II. BÖLÜM: TAHMİN METOTLARI VE NOKTA TAHMİN EDİCİLERİN ÖZELLİKLERİ

II.1 Giriş

Birinci bölümde parametreler için bazı tahmin edicilerden söz edilmiştir. Uygulamalarda ilgilenilen bir çok problem bu türdendir. Yine $\hat{\theta}$ bilinmeyen kitle parametresi θ'nın bir tahmin edicisi olsun. Bu tahmin edici hem kendisi bir tesadüfi değişken ve hem de gözlem değerlerinin bir fonksiyonudur. Hal böyle olunca tahmin edicinin bir olasılık dağılımı vardır ve bu dağılım tahmin edicinin **örnekleme dağılımı** olarak isimlendirilir. Yibe bir önceki bölümde eğer bir tahmin edicinin $E(\hat{\theta}) = \theta$ özelliğini sağlarsa yansız (ya da sapmasız) olduğundan söz edilmişti. Yansızlık şüphesiz iyi bir tahmin edicide aranan özelliklerden biridir.

Bu bölümde ise nokta tahmin edicilerin matematiksel özelliklerinden bazıları daha genel ve detaylarıyla verilecektir. Genellikle **etkinlik, kararlılık (tutarlılık)** ve **yeterlilik** kavramları üzerinde durulacaktır. **En küçük yeterli istatistikler türetilecek** ve parametrelerin en küçük varyanslı-yansız tahmin edicilerini oluşturmak için kullanılacaktır. Yine bu bölümde tahmin edicilerin türetilmesi için iki önemli metot; **momentle** ve **ençok olabilirlik** metotları verilecektir. Bu metotlarla türetilen tahmin edicilerin bazı özellikleri de şüphesiz tartışılacak konulardan bir kaçıdır.

II.2 Nispi Etkinlik

Daha önceden de söz edildği gibi bilinmeyen bir kitle parametresi θ için çoğu kez birden fazla yansız tahmin edici tanımlanabilir. Örneğin; $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$, θ'nın iki yansız tahmin edicisi ise bu tahmin edicilerden daha küçük varyansa sahip olanı diğerine yeğlenir. Yani her iki tahmin edici de yansız ve $V(\hat{\theta}_2) > V(\hat{\theta}_1)$ ise $\hat{\theta}_1$'in $\hat{\theta}_2$'den nispi olarak daha etkin olduğu söylenir. Bu durumda iki yansız tahmin edicinin nispi etkinliğini tahmımlamak için $Etk(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_2)/V(\hat{\theta}_1)$ oranı kullanılır. Eğer $Etk(\hat{\theta}_1) > 1$ ise $\hat{\theta}_1$'nın $Etk(\hat{\theta}_1) < 1$ ise $\hat{\theta}_2$'nın daha etkin olduğu söylenir. $Etk(\hat{\theta}_1) = 1$ olduğunda ise varyanslar eşit olduğundan birinin diğerine etkinliği söz konusu deildir.

Tanım-II.1: Bir θ parametresi için verilen iki yansız tahmin edici $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ olsun. $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ tahmin edicilerinin varyansları da sırasıyla $V(\hat{\theta}_1)$ ve $V(\hat{\theta}_2)$ ile verilsin. $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliği, $Etk(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_2)/V(\hat{\theta}_1)$ oranı ile tanımlanır. Benzer şekilde $\hat{\theta}_2$'nın $\hat{\theta}_1$'ya nispi etkinliği, $Etk(\hat{\theta}_2) = V(\hat{\theta}_1)/V(\hat{\theta}_2)$ oranı ile verilir.

$\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$, θ'nın iki yansız tahmin edicisi ise $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliği $V(\hat{\theta}_2) > V(\hat{\theta}_1)$ olması durumunda mümkündür. Eğer bu sağlanırsa $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'dan daha iyi bir yansız tahmin edici olduğu söylenir. Örneğin; $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliği, 1.8 ise $\hat{\theta}_2$ ile birleştirilen değişimin miktarı $\hat{\theta}_1$ ile birleştirilen değişim miktarının 1.8 katıdır.

Şimdi de başka bir teorik örnek verelim. Bilindiği gibi bir kitle ortalaması için bir çok yansız tahmin edici tanımlanabilir. Bir normal kitle için ortalama tahmin edilmek istensin. $\hat{\theta}_1$ örneklem ortancasını ($\tilde{Y}$) ve ; $\hat{\theta}_2$ da aynı örneklemin örneklem ortalamasını ($\bar{Y}$) göstersin. Büyük hacimli bir normal kitlenin örneklem ortancasının varyansı, $V(\hat{\theta}_1) = (1.2533)^2(\sigma^2/n)$'dir Örneklem ortalamasının varyansı ise $V(\hat{\theta}_2) = \sigma^2/n$ olduğuna göre $\hat{\theta}_1$(örneklem ortancası, $\tilde{Y}$) tahmin edicisinin $\hat{\theta}_2$ (örneklem ortalaması, $\bar{Y}$) tahmin edicisine nispi etkinliği, , $Etk(\hat{\theta}_1) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)} = \frac{\sigma^2/n}{(1.2533)^2\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)} = \frac{1}{(1.2533)^2} \cong \%64$ bulunur. Örneklem ortalaması ile birleştirilen değişimin miktarı, örneklem ortancası ile birleştirilen değişimin yaklaşık olarak %64'dür. Bu nedenle kitle ortalaması için örneklem ortalaması daha etkin olduğundan örneklem ortancasına yeğlenir.

Örnek-II.1: $(0, \theta)$ aralığında tanımlı sürekli düzgün dağılımın bir tesadüfi örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. θ'nın iki yansız tahmin edicisi ise $\hat{\theta}_1 = 2\bar{Y}$ ve $\hat{\theta}_2 = \frac{(n+1)}{n} Y_{(n)}$, Burada $Y_{(n)}$, en büyük sıra istatistiğidir. $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliğini bulunuz.

Çözüm-II.1: He bir Y_i, $(0, \theta)$ aralığında düzgün dağılımlı olduğundan $\mu = E(Y_i) = \theta/2$ ve $\sigma^2 = V(Y_i) = \theta^2/12$'dir. Bu nedenle $E(\ \hat{\theta}_1) = 2E(\bar{Y}) = 2(\theta/2) = \theta$ olur ki iddia edildiği gibi $\hat{\theta}_1$ yansız bir tahmin edicidir. Ayrıca $V(\ \hat{\theta}_1) = 4V(\bar{Y}) = \frac{4}{n^2}(n\,\theta^2/12) = \frac{\theta^2}{3n}$ bulunur. $\hat{\theta}_2$'nın ortalama ve varyansını bulabilmek için en büyük sıra istatistiği, $Y_{(n)}$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak gereklidir. $g(y)$, $Y_{(n)}$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $g(y) = n[F_Y(y)]^{n-1} f_Y(y) = n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, 0 < y < \theta$ bulunur. Burada $F_Y(y)$, Y'nin dağılım fonksiyonu ve $f_Y(y)$ de olasılık yoğunluk fonksiyonu göstermektedir. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} dt = \frac{y}{\theta}, 0 \leq y \leq \theta$ 'dir. Böylece $E(Y_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \left(\frac{n}{n+1}\right)\theta$ ve böylece $E(\hat{\theta}_2) = E\left[\frac{(n+1)}{n} Y_{(n)}\right] = \frac{(n+1)}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)\theta = \theta$ olup θ'nın yansız bir tahmin edicisidir. Şimdi de $V(\ \hat{\theta}_2)$ değerini bulmak için $E[Y_{(n)}^2]$'yi bulmak gerekir. $E[Y_{(n)}^2] = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+1} dy = \left(\frac{n}{\theta^n}\right)\left(y^{n+2}/(n+2)\right) = (n\theta^2)/(n+2)$ bulunur. $V(\ Y_{(n)}) = E[Y_{(n)}^2] - [E(Y_{(n)})]^2 = \left[\frac{n}{(n+2)} -\right.$

$\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^2\Big]\theta^2$ bulunur. Böylece $V(\ \hat{\theta}_2)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V\big(Y_{(n)}\big)=\left\{\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}-1\right\}\theta^2=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$ bulunur.

Buradan . $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliği ise $Etk\big(\hat{\theta}_1\big)=\frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}=\frac{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}{\frac{\theta^2}{3n}}=\frac{3}{(n+2)}$ bulunur.

Görüldüğü gibi $n>1$ olduğunda etkinlik 1'den küçüktür. Yani $\hat{\theta}_2$'nın varyansı $\hat{\theta}_1$nın varyansından daha küçük olup θ'nın tahmini için $\hat{\theta}_2$ tahmin edicisi tercih edilmelidir.

II.2.1 Uygulama-II/1: Etkinlik

Uygulama-II.1: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y)=\theta^{-1}e^{-y/\theta}, y>0$ olan bir üstel dağılımının 3 birimlik tesadüfî bir örneklemi, Y_1, Y_2 ve Y_3 olsun. $\hat{\theta}_1=Y_1$, $\hat{\theta}_2=(Y_1+Y_2)/2$, $\hat{\theta}_3=(Y_1+2Y_2)/3$ ve $\hat{\theta}_4=\bar{Y}$ tahmin edicilerinin hepsinin θ için yansız tahmin ediciler olduğu bilinmektedir. $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ ve $\hat{\theta}_3$ tahmin edicilerinin ayrı ayrı $\hat{\theta}_4$'ya nispi etkinliğini bulunuz.

Çözüm-II.1: $V(Y_i)=\theta^2$ => $V\big(\hat{\theta}_1\big)=\theta^2$; $V\big(\hat{\theta}_2\big)=\frac{2\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{2}$; $V\big(\hat{\theta}_3\big)=\frac{\theta^2+4\theta^2}{9}=\frac{5\theta^2}{9}$ ve $V\big(\hat{\theta}_4\big)=\frac{3\theta^2}{9}=\frac{\theta^2}{3}$ bulunurlar. $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_4$'ya nispi etkinliği, $Etk\big(\hat{\theta}_1\big)=\frac{V(\hat{\theta}_4)}{V(\hat{\theta}_1)}=\frac{\frac{\theta^2}{3}}{\theta^2}=\frac{1}{3}$, $\hat{\theta}_2$'nın $\hat{\theta}_4$'ya nispi etkinliği, $Etk\big(\hat{\theta}_2\big)=\frac{V(\hat{\theta}_4)}{V(\hat{\theta}_2)}=\frac{\frac{\theta^2}{3}}{\frac{\theta^2}{2}}=\frac{2}{3}$ ve $\hat{\theta}_3$'nın $\hat{\theta}_4$'ya nispi etkinliği, $Etk\big(\hat{\theta}_3\big)=\frac{V(\hat{\theta}_4)}{V(\hat{\theta}_3)}=\frac{\frac{\theta^2}{3}}{\frac{5\theta^2}{9}}=\frac{3}{5}$ bulunur. Sonuç olarak bu örneklem için en iyi tahmin edici, $\hat{\theta}_4$'dır.

Uygulama-II.2: $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ olan bir normal dağılımın n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1,\cdots,Y_{10}$ olsun. μ'nün üç tahmin edicisi; $\hat{\mu}_1=\frac{[Enb(Y_1,\cdots,Y_n)+Enk\ (Y_1,\cdots,Y_n)]}{2}$, $\hat{\mu}_2=\frac{1}{4}Y_1+\frac{(Y_2,\cdots,Y_{n-1})}{2(n-2)}+\frac{1}{4}Y_n$ ve $\hat{\mu}_3=\bar{Y}$ olsun. a) Tahmin edicilerin yansız olduğunu gösteriniz. b) $\hat{\mu}_3$'nın ayrı ayrı $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$'ya nispi etkinliğini bulunuz.

Çözüm-II.2: a) $E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{2}(2\mu)=\mu$ olup yansızdır. $E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4}\mu=\mu$ olup yansızdır. $E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{n}(n\mu)=\mu$ olup yansızdır. b) $V(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{4}2\sigma^2=\sigma^2/2$, $V(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{(n-2)}{4(n-2)^2}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2=\frac{n\sigma^2}{8(n-2)}$ ve $V(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\sigma^2/n$ bulunur. Buradan $\hat{\mu}_3$'nın $\hat{\mu}_1$'ya nispi etkinliği, $Etk(\hat{\mu}_3)=\frac{V(\hat{\mu}_1)}{V(\hat{\mu}_3)}=\frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{n}{2}$ ve $\hat{\mu}_3$'nın $\hat{\mu}_2$'ya nispi etkinliği, $Etk(\hat{\mu}_3)=\frac{V(\hat{\mu}_2)}{V(\hat{\mu}_3)}=\frac{\frac{n\sigma^2}{8(n-2)}}{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{n^2}{8(n-2)}$ bulur. Bu sonuçlara bakılarak ne $\hat{\mu}_1$ ve ne de $\hat{\mu}_2$'nın $\hat{\mu}_3$'ya etkinliği vardır. Yani en iyi ve etkin tahmin edici $\hat{\mu}_3$'dır.

Uygulama-II.3: Ortalaması, λ olan bir Poisson dağılımın n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. λ'nın iki nokta tahmin edicisi, $\hat{\lambda}_1=\frac{(Y_1+Y_n)}{2}$ ve $\hat{\lambda}_2=\bar{Y}$ ve olsun. $\hat{\lambda}_1$'in $\hat{\lambda}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz.

Çözüm-II.3: Önce tahmin edicilerin yansız olup olmadıkları araştırılmalıdır. $E(\hat{\lambda}_1) = \frac{2\lambda}{2} = \lambda$ olup yansızdır. $E(\hat{\lambda}_2) = \frac{n\lambda}{n} = \lambda$ olduğundan yansızdır. $V(\hat{\lambda}_1) = \frac{2\lambda}{4} = \lambda/2$ ve $V(\hat{\lambda}_2) = \frac{n\lambda}{n^2} = \lambda/n$ olup, $Etk(\hat{\lambda}_1) = \frac{V(\hat{\lambda}_2)}{V(\hat{\lambda}_1)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = 2/n$ bulunur. $Etk(\hat{\lambda}_1) < 1$ olduğundan λ'nin tahmini için $\hat{\lambda}_2$ tahmin edicisi tercih edilmelidir.

Uygulama-II.4: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \theta^{-1}e^{-y/\theta}, y > 0$ olan bir üstel dağılımının n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. θ'nın iki yansız tahmin edicisi sırasıyla: $\hat{\theta}_1 = nY_{(1)}$ (burada $Y_{(1)}$ en küçük sıra istatistiğidir) ve $\hat{\theta}_2 = \bar{Y}$ tanımlansın. $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliğini bulunuz.

Çözüm-II.4: İlk önce $Y_{(1)}$ (en küçük sıra istatistiğin) olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. $f_{Y_{(1)}}(y) = n[1 - F_Y(y)]^{n-1}f_Y(y)$ eşitliğinden hareketle; $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(t)dt = e^{-t}|_0^{y/\theta} = 1 - e^{-y/\theta}$, $y \geq 0$ olup$f_{Y_{(1)}}(y) = \frac{n}{\theta}e^{-ny/\theta},\ y > 0$ olarak elde edilir. $E(Y_{(1)}) = \int_0^\infty \frac{ny}{\theta}e^{-\frac{ny}{\theta}}dy = \frac{\theta}{n}$ => $E(\hat{\theta}_1) = nE(Y_{(1)}) = n\left(\frac{\theta}{n}\right) = \theta$ olduğundan yansızdır. $V(\ Y_{(1)}) = E[Y_{(1)}^2] - [E(Y_{(1)})]^2$ eşitliğinden hareketle $E[Y_{(1)}^2] = (\frac{\theta}{n})\int_0^\theta \left(\frac{ny}{\theta}\right)^2 e^{-\frac{ny}{\theta}}dy = 2\left(\frac{\theta}{n}\right)^2$ bulunur. Böylece $V(\ Y_{(1)}) = \frac{2\theta^2}{n^2} - \left(\frac{\theta}{n}\right)^2 = \left(\frac{\theta}{n}\right)^2$ olur. Sonuç olarak, $V(\hat{\theta}_1) = V(n\,Y_{(1)}) = \theta^2$ bulunur. Benzer şekilde $E(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta}{n} = \theta$ olup yansızdır. $V(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta^2}{n^2} = \frac{\theta^2}{n}$ bulunur. $\hat{\theta}_1$'nın $\hat{\theta}_2$'ya nispi etkinliği, $Etk(\hat{\theta}_1) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)} = \frac{\frac{\theta^2}{n}}{\theta^2} = \frac{1}{n}$ bulunur. Sonuç olarak bu örneklem için etkin tahmin edici, $\hat{\theta}_2$'dır.

II.3 Tutarlılık (kararlılık)

n defa atılan hilesiz bir madeni para atma tesadüfi deneyinde tura sonuçlarının olasılığı P olsun. Atışlar bağımsız ise n atış arasından turaların sayısı Y bir binom dağılımına sahiptir. P'nin gerçek değeri bilinmiyorsa örnek oranı, $\frac{Y}{n}$ P'nin bir tahmin edicisidir. Atış sayısı n artarken bu örneklem oranı nasıl değişir? Cevap çok açıktır ve atış sayısı büyüdükçe $\frac{Y}{n}$ oranı P'nin gerçek değerine oldukça yaklaşır. $\frac{Y}{n}$ 'nin bir tesadüfi değişken olması nedeniyle bu P'ye yaklaşma olasılık terimleri içerisinde ifade edilebilir. Özellikle bilinmeyen kitle parametresi ile tahmin edici arasındaki uzaklığın, $\left|\frac{Y}{n} - P\right|$ bazı keyfi pozitif reel sayı ε'dan daha küçük olması olasılığı, $P\left\{\left|\frac{Y}{n} - P\right| \leq \varepsilon\right\}$ ile ifade edilebilir. Eğer bu olasılığın sonucu $n \to \infty$'a giderken "1" e yaklaşırsa $\frac{Y}{n}$'e P için tutarlı bir tahmin edicidir, denir. Diğer bir ifadeyle $\frac{Y}{n}$ olasılıkta P'ye yaklaşır.

Tanım-II.1: ε pozitif bir reel sayı olmak üzere $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon\} = 1$ veya bunun eşiti olarak $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$ ise $\hat{\theta}_n$ tahmin edicisine θ için tutarlı bir tahmin edicidir, denir. Son ifadedeki n indisi $\hat{\theta}$'nın hesaplanmasında kullanılan örneklem hacmini göstermektedir. Örneğin; $\bar{Y}_2$ iki gözleme dayalı ortalama tahmin edicisini, $\bar{Y}_{100}$ örneklem hacmi 100 olan bir örneklemin ortalama tahmin edicisini göstermektedir.

Eğer $\hat{\theta}_n$ yansız bir tahmin edici ise takipteki Teorem-II.1 bu tahmin edicinin tutarlı olduğunu göstermek için genellikle yeterli bir kriterdir.

Teorem-II.1: $\hat{\theta}_n$, θ'nın yansız bir tahmin edicisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$ ise $\hat{\theta}_n$'ya θ için tutarlı tahmin edicidir, denir.

İspat-II.1: Y, $E(Y) = \mu$, $V(Y) = \sigma^2 < \infty$ olan herhangi bir tesadüfi değişken ve k de negatif olmayan bir sabitse Tchebysheff'in teoreminden $P(|Y - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ ile ifade edilebilir. Öyle ise $E(\hat{\theta}_n) = \theta$'dır. Zira $\hat{\theta}_n$, θ'nın yansız bir tahmin edicisidir. Tchebysheff'in teoremi $\hat{\theta}_n$ tesadüfi değişkenine uygulanırsa $P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| > k\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$ ifadesi elde edilir. Herhangi pozitif sayı ε için $k = \varepsilon/\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}$ de bir pozitif sayıdır. k'nın seçimi için Tchebysheff'in teoreminin uygulanmasıyla $P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\left[\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}\right]^{-1}\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}\right) \leq \frac{V(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2}$ veya $P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{V(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2}$ olduğu gösterilir. Eğer $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n) = 0 \;\; => \;\; \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > 0) = 0$ sağlanır ki $\hat{\theta}_n$'nın θ için tutarlı bir tahmin edici olduğu söylenir.

Not.II.1: $\hat{\theta}_n$, θ için tutarlı bir tahmin edici yerine bazen bunun eşiti ifade $\hat{\theta}_n$ olasılıkta θ'ya yaklaşır denilir.

Örnek-II.2: Ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2 < \infty$ olan bir dağılımın n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\bar{Y}_n$ tahmin edicisinin μ için tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II.2: $\bar{Y}_n$ yansız bir tahmin edici olduğuna göre $E(\bar{Y}_n) = \mu$ ve $V(\bar{Y}_n) = \sigma^2/n$ yazılabilir. tutarlı olduğunu gösteriniz. $\bar{Y}_n$, μ için yansız bir tahmin edici olduğundan $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} = \sigma^2/n \to 0$ olur. O halde $\bar{Y}_n$, μ için kararlı bir tahmin edicidir ya da $\bar{Y}_n$, olasılıkta μ'ye yaklaşır.

Not.II.2: $\bar{Y}_n$'nın μ için kararlı bir tahmin edici olması veya olasılıkta μ'ye yaklaşması büyük sayılar kanunu olarak bilinir.

Teorem-II.2: $\hat{\theta}_n$ olasılıkta θ'ya yaklaştığı be $\hat{\beta}_n$ olasılıkta β'ya yaklaştığı kabul edilsin O zaman:

a) $(\hat{\theta}_n + \hat{\beta}_n)$ olasılıkta $(\theta + \beta)$'ya yaklaşır.

b) $(\hat{\theta}_n \hat{\beta}_n)$ olasılıkta $(\theta\beta)$'ya yaklaşır.

c) $\beta \neq 0$ ve $\hat{\beta}_n \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\hat{\beta}_n}\right)$ olasılıkta $\left(\frac{\theta}{\beta}\right)$'ya yaklaşır.

d) Eğer $P(\hat{\theta}_n \geq 0) = 1$ ise $\sqrt{\hat{\theta}_n}$ olasılıkta $\sqrt{\theta}$'ya yaklaşır.

Örnek-II.3: $E(Y_i) = \mu,\ E(Y_i^2) = \mu_2'$ ve $E(Y_i^4) = \mu_4'$ ve hepsi sonlu olan bir tesadüfi örneklem, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ tahmin edcisinin $V(Y_i) = \sigma^2$ için tutarlı bir tahmin edici olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II.3: Öncelikle $S^2 = (n-1)^{-1}[\sum_{i=1}^{2} Y_i^2 - n\bar{Y}^2] = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2} Y_i^2 - \bar{Y}^2\right)$ yazılabilir. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2} Y_i^2$ istatistiği n bağımsız ve aynı dağılımlı bir örneklemin ikinci moment ortalamasıdır. Yani, $E(Y_i^2) = M_2'$ ve $V(Y_i) = M_2' - (M_1')^2$ ile verilebilir. Burada M_1' ve M_2' orijine göre 1'inci ve 2'inci örneklem momentleridir. Büyük sayılar kanunu geregince $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2} Y_i^2$ olasılıkta M_2''ye yaklaşır. Ayrıca $\bar{Y}$ olasılıkta μ'ye yaklaşır. Böylece Teorem-II.2(b)'den $\bar{Y}^2$ olasılıkta μ^2'ye yaklaşır. Teorem-II.2(a)'dan $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2} Y_i^2 - \bar{Y}^2\right)$ olasılıkta $M_2' - (M_1')^2 = M_2' - \mu^2$ olasılıkta σ^2'ye yaklaşır. $\left(\frac{n}{n-1}\right)$, $n \to \infty$ güderken sabitlerin bir dizisi olması sebebi ile S^2 olasılıkta σ^2'ye yaklaşır. Böylece S^2, σ^2 için tutarlı bir tahmin edicidir.

Teorem-II.3: U_n dağılım fonksiyonu, $n \to \infty$ giderken standart normal dağılıma sahip olsun. Eğer V_n olasılıkta 1'e yaklaşırsa o zaman U_n/V_n'in dağılım fonksiyonu bir standart normal dağılım fonksiyonuna yaklaşır.

Örnek-II.4: $E(Y_i) = \mu$ ve $V(Y_i) = \sigma^2$ olan bir dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ ile tanımlansın. $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right)$'nin dağılım fonksiyonunun bir standart normal dağılım fonksiyonuna yaklaştığını gösteriniz.

Çözüm-II.4: S^2'nin olasılıkta σ^2'ye yaklaştığı bir önceki örnekte gösterilmişti. Buradan Teorem-II.2(c) ve (d)'nin uygulanmasıyla S^2/σ^2 (ve S/σ)'in olasılıkta 1'e yaklaştığı gösterilir. Ayrıca Teoren-II.3'den $U_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right)$'nin dağılım fonksiyonu bir standart normal dağılım fonksiyonuna yaklaşır. Bu nedenle $\frac{U_n}{V_n} = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\right)}{S/\sigma} = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right)$ bir standart normal dağılıma yaklaşır.

Örnek-II.4'ün sonucu, örneklem hacmi n büyük olduğunda örneklemin seçildiği dağılımın formu ne olursa olsun $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right)$ yaklaşık olarak bir standart normal dağılıma sahip olur. Eğer örneklem bir normal dağılımdan alınmışsa bu durumda $t = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right)$, $(n-1)$ sd'li bir t dağılımına sahip olur. Bu bilgi ve büyük hacimli örneklem bilgisinin birleştirilmesiyle $t = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right)$'nin dağılım fonksiyonu bir standart normal dağılım fonksiyonuna yaklaşır. Yani, n büyük olduğunda serbestlik derecesi de büyüyecek böylece t dağılım fonksiyonu bir standart normal dağılım fonksiyonuna yaklaşacaktır.

Herhangi bir dağılımdan büyük hacimli bir örneklem elde edilirse $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right)$ yaklaşık olarak bir standart normal dağılıma sahiptir. Bu nedenle $P\left\{-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\right) \leq z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$ olduğu gösterilebilir. Olasılık ifadesindeki işitsizliklerde düzenleme yapılır ve μ yanlız bırakılırsa $P\left\{\bar{Y} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} \approx 1-\alpha$ elde edilir. Bu ise μ için geçerli olan büyük örneklem güven aralığıdır. Benzer şekilde Teorem-II.3, π oranı için güven aralığı oluşturmada da kullanılabilir. Yani yaklaşık olarak $1-\alpha$ güvenle π için geçerli bir büyük örneklem güven aralığı, $P\left\{P - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{PQ}{n}} \leq \pi \leq P + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{PQ}{n}}\right\} \approx 1-\alpha$ ile verilir.

Sonuç olarak; **tutarlılık,** tahmin edici ile tahmin edilmek istenen nicelik arasındaki uzaklığın göstergesidir. Örneklem hacmi büyük olduğunda $\bar{Y}$, μ'ye ve S^2'de σ^2'ye yaklaşacaktır.

II.3.1 Uygulama-II/2: Tutarlılık (Kararlılık)

Uygulama-II/2.1: $(\theta, \theta+1)$ aralığında tanımlı sürekli düzgün dağılımın n birimlik bir tesadüfi örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\theta}_n = \left(\bar{Y}_n - \frac{1}{2}\right)$ ile tanımlanan tahmin edicinin θ için tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/2.1: $(\theta, \theta+1)$ aralığında tanımlı bir sürekli düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = 1, \theta \leq y \leq (\theta+1)$ ile verilir. $E(Y_i) = \int_{\theta}^{(\theta+1)} y dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{\theta}^{(\theta+1)} = \frac{[(\theta+1)^2-\theta^2]}{2} = \frac{(2\theta+1)}{2}$ bulunur. O halde $E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}\frac{n(2\theta+1)}{2} = \frac{(2\theta+1)}{2}$ olur. Böylece $E(\hat{\theta}_n) = E\left(\bar{Y}_n - \frac{1}{2}\right) = E(\bar{Y}) - \frac{1}{2} = \frac{(2\theta+1)}{2} - \frac{1}{2} = \theta$ olup yansız bir tahmin edicidir. $V(Y_i) =$

$E[Y_i^2]-[E(Y_i)]^2$ eşitliğinden hareketle; $E[Y_i^2]=\int_\theta^{(\theta+1)} y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Big|_\theta^{(\theta+1)} = \frac{[(\theta+1)^3-\theta^3]}{3} = \frac{(3\theta^2+3\theta+1)}{3}$ bulunur. Böylece $V(\,Y_i) = \frac{(3\theta^2+3\theta+1)}{3} - \left[\frac{(2\theta+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{12}$ bulunur. $V(\hat{\theta}_n) = V\left(\bar{Y}_n - \frac{1}{2}\right) = V(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2} n \frac{1}{12} = \frac{1}{12n}$ elde edilir. $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} = 1/12n \to 0$ olur. O halde $\hat{\theta}_n$, θ için tutarlı bir tahmin edicidir.

Uygulama-II/2.2: Ortalaması μ_1 ve varyansı σ_1^2 olan bir kitlenin n birimlik bir tesadüfi örneklemi; $X_1,\cdots,X_n$ olsun. Aynı özelliğe sahip ortalaması μ_2 ve varyansı σ_2^2 olan başka bir kitlenin n birimlik bir tesadüfi örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. $(\bar{X}-\bar{Y})$ tahmin edicisinin $(\mu_1-\mu_2)$ parametresi için tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/2.2: Öncelikle $E(\bar{X}-\bar{Y}) = (\mu_1-\mu_2)$ olduğundan yansız bir tahmin edicidir. $V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} n\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{n}$ ve benzer şekilde $V(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2} n\sigma_2^2 = \frac{\sigma_2^2}{n}$ bulunur. $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ bağımsız olduklarından $V(\bar{X}-\bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{n}$ bulunur. σ_1^2 ve σ_2^2 sonlu olduklarından $\lim_{n\to\infty} V(\bar{X}-\bar{Y}) = \lim_{n\to\infty} = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{n} \to 0$ olur. Sonuç olarak; $E(\bar{X}-\bar{Y})$ tahmin edicisi $(\mu_1-\mu_2)$ parametresi için tutarlıdır.

Uygulama-II/2.3: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \theta y^{\theta-1}, 0<y<1$ olan bir dağılımın n birimlik bir tesadüfi örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. $\bar{Y}$ tahmin edicisinin $\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)$ için tutarlı bir tahmin edici olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/2.3: $E(Y_i) = \int_0^1 \theta y^\theta dy = \theta \frac{y^{\theta+1}}{(\theta+1)}\Big|_0^1 = \frac{\theta}{(\theta+1)}$ ve dolayısıyla $E(\bar{Y}) = \frac{\theta}{(\theta+1)}$ bulunur. O halde $\bar{Y}$, $\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)$ için yansızdır. $E[Y_i^2] = \int_0^1 \theta y^{\theta+1} dy = \theta \frac{y^{\theta+2}}{(\theta+2)}\Big|_0^1 = \frac{\theta}{(\theta+2)}$ olup bulunur. $V(\,Y_i) = \frac{\theta}{(\theta+2)} - \left[\frac{\theta}{(\theta+1)}\right]^2 = \frac{\theta}{(\theta+2)(\theta+1)^2}$ bulunur. Buradan . $V(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2} \frac{\theta n}{(\theta+2)(\theta+1)^2} = \frac{\theta}{n(\theta+2)(\theta+1)^2}$ bulunur. Böylece $\lim_{n\to\infty} V(\bar{Y}) = \lim_{n\to\infty} = \frac{\theta}{n(\theta+2)(\theta+1)^2} \to 0$ olur. Öyle ise $\bar{Y}$ tahmin edicisi $\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)$ için tutarlıdır.

II.4 Yeterlilik

Bu bölümde bir amaç parametresi hakkında bir örneklemin içinde bulundurduğu bütün bilgileri özetleyen istatistiklerin bulunması için metotlar verilecektir. Bu tür istatistiklerin yeterlilik özelliğine sahip oldukları söylenir. Daha sade bir biçimde yeterli istatistikler olarak isimlendirilirler. Yeterli istatistikler, bütün yansız tahmin ediciler arasından en küçük varyanslı olanının belirlenmesi için kullanılır.

Tanım-II.3: Bilinmeyen kitle parametresi θ olan bir dağılımın n birimlik bir örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. $U = g(Y_1,\cdots,Y_n)$'de bu örneklemin bir fonksiyonu olsun. U verilmişken (ya da biliniyorken) $Y_1,\cdots,Y_n$'in şartlı dağılımı θ'dan bağımsız ise U istatistiğinin yeterli olduğu söylenir.

Örnek-II.5: $Y_i = \begin{cases} p, \text{olasılığı ile } 1 \\ (1-p) \text{olasılığı ile } 0 \end{cases}$ olan bir Bernoulli deneyinden n birimlik tesadüfi bir örneklem; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun.$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ istatistiği bir binim dağılımına sahiptir. X istatistiğinin p için yeterli olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II.5: X verilmişken $Y_1,\cdots,Y_n$ örnekleminin şartlı dağılımını bulalım. $P(Y_1 = y_1,\cdots Y_n = y_n | X = x) = \frac{(y_1,\cdots,y_n,x)}{p(x)} = \frac{\frac{p^x(1-p)^{n-x}}{\binom{n}{x}}}{p^x(1-p)^{n-x}} = \binom{n}{x}^{-1}$ bulunur. Sonuç olarak, X verilmişken $Y_1,\cdots,Y_n$ örnekleminin şartlı dağılımını p'den (yani parametreden) bağımsızdır. Yani, X bilindiğinde p'nin mümkün değerlerini ortaya çıkarmak için $Y_1,\cdots,Y_n$ örnekleminin diğer fonksiyonlarına gerek yoktur. Bu nedenledir ki X istatistiği, p için yeterlidir, denilir.

Tanım-II.3, yeterli bir istatistiğin nasıl belirleneceğini belirtir; ancak yeterli bir istatistiğin nasıl bulunacağını belirtmez. Şimdi kesikli dağılımdan bir tesadüfi örneklem; $Y_1,\cdots,Y_n$ ise bunların ortak olasılık fonksiyonu, $p(y_1,\cdots,y_n)$ olsun. Benzer şekilde $Y_1,\cdots,Y_n$ sürekli tesadüfi değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da $f(y_1,\cdots,y_n)$ ile gösterilsin. Tanım-II.4'de bu fonksiyonların ne anlama geldikleri açıklanmıştır.

Tanım-II.4: $Y_1,\cdots,Y_n$ tesadüfi değişkenlerinden alınan gözlem değerleri, $y_1,\cdots,y_n$ olsun. Eğer $Y_1,\cdots,Y_n$ kesikli tesadüfi değişkenler ise örneklemin olabilirliği, $L = L(y_1,\cdots,y_n)$ ile gösterilir ve $y_1,\cdots,y_n$ değerlerinin ortak olasılığı olarak tanımlanır. Benzer şekilde $Y_1,\cdots,Y_n$ sürekli tesadüfi değişkenler ise örneklemin olabilirliği, $L = L(y_1,\cdots,y_n)$ olup $y_1,\cdots,y_n$ değerlerinin ortak olasılık yoğunluğu olarak bilinir.

$Y_1,\cdots,Y_n$ kesikli tesadüfi değişkenlerin bir örneklemi için olabilirlik fonksiyonu, $L = L(y_1,\cdots,y_n) = p(y_1) \times \cdots \times p(y_n)$ ile verilir. Sürekli ise aynı fonksiyon, $L = L(y_1,\cdots,y_n) = f(y_1) \times \cdots \times f(y_n)$ şeklinde tanımlanır. Basitlik olsun diye bundan böyle olabilirlik fonksiyonu, L ile gösterilecektir.

Takipteki Teorem (Teorem-II.4), olabilirlik fonksiyonu ile yeterlilik özelliğini ilişkilendirmektedir.

Teorem-II.4: $Y_1,\cdots,Y_n$ tesadüfi örnekleminin bir istatistiği, U olsun. Ancak ve ancak olabilirlik, $L = g(U,\theta)h(y_1,\cdots,y_n)$ biçiminde iki pozitif fonksiyonla çarpanlarına ayrılabilirse

U istatistiği θ parametresi için yeterli bir istatistiktir. Son eşitlikte $g(U,\theta)$, sadece U ile θ'nın bir fonksiyonu ve $h(y_1,\cdots,y_n)$ ise θ'nın bir fonksiyonu değildir.

Örnek-II.6: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y)=\alpha^{-1}e^{-y/\alpha}, y>0$ olan dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. $\bar{Y}$'nın α'nın tahmini için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II.6: Örneklemin olabilirliği, $L=f(y_1)\times\cdots\times f(y_n)=\alpha^{-n}e^{-\frac{n\bar{y}}{\alpha}}$ ortak yoğunluk fonksiyonudur. Buradan L'nin sadece α ve $\bar{y}$'nın bir fonksiyonu olduğu açıktır. Yani $g(U,\theta)=\alpha^{-n}e^{-\frac{n\bar{y}}{\alpha}}$ ve $h(y_1,\cdots,y_n)=1$ yazılır. Bu yüzdendir ki $\bar{Y}$, α'nın tahmini için yeterli bir istatistiktir.

II.4.1 Uygulama-II/3: Yeterlilik

Uygulama-II/3.1: Her biri $P(Y_i=1)=p$ ve $P(Y_i=0)=1-p,\ i=1,2,\cdots,n$ olasılığına sahip bağımsız ve aynı dağılımlı bir tesadüfi örneklem; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. $\sum_{i=1}^{n}Y_i$'nin p için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.1: Olabilirlik, $L=p(y_1)\times\cdots\times p(y_n)=p^{\sum y_i}(1-p)^{n-\sum y_i}$ elde edilir. Burada L sadece p ve $\sum Y_i$'nin bir fonksiyonudur. Burada $g(U,\theta)=g\left(\sum y_{i,},p\right)=p^{\sum y_i}(1-p)^{n-\sum y_i}$ ve $h(y_1,\cdots,y_n)=1$'dir. Bu nedenle $\sum Y_i$, p için yeterli bir istatistiktir.

Uygulama-II/3.2: Ortalaması, μ ve varyansı, σ^2 olan bir normal dağılımın n birimlik bir tesadüfi örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. a) μ bilinmiyor ve σ^2 biliniyorsa $\bar{Y}$'nın μ için ve b) μ biliniyor ve σ^2 bilinmiyorsa $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)^2$'nın σ^2 için yeterli bir istatistik olduklarını gösteriniz.

Çözüm-II/3.2: a) Olabilirlik, $L=f(y_1)\times\cdots\times f(y_n)=(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=\underbrace{e^{\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y}-\mu)^2}}_{g(\bar{Y},\mu)}\underbrace{(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}e^{-n/2}}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ yazılabildiğinden $\bar{Y}$, μ için yeterli bir istatistiktir.

Not-II.1: $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ ifadesine bir μ ekleyip çıkaralım. Şöyle ki $\sum_{i=1}^{n}[(y_i-\mu)-(\bar{y}-\mu)]^2$ olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=n\sigma^2-n(\bar{y}-\mu)^2$ olur.

b) Kitle ortalaması bilindiğinden olabilirlik fonksiyonu, $L=(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}$ şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonda $g(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2,\sigma^2)=\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}$ ve $h(y_1,\cdots,y_n)=(2\pi)^{-n/2}$ ile verilir. Öyle ise $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$ istatistiği σ^2 için yeterlidir.

Uygulama-II/3.3: Olasılık fonksiyonu, $p(y)=e^{-\lambda}\lambda^y/y!\ \ y=0,1,2,\cdots$ olan dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. $\sum_{i=1}^{n}Y_i$'nin λ için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.3: $L = p(y_1) \times \cdots \times p(y_n) = \underbrace{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum y_i}}_{g(\sum_{i=1}^{n} y_i,\lambda)} \underbrace{(\prod_{i=1}^{n} y_i!)^{-1}}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ olarak yazılabilir. Öyle ise $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, λ için yeterli bir istatistiktir.

Uygulama-II/3.4: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{2y}{\theta}e^{-y^2/\theta}, y > 0$ olan Rayleigh dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$'nin θ için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.4: $L = p(y_1) \times \cdots \times p(y_n) = \underbrace{\theta^{-n}e^{-\sum y_i^2/\theta}}_{g(\sum_{i=1}^{n} y_i^2,\theta)} \underbrace{2^n \prod_{i=1}^{n} y_i}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ olarak yazılabilir. Öyle ise $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, θ için yeterli bir istatistiktir.

Uygulama-II/3.5: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{m}{\alpha}y^{m-1}e^{-y^m/\alpha}, y > 0$ olan bir Weibull dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. m biliniyor ve α bilinmiyorken $\sum_{i=1}^{n} Y_i^m$'in α için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.5: $L = f(y_1) \times \cdots \times f(y_n) = \underbrace{\alpha^{-n}e^{-\sum y_i^m/\alpha}}_{g(\sum_{i=1}^{n} y_i^m,\alpha)} \underbrace{m^n \prod_{i=1}^{n} y_i^{m-1}}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ olarak yazılabilir. Öyle ise $\sum_{i=1}^{n} Y_i^m$, α için yeterli bir istatistiktir.

Uygulama-II/3.6: Olasılık fonksiyonu, $p(y) = p(1-p)^{y-1}$ $y = 1,2,\cdots$ olan bir geometrik dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\bar{Y}$ 'nın p için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.6: $L = p(y_1) \times \cdots \times p(y_n) = \underbrace{p^n(1-p)^{n(\bar{y}-1)}}_{g(\bar{y},p)} \underbrace{1}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ olarak yazılabilir. Öyle ise $\bar{Y}$, p için yeterli bir istatistiktir.

Uygulama-II/3.7: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha}y^{\alpha-1}, 0 \le y \le \theta$ olan dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. Eğer θ biliniyor ve α bilinmiyorken $\prod_{i=1}^{n} Y_i$'in α için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.7: $L = f(y_1) \times \cdots \times f(y_n) = \underbrace{\alpha^n\theta^{-n\alpha}\prod_{i=1}^{n} y_i^{m-1}}_{g(\prod_{i=1}^{n} y_i,\alpha)} \underbrace{1}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ olarak yazılabilir. Öyle ise $\prod_{i=1}^{n} Y_i$, α için yeterli bir istatistiktir.

Uygulama-II/3.8: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \alpha\beta^\alpha y^{-(\alpha+1)}, y \ge \beta > 0$ olan bir Pareto dağılımından alınan n birimlik tesadüfi bir örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. Eğer β biliniyorsa $\prod_{i=1}^{n} Y_i$'nin α için yeterli bir istatistik olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/3.8: $L = f(y_1) \times \cdots \times f(y_n) = \underbrace{\alpha^n\beta^{n\alpha}(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha+1})^{-1}}_{g(\prod_{i=1}^{n} y_i,\alpha)} \underbrace{1}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ olarak yazılabilir. Öyle ise $\prod_{i=1}^{n} Y_i$, α için yeterli bir istatistiktir.

II.5 Yeterli En Küçük Varyanslı Yansız Tahmin Edici

Bir yeterli istatistik, amaç parametresi hakkında örneklemdeki bütün bilgiyi özetleyen bir niceliktir. Bu bölümde böylesi yeterli istatsitiklerin bulunması için metot verilecektir. Yani yeterli istatistikler bulunacak ve bu istatistikler amaç parametresi için enküçük varyanslı yansız tahmin ediciler (MVUE) geliştirmek için kullanılacaktır. İşte böylesi istatistiklerin bulunması için Lehmann ve Scheffe$'$ tarafından geliştirilen bir metot verilecektir.

Bilinmeyen kitle parametresi θ olan bir olasılık fonksiyonu, $p(y)$ veya bir olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y)$ olan dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. Bilindiği gibi $(Y_1, \cdots, Y_n)$ değişkenlerinin kümesi bir çok farklı değede olabilir. Böylesi iki değer kümesi sırasıyla $(x_1, \cdots, x_n)$ ve $(y_1, \cdots, y_n)$ olsun. Lehmann ve Scheffe$'$ tarafından geliştirilen bu metot verilen iki değerler kümesi olabilirliklerinin oranının kullanılmasıyla $L(x_1, \cdots, x_n)/L(y_1, \cdots, y_n)$ başarılabilir.

Çoğu kez bu oranı bilinmeyen θ parametresinden bağımsız yapacak bir $g(x_1, \cdots, x_n)$ fonksiyonu bulmak mümkündür. Bu ise ancak ve ancak $g(x_1, \cdots, x_n) = g(y_1, \cdots, y_n)$ olmasıyla mümkündür. Eğer böyle bir $g(.)$ Fonksiyonu bulunabilirse $g(y_1, \cdots, y_n)$, θ için yeterli en küçük istatistiktir.

Örnek-II.7: Her biri $P(Y_i = 1) = p$ ve $P(Y_i = 0) = 1 - p,\ i = 1,2, \cdots, n$ olasılığına sahip bağımsız ve aynı dağılımlı bir tesadüfi örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. Ayrıca p de bilinmesin p için yeterli bir en küçük istatistik bulunuz.

Çözüm-II.7: Bu örnek için olabilirlik oranı, $\frac{L(x_1,\cdots,x_n)}{L(y_1,\cdots,y_n)} = \frac{p(x_1)\cdots p(x_n)}{p(y_1)\cdots p(y_n)} = \frac{p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}}{p^{\sum y_i}(1-p)^{n-\sum y_i}}$ $=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} p^{-\sum y_i}(1-p)^{-n+\sum y_i} = \left[\frac{p}{(1-p)}\right]^{\sum x_i - \sum y_i}$ olarak yazılabilir. Bu oranın p'den bağımsız olabilmesi için $\sum x_i - \sum y_i = 0$ veya eşiti olarak $\sum x_i = \sum y_i$ olmalıdır. Böylece Lehmann ve Scheffe$'$'nin metodu gereğince $\sum Y_i$, p için yeterli bir en küçük istatistiktir.

Örnek-II.8: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{2y}{\theta} e^{-y^2/\theta}, y > 0$ olan Rayleigh dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. θ için yeterli bir en küçük varyanslı yansız tahmin edici (istatistik) bulunuz.

Çözüm-II.8: Lehmann ve Scheffe$'$'nin metodunun kullanılmasıyla $\frac{L(x_1,\cdots,x_n)}{L(y_1,\cdots,y_n)} = \frac{f(x_1)\cdots f(x_n)}{f(y_1)\cdots f(y_n)} =$ $\frac{2^n \prod x_i e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2} \theta^{-n}}{2^n \prod y_i e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n y_i^2} \theta^{-n}} = \frac{\prod x_i}{\prod y_i} exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2\right)\right\}$ elde edilir. Bu oranın θ'dan bağımsız olaması için $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$ ve sonuç olarak $\sum_{i=1}^n Y_i^2$, θ için yeterli bir en küçük istatistiktir. Şimdi de θ için yansız olan bu istatistiğin bir fonksiyonunu bulalım. $U = Y^2$ alınırsa $u = y^2$

$=> y = u^{1/2}$ olup Jacobian, $J = det\left[\frac{\partial y}{\partial u}\right] = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ olur. Bazı örneklerde bu determinant negatif olabileceğinden sonucun mutlaka mutlak değeri alınmalı ve o kullanılmalıdır. Bu örnekte $|J| = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ olur. Böylece U'nun olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f_U(u) = \left(\frac{2}{\theta}\right)\sqrt{u}e^{-u/\theta}\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{\theta}e^{-u/\theta}, u > 0$ elde edilir. Yani, $U = Y^2, \theta$ parametreli bir üstel dağılıma sahiptir. Zira $E(U) = E(Y^2) = \theta$ ve $E(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2) = n\theta$ yazılır. Öyle ise $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$, θ'nın bir yansız tahmin edicisi ve aynı zmanda Rayleigh parametresi θ için bir MVUE'dir.

Örnek-II.9: Bilinmeyen ortalaması μ ve bilinmeyen varyansı σ^2 olan bir normal dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. μ ve σ^2için yeterli ve MVUE bulunuz.

Çözüm-II.9: Lehmann ve Scheffe$'$'nin kriterinin kullanılmasıyla $\frac{L(x_1,\cdots,x_n)}{L(y_1,\cdots,y_n)} = \frac{f(x_1)\cdots f(x_n)}{f(y_1)\cdots f(y_n)} = \frac{\sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2}exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right]}{\sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2}exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i-\mu)^2\right]} = exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum(x_i-\mu)^2 - \sum(y_i-\mu)^2\right]\right\}$ elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $\frac{L(x_1,\cdots,x_n)}{L(y_1,\cdots,y_n)} = exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right]\right\}$ elde edilir. Bu oran (ya da fonksiyon) μ ve σ^2'den bağımsız olmalıdır. O halde $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ ve $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$ eşitlikleri sağlanmalıdır. Böylece $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ ve $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, μ ve σ^2 için ortak-yeterli en küçük istatistiklerdir. Önceki çalışmalardan $\bar{Y}$'nın μ ve $S^2 = (n-1)^{-1}\sum(y_i-\mu)^2$'nin de σ^2 için yansız oldukları bilinmektedir. Bu tahmin ediciler yeterli en küçük istatistiklerin fonksiyonu olduklarından onlar da μ ve σ^2 için MVUE'lerdir.

Not-II.3: Olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının yansız tahmin edicileri, yeterli en küçük istatistiklerin bir fonksiyonudur ki onlar aynı zamanda en küçük varyanslı yansız tahmin ediciler (MVUE)'dir. Sonuç olarak yeterli en küçük istatistikler MVUE'lerin bulunması için pekâlâ kullanılabilir.

Örnek-II.10: olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \theta^{-1}e^{-y/\theta}, y > 0$ olan bir üstel dağılımın n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $V(Y_i)$'nin bir MVUE'sini bulunuz.

Çözüm-II.10: Önce$E(Y_i) = \theta$ ve $V(Y_i) = \theta^2$'dir. Lehmann ve Scheffe$'$'nin kriteri gereğince $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, θ için yeterli en küçük istatistiktir. Gerçekte $\bar{Y}$, θ'nın MVUE'dir. Bu nedenle θ^2'nin bir tahmin edicisi olarak $\bar{Y}^2$'nin kullanılması cazip gibi görünmektedir. Ancak $E(\bar{Y}^2) = V(\bar{Y}) + [E(\bar{Y})]^2 = \frac{\theta^2}{n} + \theta^2 = \theta^2\left(\frac{n+1}{n}\right)$ olduğundan $\bar{Y}^2$, θ^2 için yanlıdır. Bununla birlikte $\left(\frac{n}{n+1}\right)\bar{Y}^2$, θ^2 için bir MVUE'cidir. θ^2'nin bundan başka hiçbir yansız tahmin edicisi daha küçük varyansa sahip değildir.

Bir θ parametresi için yeterli en küçük istatistiğin dağılım fonksiyonu bulunabilirse bu fonksiyon, θ için güven aralığı oluşturulmasında çoğu kez kullanılabilir. Dolayısıyla belli bir güvenilirlik seviyesinde elde edilecek güven aralığı en dar olacaktır.

Örnek-II.11: Aynı tür 10 adet elektronik aletin dayanma süresi (100 saat) olarak Şöyledir: 0.637; 1.531; 0.733; 2.256; 2.364; 1.601; 0.152; 1.826; 1.868 ve 1.126. Bu tip aletlerin dayanma sürelerinin dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{2}{\theta} y e^{-y^2/\theta}, y > 0$ olduğu varsayılmaktadır. Veriyi kullanarak θ için %95 güven aralığı oluşturunuz.

Çözüm-II.11: Örnek-2.8'de $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$'nin θ için yeterli en küçük istatistik olduğu gösterilmişti. Böylece bu istatistik bir döngüsel nicelik formu olarak kullanılabilir. Şimdi $U_i = Y_i^2$ dönüşümü ortalaması θ olan bir üstel dağılıma sahip olduğuna göre $V_i = \frac{2}{\theta} U_i$dönüşümü düşünülsün. Öyle ise $f_V(v) = \left(u = \frac{\theta}{2} v\right) \frac{\left(\partial \frac{\theta}{2} v\right)}{\partial v} = \frac{1}{2} e^{-v/2}, v > 0$ dönüşümün olasılık yoğunluk fonksiyonu olur. Böylece $i = 1,2, \cdots, n$ olmak üzere V_i, her biri 2 sd'li bir ki-kare dağılımına sahiptir. Ayrıca Y_i tesadüfi değişkenleri bağımsız oldukları için V_i'ler de bağımsızdır. Bağımsız ki-kare tesadüfi değişkenlerin toplamı da ki-kare dağılımına sahiptir ve $\sum_{i=1}^{10} V_i = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{10} U_i = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{10} Y_i^2$ niceliği 20 sd'li bir ki-kare dağılımına sahiptir. Böylece $\frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{10} Y_i^2$ bir döngüsel istatistiktir. Bu istatistik güven aralığı oluşturmak için kullanılabilir. Sonuç olarak; $P\left(a \leq \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 \leq b\right) = 0.95$ ifadesindeki a ve b değerlerini bulabilmek için ki-kare tablo değerlerinden yararlanılır. Eşitsizliklerdeki ifadelerde gerekli işlemler yapılır ve θ yalnız bırakılırsa $P\left(a \leq \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 \leq b\right) = P\left(\frac{2\sum_{i=1}^{10} Y_i^2}{b} \leq \theta \leq \frac{2\sum_{i=1}^{10} Y_i^2}{a}\right) = 0.95$ elde edilir. Ki-kare tablosunda 20 sd'de alt sınır için (0.025 olasılıktaki) $a = 9.591$ ve üst sınır için (0.975 olasılıktaki) değeri ise $b = 34.170$ bulunur. Buradaki örneğe tekrar dönülürse $\sum_{i=1}^{10} y_i = 24.643$ bulunur. Bu nedenle Rayleigh parametresi θ için %95 güven aralığı, $P\left(\frac{2(24.643)}{34.170} \leq \theta \leq \frac{2(24.643)}{9.591}\right) = 0.95 \;=>\; (1.442, 5.139)$ bulunur.

II.6 Momentler Metodu

Tanım-II.5: Orijine göre kitle parametre sayısı kadar, gözlemlenen örnekleme ilişkin örmeklem momentlerinin kitle momentlerine eşitlenmesiyle elde edilen denklem sisteminde sistemin çözüm kümesini parametre ya da parametrelerin tahmin edicileri olarak seçen metoda **momentler metodu** adı verilir.

Nokta tahmin edicilerinin türetilmesi için geliştirilen en eski metot momentler metodudur. Momentler metodu çok basit bir işleme sahiptir. Bir tesadüfi değişkenin orijine göre r'inci momenti, $\mu_r' = E(Y^r)$ ile verilir. Düşünülen r'inci moment, $M_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^r$'dir. Yani r'inci ortalamadır. Momentler metodu, düşünülen kitle parametresinin iyi tahminini sağlayan örneklem momentleri varsayımına dayanır. Şöyle ki M_r', μ_r''nin $(r = 1,2.\cdots,k)$ iyi bir tahmin edicisi olmalıdır. μ_1', μ_2', $\cdots$, μ_k' kitle momentleri, kitle parametrelerinin fonksiyonları olabileceğinden kitle ve örneklem momentleri birbirine eşitlenerek istenilen tahmin ediciler elde edilebilir. Böylece bu basit metot ile tahmin ediciler, $\mu_r' = M_r'$, $r = 1,2.\cdots,k$ (k parametre sayısıdır) eşitliklerinin çözümüm kümesinden oluşur.

Örnek-II.12: $Y_1,\cdots,Y_n$ tesadüfi değişkenleri $(0,\theta)$aralığında tanımlı bir sürekli düzgün dağılımın örneklemi olsun. Burada θ bilinmiyor. Momentler metodunu kullanarak θ'nın tahmin edicisini elde ediniz.

Çözüm-II.12: Öncelikle dağılımda bir parametre olduğundan bir kitle ve örneklem momenti yeterlidir. $(0,\theta)$aralığında tanımlı bir sürekli düzgün dağılımın kitle momenti, $\mu_1' = \mu = \frac{\theta}{2}$'dir. Birinci örneklem momenti, $M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \bar{Y}$'dır. Böylece bu iki monetin birbirine eşitlenmesi ile $\mu_1' = M_1' => \frac{\theta}{2} = \bar{Y} => \hat{\theta} = 2\bar{Y}$ elde edilir. Böylece $\hat{\theta} = 2\bar{Y}$, θ'nın moment tahmin edicisidir.

Not-II.4: Momentler metodu ile elde edilen tahmin ediciler örneklem momentlerinin fonksiyonları olduklarından elde edilen tahmin ediciler genellikle tutarlıdır.

Örnek-II.13: Örnek-II.12'de türetilen tahmin edici, $\hat{\theta} = 2\bar{Y}$'nın θ için tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II.13: $V(\hat{\theta}) = V(2\bar{Y}) = \frac{\theta^2}{3n}$'dir. Teorem-II.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} V(\bar{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{3n} \to 0$ olur ki $\hat{\theta}$, θ için tutarlı bir tahmin edicidir.

Örnek-II.14: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gama dağılımının n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. Bilinmeyen α ve β parametreleri için moment tahmin edicilerini bulunuz.

Çözüm-II.14: α ve β parametrelerinin tahmin edicileri bulmak için kitle ve örneklem moment ikililerinin birbirine eşitlenmesi gerekir. O halde gama dağılımının ilk iki kitle momenti sırasıyla; $\mu_1' = \mu = \alpha\beta$ ve $\mu_2' = \sigma^2 + \mu^2 = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$'dir. Şimdi bu niceliklerle onların örneklem momentlerinin birbirine eşitlenmesiyle $\mu_1' = M_1' => \alpha\beta = \bar{Y}$ ve $\mu_2' = M_2' => \alpha(\alpha+1)\beta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ eşitlikleri elde edilir. Böylece birinci eşitlikten $\alpha\beta =$

$\bar{Y} => \ \beta = \frac{\bar{Y}}{\alpha}$ yazılabilir. Bu sonuç ikinci eşitlikte değerlendirilirse $\alpha(\alpha+1)\left(\frac{\bar{Y}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 => \frac{(\alpha+1)}{\alpha}(\bar{Y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 => \ n(\alpha+1)(\bar{Y})^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 => \ n(\alpha+1)(\bar{Y})^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \ => \ \alpha\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\alpha(\bar{Y})^2 = n(\bar{Y})^2 => \alpha[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n(\bar{Y})^2] = n(\bar{Y})^2 => \hat{\alpha} = \frac{n(\bar{Y})^2}{[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n(\bar{Y})^2]} = \frac{n\bar{Y}^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}$ bulunur. Bu sonuç $\beta = \frac{\bar{Y}}{\alpha}$ eşitliğinde değerlendirilirse $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{n\bar{Y}}$ bulunur.

Bu elde edilen tahmin ediciler tutarlıdır. Yani $\bar{Y}$ olasılıkta $\mu = \alpha\beta$'ya ve $\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{n}$ de olasılıkta $\alpha(\alpha+1)\beta^2$ değerine yaklaşır. Böylece $\hat{\alpha} = \frac{\bar{Y}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \bar{Y}^2}$, $\alpha = \frac{(\alpha\beta)^2}{\alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2}$'nın ve $\beta = \frac{\bar{Y}}{\hat{\alpha}}$ 'da $\beta = \frac{\alpha\beta}{\alpha}$ 'nın tutarlı bir tahmin edicisidir.

II.6.1 Uygulama-II/4: Momentler Metodu

Uygulama-II/4.1: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = (\theta+1)y^{\theta}, 0 < y < 1;\ \theta > -1$ olan dağılımdan tesadüfi bir örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. Momentler metodu ile θ'nın bir tahmin edicisini bulunuz ve bu tahmin edicinin tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm-II/4.1: Öncelikle birinci kitle momentini bulalım. $E(Y) = (\theta+1)\int_0^1 y^{(\theta+1)}\,dy = \frac{(\theta+1)}{(\theta+2)} y^{(\theta+2)}\Big|_0^1 = \frac{(\theta+1)}{(\theta+2)} = \mu_1' = \mu$ bulunur. Birinci örneklem momenti, $M_1' = \bar{Y}$ $\quad \mu_1' = M_1'$ $=> \frac{(\theta+1)}{(\theta+2)} = \bar{Y} => \ \ (\theta+1) = (\theta+2)\bar{Y} => \ (\theta+1) = \theta\bar{Y} + 2\bar{Y} \ => \ = \theta - \theta\bar{Y} = 2\bar{Y} - 1 => \theta(1-\bar{Y}) = 2\bar{Y} - 1 \ => \hat{\theta} = \frac{2\bar{Y}-1}{(1-\bar{Y})}$ elde edilir. Böylece $\bar{Y}$ olasılıkta $\frac{(\theta+1)}{(\theta+2)}$'ye yaklaşır. Buradan $V(\hat{\theta}) = \frac{4}{n}$ bulunur. O halde $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \to 0$ olduğundan $\hat{\theta}$, θ için tutarlıdır.

Uygulama-II/4.2: Ortalaması λ olan bir Poisson dağılımdan tesadüfi bir örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. λ'nın moment tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm-II/4.2: Birinci kitle momenti, $\mu_1' = E(Y) = \lambda$ ve birinci örneklem momenti, $M_1' = \bar{Y}$ olup λ'nın moment tahmin edicisi, $\mu_1' = M_1'$ eşitliğinden $\hat{\lambda} = \bar{Y}$ bulunur.

Uygulama-II/4.3: Ortalaması $\mu = 0$ ve bilinmeyen varyansı σ^2olan normal dağılımdan tesadüfi bir örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. σ^2'nin moment tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm-II/4.3: İkinci kitle momenti $\mu_2' = E(Y^2) = \sigma^2 + (\mu^2 = 0) = \sigma^2$ ve ikinci örneklem momenti, $M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ olup σ^2'nın moment tahmin edicisi, $\mu_2' = M_2'$ eşitliğinden $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ bulunur.

Uygulama-II/4.4: Ortalaması μ ve varyansı σ^2olan normal dağılımdan tesadüfi bir örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. μ ve σ^2'nin moment tahmin edicilerini bulunuz.

Çözüm-II/4.4: Birinci kitle momenti, $\mu_1' = \mu$, ikinci kitle momenti $\mu_2' = E(Y^2) = \sigma^2 + \mu^2$ yazılır. Birinci örneklem momenti, $M_1' = \bar{Y}$ ve ikinci örneklem momenti, $M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ olup μ ve σ^2'nin moment tahmin edicileri, $\mu_1' = M_1'$ ve $\mu_2' = M_2'$ eşitliklerinden hareketle birinci eşitliten $\hat{\mu} = \bar{Y}$ bulunur. İkinci eşitlikten $\hat{\sigma}^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ yazılır. μ yerine $\bar{Y}$ yazılır ve düzenlenirse $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ bulunur. Sonuç olarak; μ ve σ^2'nin moment tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\mu} = \bar{Y}$ ve $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ ile verilir.

Uygulama-II/4.5: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - y), 0 < y < \theta$ ile verilen dağılımdan tesadüfi bir örneklem; $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. θ'nın moment tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm-II/4.5: Birinci kitle momenti, $\mu_1' = \mu = \frac{\theta}{3}$ ve birinci örneklem momenti ise $M_1' = \bar{Y}$ olup $\mu_1' = M_1'$ eşitliğnden $\frac{\theta}{3} = \bar{Y} \Rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{Y}$ tahmin edicisi θ'nın moment tahmin edicisidir.

II.7 En Çok Olabilirlik Metodu

Tanım-II.6: Gözlemlenen örneklemin olabilirlik fonksiyonunu en büyük yapan parametre ya da parametrelerin değerlerini ilgili parametre ya da parametrelerin tahmin edicileri olarak seçen metoda **en çok olabilirlik metodu** adı verilir ve EÇOK olarak kısaltılır.

Örnek-II.15: n tesadüfi deney sonucunda bir Bernoulli dağılımının gözlem değerleri; $y, \cdots, y_n$ olsun. Burada $y_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer deney başarılı ise} \\ 0, & \text{eğer deney başarısız ise} \end{cases}$ tanımlansın. p başarıların olasılığı olmak üzere p'nin EÇOK tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm-II.15: Gözlemlenen örneklemin olabilirlik fonksiyonu, $L(y_1, \cdots, y_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} y_i}(1 - p)^{n - \sum_{i=1}^{n} y_i}$ olur. $L(.)$ Fonksiyonunu en büyük yapan p değerini bulmak gerek. Öyle ise p'nin değeri olabilirlik fonksiyonunda p'ye göre birinci türevin sonucunun sıfıra eşitlenmesiyle bulunabilir. Ayrıca $\ln L(.)$, $L(.)$'nin monoton artan bir fonksiyonudur ve bu nedenledir ki hem $\ln L(.)$ ve hem de $L(.)$ p'nin aynı değeri için en büyük olur. $L(.)$, p'nin fonksiyonlarının bir çarpımı olması nedeniyle çarpımın türevi sıkıcıdır. Bu nedenledir ki p değerinin bulunması için $\ln L(.)$'nin kullanılması daha uygun ve kolaydır. Öyle ise verilen örnek için bu fonksiyon, $\ln L(.) = (\sum_{i=1}^{n} y_i)\ln p + (n - \sum_{i=1}^{n} y_i)\ln(1 - p)$ yazılabilir. Bu fonksiyondan p'ye göre birinci türevin sonucunun sıfıra eşitlenmesiyle $\frac{\partial \ln L(.)}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{p} - \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} y_i)}{(1-p)} = 0 \Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} y_i - p\sum_{i=1}^{n} y_i - np + p\sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \Rightarrow np = \sum_{i=1}^{n} y_i \Rightarrow \hat{p} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n = \bar{Y}$ bulunur.

Örnek-II.16: Ortalaması μ ve varyansı σ^2olan normal dağılımın tesadüfi bir örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. μ ve σ^2'nin EÇOK tahmin edicilerini bulunuz.

Çözüm-II.16: Örneklemin EÇOK fonksiyonu, $L(y_1,\cdots,y_n)=\sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2}$ $exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right]$ olur. Buradan $L(.)$'nin doğal logaritması alınırsa $\ln L(.)$ fonksiyonu, $\ln L(.)=-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$ olur. μ ve σ^2'nin EÇOK tahmin edicileri, $\ln L(.)$ fonksiyonunu en büyük yapan değerlerdir. μ ve σ^2'ye göre birinci kısmi türevlerin alınmasıyla $\frac{\partial\ln L(.)}{\partial\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)}{\sigma^2}$ ve $\frac{\partial\ln L(.)}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{\sigma^3}$ eşitlikleri elde edilir. Her iki eşitliğin sıfıra eşitlenmesi ve gerekli işlemlerin yapılmasıyla birinci eşitlikten $\frac{\partial\ln L(.)}{\partial\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)}{\sigma^2}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}y_i-n\mu=0 \Rightarrow \hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=\bar{Y}$ elde edilir. İkinci eşitlikten μ'nün yerine $\bar{Y}$'nın yazılması ve gerekli işlemlerin yapılmasıyla $\frac{\partial\ln L(.)}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{\sigma^3}=0 \Rightarrow -n\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2=\tilde{S}^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/n$ bulunur. Böylece $\bar{Y}$ ve $\tilde{S}^2$ tahmin edicileri, μ ve σ^2'nin EÇOK tahmin edicileridir. $\bar{Y}$, μ için yansız bir tahmin edicidir. $\tilde{S}^2$, σ^2 için yansız tahmin edici olmadığı halde bu tahmin edici $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ düzeltme terimi kullanılarak kolayca $S^2=\left(\frac{n}{n-1}\right)\tilde{S}^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)$ yansız yapılabilir. Böylece S^2, σ^2 için yansız bir tahmin edici olur.

Örnek-II.17: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y)=\theta^{-1}, 0<y<\theta$ olan bir kitlenin n birimlik tesadüfi bir örneklemi; $Y_1,\cdots,Y_n$ olsun. θ'nın EÇOK tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm-II.17: Örneklemin EÇOK fonksiyonu, $L(y_1,\cdots,y_n)=\theta^{-n}$ olur. Burada $L(.)$ fonksiyonu, θ'nın monoton azalan bir fonksiyonudur ve $0<\theta<\infty$ aralığında $\frac{\partial L(.)}{\partial\theta}$ sıfıra eşittir. Bununla birlikte θ azalırken $L(.)$ artarsa $y_1,\cdots,y_n$ gözlem değerlerinin en büyüğüne eşit veya daha büyük olmalıdır. Buradan böyle θ'nın değeri örneklemdeki en büyük değeridir ve olabilirlik fonksiyonunu en büyük yapar. Yani $\hat{\theta}=Y_n=$ Enbüyük$(Y_1,\cdots,Y_n)$ yazılabilir. Maalesef bu tahmin edici, θ için yanlı bir tahmin edicidir; ancak ayarlanarak yansız yapılabilir. Şöyle ki $E(Y)=\theta/2$ olduğundan θ'nın yansız tahmin edicisi, $\hat{\theta}=2Y_n$ yazılabilir.

II.8 İkinci Bölümle İlgili Çalışma Soru ve Çözümleri

ÇS–1: Tahmin (5P), yansızlık (5P), tutarlılık (5P) ve önem seviyesi (5P) kavramlarını açıklayınız.

ÇSÇ-1: Tahmin: Tahmin edicinin ürettiği sonuçtur. **Yansızlık:** Bir tahmin edicinin ortalamasının parametresine eşit olmasıdır. **Tutarlılık:** $\hat{\theta}$, θ'nın bir yansız tahmin edicisi iken eğer $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta})\to 0$ olursa $\hat{\theta}$'ya θ için tutarlıdır, denir. **Önem seviyesi:** α ile gösterilir ve birinci tip hata olarak ta bilinir. Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin test sonucu ret edilmesi olasılığıdır.

ÇS–2: Olasılık fonksiyonu, $f(y) = \binom{2}{y} p^y (1-p)^{2-y}, y = 0,1,2$ olan bir binom dağılımın n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. p'nin iki yansız tahmin edicisi $\hat{p}_1 = \bar{Y}/2$ ve $\hat{p}_2 = (Y_1/8) + \{(Y_2 + \cdots + Y_{n-1})/[4(n-2)]\} + (Y_n/8)$ olsun. $\hat{p}_1$'in $\hat{p}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇSÇ-2: $V(\hat{p}_1) = V(\bar{Y}/2) = V(\bar{Y})/4 = 2npq/4n^2 = pq/2n$ ve $V(\hat{p}_2) = (2pq/64) + [(n-2)2pq]/[16(n-2)^2] + (2pq/64) = npq/[16(n-2)]$ olup $Etk(\hat{p}_1) = V(\hat{p}_2)/V(\hat{p}_1) = n^2/[8(n-2)]$ bulunur. $n \geq 3$ $Etk(\hat{p}_1) \geq 1$ olduğundan p'nin tahmini için $\hat{p}_1$ tahmin edicisi tercih edilmelidir.

ÇS–3: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \beta^{-2} y e^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gamma dağılımının n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\beta} = \bar{Y}/2$ şeklinde tanımlanan tahmin edicinin β için; yansız (6P), tutarlı (6P) ve en küçük varyanslı yansız tahmin edici (8P) olduğunu gösteriniz.

ÇSÇ-3: $E(Y) = \int y f(y) dy = 2\beta$ olduğu gösterilir. Öyle ise $E(\hat{\beta}) = E(\bar{Y}/2) = (n2\beta/2n) = \beta$ olup, yansızdır. $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}) = \lim_{n\to\infty} (\beta^2/2n) \to 0$ oduğundan tutarlıdır. Burada $V(\hat{\beta}) = (2n\beta^2/4n^2) = \beta^2/(2n)$ bulunur. Rao-Cramer eşitsizliği gereğince $V(\hat{\beta}) \geq \frac{1}{nE\left[\frac{\partial lnf(y;\beta)}{\partial \beta}\right]^2}$ eşitlik sağlanırsa $\hat{\beta}$'ya β için en küçük varyanslı yansız tahmin edici denir. Soldan $V(\hat{\beta}) = (2n\beta^2/4n^2) = \beta^2/(2n)$ bulunur. Sağdan $lnf(y;\beta) = -2ln\beta + lny - y/\beta$ olup $\left[\frac{\partial lnf(y;\beta)}{\partial \beta}\right] = -(2/\beta) + (y/\beta^2) = (y-2\beta)/\beta^2 \quad => E\left[\frac{\partial lnf(y;\beta)}{\partial \beta}\right]^2 = E[(y-2\beta)/\beta^2] = V(Y)/\beta^4 = 2\beta^2/\beta^4 = 2/\beta^2 \quad => n\,E\left[\frac{\partial lnf(y;\beta)}{\partial \beta}\right]^2 = 2n/\beta^2$ olup $\left\{nE\left[\frac{\partial lnf(y;\beta)}{\partial \beta}\right]^2\right\}^{-1} = \beta^2/(2n)$ bulunur. Sonuç olarak; Rao-Cramer eşitsizliği eşitlik durumunda olduğundan $\hat{\beta}$, β için en küçük varyanslı yansız bir tahmin edicidir.

ÇS–4: Olasılık fonksiyonu, $f(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, y = 0,1,\cdots$ olan bir Poisson dağılımın 10 birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_{10}$ olsun. λ'nın iki yansız tahmin edicisi $\hat{\lambda}_1 = \bar{Y}$ ve $\hat{\lambda}_2 = [Enb\{Y_1, \cdots, Y_{10}\} + Y_7 + Enk\{Y_1, \cdots, Y_{10}\}]/3$ olsun. $\hat{\lambda}_1$'in $\hat{\lambda}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇSÇ-4: $V(\hat{\lambda}_1) = V(\bar{Y}) = \frac{10\lambda}{100} = \lambda/10$ ve $V(\hat{\lambda}_2) = \frac{3\lambda}{9} = \lambda/3$ olup, $Etk(\hat{\lambda}_1) = \frac{V(\hat{\lambda}_2)}{V(\hat{\lambda}_1)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{3}\right)}{\left(\frac{\lambda}{10}\right)} = 10/3$ bulunur. $Etk(\hat{\lambda}_1) > 1$ olduğundan λ'nin tahmini için $\hat{\lambda}_1$ tahmin edicisi tercih edilmelidir.

ÇS–5: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \beta^{-3} y^2 e^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gamma dağılımının n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\beta} = \bar{Y}/3$ şeklinde tanımlanan tahmin edicinin β için; yansız (6P), tutarlı (6P) ve yeterli (8P) olduğunu gösteriniz.

ÇSÇ.-5: $E(Y) = \int yf(y)dy = 3\beta$ olduğu gösterilir. Öyle ise $E(\hat{\beta}) = E(\bar{Y}/3) = (n3\beta/3n) = \beta$ olup, yansızdır. $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}) = \lim_{n\to\infty}(\beta^2/3n) \to 0$ oduğundan tutarlıdır. Burada $V(\hat{\beta}) = (3n\beta^2/9n^2) = \beta^2/(3n)$ bulunur. $L(y;\beta) = \underbrace{\beta^{-3n}e^{-\frac{3n\hat{\beta}}{\beta}}}_{g(\beta;\hat{\beta})}\underbrace{2^{-n}\prod y_i^2}_{h(y_1,\cdots,y_n)}$ şeklinde yazılabildiğinden $\hat{\beta}$, β için yeterli bir tahmin edicidir.

ÇS–6: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ olan bir normal dağılımın 20 birimlik tesadüfî örnekleminin gözlem değerleri: 15; 16; 18(3); 19(5); 20(2); 21(3); 22(3) ve 23(2) olsun. μ'nün moment tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇSÇ-6: μ'nün moment tahmin edicisini bulalım. Birinci kitle momenti: $\mu_1' = E(Y) = \mu$ ve birinci örneklem momenti ise $M_1' = \bar{Y}$ olup bu iki moment birbirine eşitlenirse μ'nün moment tahmin edicisi, $\hat{\mu} = \bar{Y}$ olarak bulunur. Gözlem değerlerine ilişkin bu nicelik ise $\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{\sum y_i}{20} = \frac{395}{20} = 19.75$ olarak bulunur.

ÇS–7: Olasılık fonksiyonu, $f(y) = p\,(1-p)^{y-1}$, $y = 1,2,\cdots$ olan geometrik dağılımın 20 birimlik bir tesadüfî örnekleminin gözlem değerleri: 1(7); 2; 3(2); 4(3); 5(2); 6(2); 8; 14 ve 16 olsun. p'nin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇSÇ-7: Örneklemin olabilirlik (ortak olasılık) fonksiyonu, $L(p) = p^{20}(1-p)^{(\sum Y_i - 20)}$ olup buradan log-olabilirlik fonksiyonu ise $\ell L(.) = 20ln(p) + (\sum Y_i - 20)\ln(1-p)$ şeklinde yazılır. Buradan p'ye göre birinci türev alınır ve sıfırda değerlendirilirse p'nin EÇOK tahmin edicisi, $\hat{p} = 1/\bar{Y}$ olarak bulunur. Gözlem değerlerine ilişkin bu nicelik ise $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{20} = \frac{87}{20} = 4.35$ ve buradan $\hat{p} = \frac{1}{\bar{y}} = \frac{1}{4.35} = 0.23$ olarak bulunur.

ÇS–8: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = 2\beta^{-2}ye^{-(y/\beta)^2}, y > 0$ olan bir Weibull dağılımının 20 birimlik tesadüfî bir örnekleminin gözlem değerleri: 1; 2(4); 3(3); 4(2); 5(4); 6(3); 7; 10 ve 11 olsun. β'nın en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇSÇ-8: Örneklemin olabilirlik (ortak olasılık yoğunluk) fonksiyonu, $L(.) = 2^{20}\beta^{-40}exp(-\sum_{i=1}^{20} Y_i^2/\beta^2)$ olup buradan log-olabilirlik fonksiyonu ise $\ell L(.) = 20ln(2) - 40ln(\beta) - \sum_{i=1}^{20} Y_i^2/\beta^2$ şeklinde yazılır. Buradan β'ya göre birinci türev alınır ve sıfırda değerlendirilirse β'nın EÇOK tahmin edicisi, $\hat{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} Y_i^2}{20}}$ olarak bulunur. Gözlem değerlerine ilişkin bu nicelik ise $\hat{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} Y_i^2}{20}} = \sqrt{\frac{554}{20}} = 5.263$ olarak bulunur.

ÇS-9: Tahmin edici (5P), yansızlık (5P), nispi etkinlik (5P) ve güvenilirlik seviyesi (5P) kavramlarını açıklayınız.

ÇS-10: $Y \sim N(\mu = 25;\ \ \sigma^2 = 36)$ olan normal dağılımın 10 birimlik tesadüfî örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_{10}$ olsun. μ'nün iki yansız tahmin edicisi sırası ile $\hat{\mu}_1 = \bar{Y}$ ve $\hat{\mu}_2 = \frac{Enk(Y_1,\cdots,Y_{10}) + \bar{Y} + Enb(Y_1,\cdots,Y_{10})}{3}$ ise $\hat{\mu}_1$'in $\hat{\mu}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇS-11: $Y \sim E(\beta = 5)$ olan üstel dağılımın 12 birimlik tesadüfi örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_{12}$ olsun. β'nın iki yansız tahmin edicisi sırası ile $\hat{\beta}_1 = \bar{Y}$ ve $\hat{\beta}_2 = \frac{Y_1+\bar{Y}}{2}$ ise $\hat{\beta}_1$'in $\hat{\beta}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇS-12: Olasılık fonksiyonu $f(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, y = 0; 1; \cdots$ olan bir Poisson dağılımının *n* birimlik tesadüfi örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\lambda} = \bar{Y}$ tahmin edicisinin λ için: (a) Yansız, (b) tutarlı, (c) yeterli olduğunu gösteriniz.

ÇS-13: Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y) = \beta^{-2} y e^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gamma dağılımının 20 birimlik tesadüfi örneklemine ilişkin gözlem değerleri; 2(2); 3; 5; 6; 7; 8; 9(2); 11; 18(3); 19; 21; 23; 25; 28; 32 ve 40 olsun. β'nın moment tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇS-14: Olasılık fonksiyonu $f(y) = \binom{2}{y} p^y (1-p)^{2-y}, y = 0; 1; 2$ olan bir binom dağılımının 20 birimlik tesadüfi örneklemine ilişkin gözlem değerleri; 0(3); 1(9); ve 2(8) olsun. p'nin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇS-15: Tahmin (5P), yansızlık (5P), nispi etkinlik (5P) ve önem seviyesi (5P) kavramlarını açıklayınız.

ÇS-16: $Y \sim N(\mu = 19; \quad \sigma^2 = 9)$ olan normal dağılımın 10 birimlik tesadüfî örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_{10}$ olsun. μ'nün iki yansız tahmin edicisi sırası ile $\hat{\mu}_1 = \bar{Y}$ ve $\hat{\mu}_2 = \frac{Enk(Y_1,\cdots,Y_{10}) + \bar{Y} + Enb(Y_1,\cdots,Y_{10})}{3}$ ise $\hat{\mu}_1$'in $\hat{\mu}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇS-17: Tahmin edici (5P), yansızlık (5P), tutarlılık (5P) ve önem seviyesi (5P) kavramlarını açıklayınız.

ÇS-18: Olasılık fonksiyonu, $f(y) = (e^{-\alpha}\alpha^y)(y!)^{-1}, \; y = 0, 1, \cdots$ olan bir Poisson dağılımın 8 birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_8$ olsun.α'nın iki yansız tahmin edicisi $\hat{\alpha}_1 = \bar{Y}$ ve $\hat{\alpha}_2 = [Enk\ (Y_1, \cdots, Y_8) + Y_4 + Enb\ (Y_1, \cdots, Y_8)]/3$ olsun. $\hat{\alpha}_1$'in $\hat{\alpha}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇS-19: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ olan bir normal dağılımın 10 birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_{10}$ olsun. μ'nün iki yansız tahmin edicisi $\hat{\mu}_1 = \bar{Y}$ ve $\hat{\mu}_2 = [Enb(Y_1, \cdots, Y_{10}) + Y_5 + Enk\ (Y_1, \cdots, Y_{10})]/3$ olsun. $\hat{\mu}_1$'in $\hat{\mu}_2$'ye nispi etkinliğini bulunuz ve sonucu yorumlayınız.

ÇS-20: Olasılık fonksiyonu, $f(y) = (e^{-\lambda}\lambda^y)(y!)^{-1}, y = 0,1,2, \cdots$ olan bir Poisson dağılımın n birimlik tesadüfî bir örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\lambda} = \bar{Y}$ şeklinde tanımlanan tahmin edicinin λ için; yansız (6P), tutarlı (6P) ve yeterli (8P) olduğunu gösteriniz.

ÇS-21: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = \beta^{-2} y e^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gamma dağılımının 20 birimlik tesadüfî örnekleminin gözlem değerleri: 2(3); 3; 4(2); 5; 6; 7; 8(2); 9; 10; 13; 14; 17; 18; 24; 25 ve 30 olsun. β'nın moment tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇS-22: Olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(y) = 3\beta^{-3} y^2 e^{-(y/\beta)^3}, y > 0$ olan bir Weibull dağılımının 20 birimlik tesadüfî bir örnekleminin gözlem değerleri: 3; 5(3); 6(2); 7(2); 8(6); 9; 10(2); 11; 12 ve 13 olsun. β'nın en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇS-23: Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y) = \beta^{-1}e^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir üstel dağılımının n birimlik tesadüfi örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\beta} = \bar{Y}$ tahmin edicisinin β için: (a) Yansız, (b) tutarlı, (c) etkin ve (d) yeterli olduğunu gösteriniz.

ÇS-24: Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y) = \beta^{-2}ye^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gamma dağılımının 20 birimlik tesadüfi örneklemine ilişkin gözlem değerleri; 2(2); 3; 5; 6; 7; 8; 9(2); 11; 18(3); 19; 21; 23; 25; 28; 32 ve 40 olsun. β'nın moment tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇS-25: Olasılık fonksiyonu, $f(y) = \left(e^{-\lambda}\lambda^{y}\right)(y!)^{-1},\ y = 0; 1;\ \cdots$ olan bir Poisson dağılımın n birimlik tesadüfi örneklemi, $Y_1, \cdots, Y_n$ olsun. $\hat{\lambda} = \bar{Y}$ tahmin edicisinin λ için: (a) Yansız, (b) tutarlı, (c) etkin ve (d) yeterli olduğunu gösteriniz.

ÇS-26: Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y) = \beta^{-2}ye^{-y/\beta}, y > 0$ olan bir gamma dağılımının 20 birimlik tesadüfî örneklemine ilişkin gözlem değerleri; 1; 2; 3(2); 4; 5(3); 6(2); 7(3); 11(2); 14(2); 15; 17 ve 21 olsun. β'nın moment tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.

ÇS-27: Olasılık fonksiyonu $f(y) = \binom{3}{y} p^{y}(1-p)^{3-y}, y = 0; 1; 2; 3$ olan bir binom dağılımının 20 birimlik tesadüfi örneklemine ilişkin gözlem değerleri; 0; 1(6); 2(9) ve 3(4) olsun. p'nin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz ve tahmin ediniz.