşan matrisin transpozudur şeklinde tanımlanır. Yani;

$adjA = \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$ ile verilir.

Örnek-III.13: $A = \begin{bmatrix} 2&3&-4\\ 0&-4&2\\ 1&-1&5\end{bmatrix}$ => matrisinin klasik ek matrisini bulunuz.

Çözüm-III.13: Üçüncü mertebeden olduğu için 9 adet kofaktör bulunur. Önce kofaktörleri bulalım.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4&2\\ -1&5\end{vmatrix} = -18$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0&2\\ 1&5\end{vmatrix} = 2$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0&-4\\ 1&-1\end{vmatrix} = 4$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3&-4\\ -1&5\end{vmatrix} = -11$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2&-4\\ 1&5\end{vmatrix} = 14$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2&3\\ 1&-1\end{vmatrix} = 5$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3&-4\\ -4&2\end{vmatrix} = -10$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2&-4\\ 0&2\end{vmatrix} = -4$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2&3\\ 0&-4\end{vmatrix} = -8$

Buradan $adjA = \tilde{A} = \begin{bmatrix} -18&-11&-10\\ 2&14&-4\\ 4&5&-8\end{bmatrix}$ olarak bulunmuş olur.

Teorem-III.5: $A = [a_{ij}]_{(n\times n)}$ bir kare matris olmak üzere $A(adjA) = (AdjA)A = |A|I$'dir. Buradan eğer $|A| \neq 0$ ise $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA$ yazılır.

Örnek-III.14: Örnek-III.13'de verilen matrisin tersini bulunuz.

Çözüm-III.14: Çözüm-III.13'de A'nın klasik ek matrisi, $adjA = \tilde{A} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ bulunmuştu. Sarrus kuralına göre A'nın determinantı, $|A| = -46$ bulunur. Böylece $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = -\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ bulunmuş olur.

Örnek-III.15: Örnek-III.7 ve Örnek-III.10'da başka yöntemlerle tersi bulunmuş olan A matrisinin tersini determinantlarla hesaplayınız.

Çözüm-III.15: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi ikinci mertebeden olduğu için 4 adet kofaktör bulunur. Önce kofaktörleri bulalım. $A_{11} = (-1)^{1+1}5 = 5,\ A_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2,\ A_{21} = (-1)^{2+1}4 = -4,\ A_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3$ bulunur. A'nın determinantı, $|A| = 7$ bulunur. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Örnek-III.16: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ => matrisinin tersini determinantlarla bulunuz.

Çözüm-III.16: Üçüncü mertebeden olduğu için 9 adet kofaktör bulunur. Önce kofaktörleri bulalım.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -5, A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2, A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1, A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 4, A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

Buradan $adjA = \tilde{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunmuş olur. Sarrus kuralına göre A'nın determinantı, $|A| = -2$ bulunur. Böylece $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ bulunmuş olur.

Ödev--III.4: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ => matrisinin tersini determinantlarla bulunuz.

(**C:** $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adjA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$)

III.2.4 Cayley-Hamilton Teoremi ile Bir Matrisin Tersi

Algoritma:

1. **Adım:** Öz-polinomu bulunuz ($\Delta(t)$)

2. **Adım:** Öz-polinomda değişken yerine matrisi yazınız ve sıfıra eşitleyerek öz-denklemi elde ediniz.
3. **Adım:** 2. Adımda elde ettiğiniz denklemi matrisin tersi ile çarpıp düzenleyiniz. Sonuç matrisin tersi olur.

Örnek-III.17: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ => matrisinin tersini CH Teoremi ile bulunuz.

Çözüm-III.17: Matrisin öz-polinomu, $\Delta(t) = t^2 - 6t + 1$ bulunur. t yerine A matrisi yazalım ve sıfıra eşitleyelim. $A^2 - 6A + I = 0 => A^2 - 6A = -I => A^{-1}(A^2 - 6A) = -IA^{-1} => A^{-1} = 6I - A = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ bulunur.

Örnek-III.18: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ => matrisinin tersini CH Teoremi ile bulunuz.

Çözüm-III.18: Matrisin öz-polinomu, $\Delta(t) = t^3 - iz(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A| = t^3 - t^2 + (7 - 17 + 5)t - 3$ bulunur. t yerine A matrisi yazalım ve sıfıra eşitleyelim. $A^3 - -A^2 - 5A - 3I = 0 => A^3 - A^2 - 5A = 3(I) => A^{-1}(A^3 - A^2 - 5A) = 3(I)A^{-1} =>$ $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - A - 5I)$ olur. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -10 & 8 \\ 24 & -19 & 16 \\ 20 & -18 & 17 \end{bmatrix}$ olup eşitlikte değerlendirilirse $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - A - 5I) = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} 13 & -10 & 8 \\ 24 & -19 & 16 \\ 20 & -18 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} => A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 20 & -17 & 8 \\ 14 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ bulunur.