V. BÖLÜM

OLASILIK

V.1 Giriş

Olasılık ve istatistik bir birleri ile son derce ilişkilidir. Yani bir birlerinin olmazsa olmaz iki tamamalayıcı parçalarıdır. Esas olarak olasılık, örneklem bilgisini kullanarak kitleyi betimlemek veya istatistiksel analizler yapmak için araştırmacıya yol gösteren bir araçtır.

V.2 Örnek Uzayı ve Olay

Veriler hem laboratuvardaki kontrollü deneyler ile veya doğadaki kontrolsüz olayların gözlemlenmesi sonucu elde edilirler. İstatistiğin konusu bu ikinci tip olaylardan oluşur.

Genel anlamda bir gözlemin veya ölçümün elde edilmesi işlemine deney denir. Değişmeyen şartlar altında farklı sonuçlar veren deneylere tesadüfi deney adı verilir. Olasılığın konusu tesadüfi deneylerdir.

V.2.1 Örnek Uzayı: Bir tesadüfi deney sonucunda karşılaşılması düşünülen mümkün tüm sonuçların oluşturduğu evrensel kümeye örnek uzayı denir ve S ile gösterilir.

✓ Bir örnek uzayı, elemanları sayılabilir çoklukta ise sonlu, elemanları doğal sayılar kümesi (N) ile bire-bir eşlenebilirse sayılabilir olarak sonsuz ve bu iki durum dışında ise sayılamaz örnek uzayı adını alır.

♦ **Örnek:** Hilesiz bir madeni paranın bir kez atılması tesadüfi deneyine ilişkin üste gelen yüzlerin oluşturduğu örnek uzayını yazınız.

♦ **Çözüm:** Tesadüfi deneye ilişkin iki mümkün sonuç vardır. Bunlar yazı (Y) ve tura (T)'dir. Böylece örnek uzayı, $S = \{Y, T\}$ olarak ifade edilir.

♦ **Örnek:** Hilesiz altı noktalı yüzlü oyun zarının bir kez atılması tesadüfi deneyine ilişkin üste gelen yüzlerin noktalar sayısının oluşturduğu örnek uzayını yazınız.

♦ **Çözüm:** Zarın üste gelen noktalarını bir sayı ile gösterirsek tesadüfi deneye ilişkin altı mümkün sonuç olup örnek uzayı, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olarak yazılır.

V.2.2 Olay: Örnek uzayının her alt kümesine bir olay denir ve O_i ile gösterilir.

✓ Ayrıştırılamaz ve sadece bir elemandan oluşan alt kümeye basit, birden fazla elemandan oluşan alt kümeye ise birleşik olay adı verilir.

♦ **Örnek:** Hilesiz bir madeni paranın bir kez atılması tesadüfi deneyine ilişkin üste gelen yüzlerin oluşturduğu mümkün bütün olayları belirleyiniz.

♦ **Çözüm:** Tesadüfi deneye ilişkin basit olaylar: $O_1 = \{Y\}$, $O_2 = \{T\}$ ve $O_3 = \emptyset = \{\ \ \}$ olayına aynı zamanda imkansız olay da denir. Birleşik olay ise, $O_4 = S = \{Y, T\}$ olup bu olaya da kesin olay denir.

✓ **Not:** Hiç elemanı olmayan kümeye imkansız, elemanları örnek uzayına eşit olan küme de kesin olay adı verilir.

♦ **Örnek:** Hilesiz iki madeni paranın (veya hilesiz bir madeni paranın iki kez) aynı anda atılması tesadüfi deneyine ilişkin üste gelen yüzlerin oluşturduğu örnek uzayını ve mümkün basit olayları belirleyiniz.

♦ **Çözüm:** Tesadüfi deneye ilişkin örnek uzayı, $S = \{YY, YT, TY, TT\}$ ile verilir. Basit olaylar: $O_1 = \{YY\}$, $O_2 = \{YT\}$ ve $O_3 = \{TY\}$, $O_4 = \{TT\}$ ve $O_5 = \emptyset = \{\ \}$ ile verilir. Başka olaylar da tanımlanabilir. Şöyleki, ilk atş yazı gelmesi olayı, $O_6 = \{YY, YT\}$ olayı ise birleşik bir olaydır.

V.3 Bir Olayın Olasılığı

Bir tesadüfi deney sonucunda karşılaşılabilir her basit olayın ortaya çıkma şansı eşit olsun. Eşit olasılıklı olaylardan oluşan böylesi bir örnek uzayında bümkün bütün sonuçlar sayısı, $n(S)$ ve ilgilenilen O_i olayına ilişkin birim sayısı, (nO_i) ise O_i olayının ortaya çıkma olasılığı, $P(O_i)$ ile gösterilir ve bu olasılık, $P(O_i) = n(O_i)/n(S)$ eşitliği ile hesaplanır.

V.3.1 Özellikler

1) Her O_i olayı için $0 \leq P(O_i) \leq 1$ sağlanır.
2) $P(O_i) = 0$ (imkansız olayın olasılığı sıfırdır). $P(S) = 1$ (kesin olayın olasılığı birdir).
3) Bir A olayının olasılığı, A olayını meydana getiren basit olayların olasılıkları toplamına eşittir.

V.3.2 Ayrık Olay

A ile B gibi iki olayın birlikte ortaya çıkması mümkün değil ise böylesi olaylara karşılıklı ayrık olaylar denir.

♦ **Örnek:** Hilesiz altı yüzlü bir oyun zarının bir kez atılması tesadüfi deneyine ilişkin A olayı, $A = \{\text{ Üste gelen tek noktalı sayılar }\}$ ve B olayı da $B = \{\text{ Üste gelen çift noktalı sayılar }\}$ olarak tanımlansın. A ve B olaylarının olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** Tesadüfi deneye ilişkin örnek uzayı, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ile verilir. Tanımlanan birleşik olaylar sırası ile $A = \{1, 3, 5\}$ ve $B = \{2, 4, 6\}$ ile verilir. Böylece sözkonusu olayların olasılıkları, $P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = 0.5$ ve $P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 0.5$ bulunur. Aynı olasılıklar birleşik olayları meydana getiren basit olayların toplamı ile de bulunabilir. Şöyleki $P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$ ve $P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$ bulunur.

♦ **Örnek:** Hilesiz iki madeni paranın (veya hilesiz bir madeni paranın iki kez) aynı anda atılması tesadüfi deneyinde tam bir tane tura gelmesi olasılığını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** Tesadüfi deneye ilişkin basit olayları belirleyelim.

Basit Olaylar	Birinci Para (Birinci Atış)	İkinci Para (İkinci Atış)	$P(O_i)$
O_1	Y	Y	$1/4$
O_2	Y	T	$1/4$
O_3	T	Y	$1/4$
O_4	T	T	$1/4$

Olaya ilişkin küme A ile gösterilirse bu küme, $A = \{ YT, TY \}$ ile ifade edilir. Öyle ise tam bir tane tura gelmesi olasılığı, $P(A) = P(O_1) + P(O_2) = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$ bulunur.

♦ **Örnek:** Hilesiz altı yüzlü bir oyun zarının bir kez atılması tesadüfi deneyine ilişkin aşağıdaki tanımlanan olayları liste biçiminde göstererek olasılıklarını hesaplayınız.

a) $A = \{$ İki noktalı yüzün gelmesi$\}$,

b) $B = \{$ Tek sayılı noktalı yüzlerden birinin gelmesi $\}$,

c) $C = \{$ Dört noktalı yüzden küçük yüzün gelmesi$\}$,

d) $D = \{$ A ve B olaylarının birlikte gelmesi$\}$,

e) $E = \{$ A veya B veya ikisinin birlikte gelmesi$\}$ ve

f) $F = \{$ A ve C olaylarının birlikte gelmesi$\}$

♦ **Çözüm:**

a) $A = \{ 2\}$ olup olasılığı, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$’dır

b) $B = \{1, 3, 5\}$ olup olasılığı, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$’dir

c) $C = \{1, 2, 3\}$ olup olasılığı, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{2}$’dir

d) $D = A \cap B = \emptyset = \{ \quad \}$ olup olasılığı, $P(D) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0$’dır

e) $E = A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ olup olasılığı, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{3}$’dür

f) $F = A \cap C = \{ 2\}$ olup olasılığı, $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{1}{6}$’dır.

♦ **Örnek:** O_1, O_2, O_3, O_4 ve O_5 basit olaylarından oluşan bir örnek uzayı S olsun. Eğer $P(O_3) = 0.4$, $P(O_4) = 2P(O_5)$ ve $P(O_1) = P(O_2) = 0.15$ ise O_4 ve O_5 olaylarının olasılığını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** $S = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$ ise $P(S) = 1$'dir (kesin olay olduğu için). Böylece $P(S) = P(O_1) + P(O_2) + P(O_3) + P(O_4) + P(O_5)$ yazılabilir. Buradan $1 = 0.15 + 0.15 + 0.4 + P(O_4) + P(O_5) => P(O_4) + P(O_5) + 0.7 = 1 => P(O_4) + P(O_5) = 0.3$ ve $P(O_4) = 2P(O_5)$ olduğundan $3P(O_5) = 0.3$ yazılır. Buradan $P(O_5) = 0.1$ ve $P(O_4) = 2P(O_5) = 2(0.1) = 0.2$ bulunur.

♦ **Örnek:** $O_{1,\ldots,}\, O_{10}$ basit olaylarından oluşan bir örnek uzayı S düşünülsün. Eğer $P(O_1) = 3P(O_2) = 0.45$ ve geri kalan sekiz basit olay eşit olasılığa sahip ise bu basit olayların olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** Verilenlerden $P(O_1) = 0.45$ **ve** $P(O_2) = 0.15$ oldukları açıktır. $P(S) = P(O_1) + \cdots + P(O_{10})$ olduğundan $1 = 0.45 + 0.15 + P(O_3) + \cdots + P(O_{10}) => P(O_3) + \cdots + P(O_{10}) + 0.6 = 1 => P(O_3) + \cdots + P(O_{10}) = 0.4$ sekiz eşit parçaya bölüneceğinden her bir olayın olasılığı 0.05 bulunur. Yani, $P(O_3) = \cdots = P(O_{10}) = 0.05$ yazılır.

V.4 Birleşik Olaylar ve Toplama Kuralı

V.4.1 Birleşik Olaylar

A ve B aynı örnek uzayında iki olay olsun.

a) $A \cup B$: A veya B diye okunur. İster A'daki ve isterse B'deki veya isterse ikisinde birden olması olayıdır.

b) $A \cap B$: A ve B diye okunur. Hem A'da ve hem B'de birlikte olması olayıdır.

c) $\bar{A}$: A tümleyen diye okunur. Sonuçları örnek uzayı, S'de ancak A'da olmayan olaydır. $\bar{A} = S \setminus A$ ile gösterilir.

V.4.2 Toplama Kuralı

Eğer A ve B aynı örnek uzayında iki olay ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ yazılabilir. Eğer A ve B karşılıklı ayrık olaylar ise aynı eşitlik, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ şeklinde yazılır.

♦ **Örnek:** Hilesiz altı noktalı bir oyun zarı bir kez atılıyor. Üşte gelen nokalar sayısının çift veya dörtten büyük olması olasılığını toplama kuralı ile hesaplayınız.

♦ **Cözüm:** Deneye ilişkin örnek uzayı, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$'dır. Üste gelen noktaların çift sayı olması olayı, $A = \{2, 4, 6\}$ ve dörtten büyük olması olayı da $B = \{5, 6\}$ ile gösterilsin. Buradan $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ bulunur.

V.5 Şartlı Olasılık, Çarpım Kuralı ve Bağımsızlık

V.5.1 Şartlı Olasılık

Eğer A ve B aynı örnek uzayında iki olay ise A olayı biliniyorken (veya verilmişken) B olayının şartlı olasılığı $P(B\ /\ A)$ ile gösterilir ve $P(B\ /\ A) = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(A)/n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ eşitliği ile hesaplanır. Benzer şekilde ise B olayı biliniyorken (veya verilmişken) A olayının şartlı olasılığı $P(A\ /\ B)$ ile gösterilir ve $P(A\ /\ B) = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ eşitliği ile hesaplanır.

V.5.2 Bağımsızlık ve Çarpım Kuralı

Bağımsızlık: A ve B aynı örnek uzayında iki olay olsun. Eğer birinin meydana gelmesinin diğerinin meydana gelmesinin olasılığına bir etkisi olmuyorsa A ve B olaylarına bağımsız olaylar denir. Eğer A ve B bağımsız ise $P(B\ /\ A) = P(B)$ veya $P(A\ /\ B) = P(A)$'dır. Bu sonuç çarpım kuralının bir sadeleşmişidir. Çünkü buradan $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ yazılabilir. Bu sonuç ikiden fazla ve hepsinin birlikte bağımsız olduğu olaylara da genelleştirilebilir. Örneğin; A, B ve C bağımsız olaylar ise $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ yazılabilir.

♦ **Örnek:** Hilesiz iki madeni paranın (veya hilesiz bir madeni paranın iki kez) aynı anda atılması tesadüfi deneyinde A olayı, $A = \{\text{En az bir tura gelmesi}\}$ ve B olayı da $B = \{\text{En az bir yazı gelmesi }\}$ şeklinde tanımlansın. a) A, B, $A \cup B$ ve $A \cap B$ olaylarını liste biçiminde gösteriniz, b) $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ ve $P(A \cap B)$ olasılıklarını hesaplayınız. c) A ve B olayları ayrık mıdır ve bağımsız mıdır.

♦ **Çözüm:** a) Deneye ilişkin örnek uzayı, $S = \{YY, YT, TY, TT\}$ olup $A = \{YT, TY, TT\}$, $B = \{\text{YY, YT, TY}\}$, $A \cup B = S = \{YY, YT, TY, TT\}$ ve $A \cap B = \{YT, TY\}$ yazılır. b) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$, $P(A \cup B) = P(S) = 1$ veya $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1$ ve $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ bulunur. c) $A \cap B = \{YT, TY\} \neq \emptyset$ olduğundan A ile B olayları ayrık değildir. A ile B olayları bağımsızdır $<=> P(A \cap B) = P(A)P(B) => \frac{1}{2} \neq \frac{9}{16}$ olduğundan A ile B olayları bağımlıdır.

V. 6 Beşimci Bölüm ile İlgili Çalışma Soruları

♦ **Uygulama-1:** Bir tesadüfi deneyin eşit olasılıklı beş basit olayı; O_1, O_2, O_3, O_4 ve O_5 olsun. $A = \{O_1, O_3\}$, $B = \{O_1, O_2, O_4, O_5\}$ ve $C = \{O_3, O_4\}$ olayları tanımlansın. a) $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $\overline{A \cap B}$, ve $\bar{A} \cap \bar{B}$ olaylarını liste biçiminde yazınız. b) a) şıkkında tanımlı olayların ve $P(B\ /\ C)$, $P(A\ /\ B)$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-1:** a) $\bar{A} = \{O_2, O_4, O_5\}$, $\bar{B} = \{\ O_3\}$, $A \cap B = \{O_1\}$, $A \cap C = \{O_3\}$, $B \cap C = \{O_4\}$, $A \cup B = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\} = S$, $A \cup C = \{O_1, O_3, O_4\}$, $A \cup B \cup C = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\} = S$,

$\overline{A \cap B} = \{O_2, O_3, O_4, O_5\}$, ve $\bar{A} \cap \bar{B} = \{O_2, O_4, O_5\} \cap \{O_3\} = \emptyset$ yazılır. b) $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(S)} = \frac{3}{5}$, $P(\bar{B}) = \frac{n(\bar{B})}{n(S)} = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{1}{5}$, $P(A \cap C) = \frac{n(A\cap C)}{n(S)} = \frac{1}{5}$, $P(B \cap C) = \frac{n(B\cap C)}{n(S)} = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = P(S) = 1$, $P(A \cup C) = \frac{n(A\cup C)}{n(S)} = \frac{3}{5}$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{n(A\cup B\cup C)}{n(S)} = P(S) = 1$, $P(\overline{A \cap B}) = \frac{n(\overline{A\cap B})}{n(S)} = \frac{4}{5}$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{n(\bar{A}\cap\bar{B})}{n(S)} = P(\emptyset) = 0$, $P(B\ /\ C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}$ ve $P(A\ /\ B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$ bulunur.

♦ **Uygulama-2:** Tümleyen işleminin özellikleri yardımı ile Uygulama-1'deki $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(\overline{A \cap B})$ ve $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-2:** $P(A) + P(\bar{A}) = P(S) = 1$ ve $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ bulunur. $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ ve $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$ bulunur.

♦ **Uygulama-3:** Toplama ve çarpım kurallarını kullanarak Uygulama-1'de verilen $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ ve $P(B \cap C)$ olsılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-3:** Toplama kuralı gereğince $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 1$, $P(A \cap B) = P(A\ /\ B)P(B) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}$ veya $P(A \cap B) = P(B\ /\ A)P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$ bulunur. $P(B \cap C) = P(B\ /\ C)P(C) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$ veya $P(B \cap C) = P(C\ /\ B)P(B) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}$ bulunur.

♦ **Uygulama-4:** Uygulama-1'de verilen A ve B olayları; a) ayrık mıdır, b) bağımsız mıdır, gösteriniz.

♦ **Çözüm-4:** a) A ve B olayları ayrıktır <=> $(A \cap B) = \emptyset$ olmalı. Oysa ki $(A \cap B) \neq \emptyset$ olduğundan ayrık değildir. b) A ve B olayları bağımsızdır <=> ya $P(A\ /\ B) = P(A)$ ya da $P(B\ /\ A) = P(B)$ eşitlikleri sağlanmalıdır. Halbuki $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{5}$ veya $\frac{1}{2} \neq \frac{4}{5}$ oldukları açıktır. Öyle ise A ile B olayları bağımlıdır.

♦ **Uygulama-5:** Hilesiz altı noktal yüzlü bir oyun zarı atılması tesadüfi deneyi ile ilgili olaylar; $A = \{\text{Dörtten az noktalı sayılar}\}$, $B = \{\text{İkiye eşit ve daha az noktalı sayılar}\}$ ve $C = \{\text{Üçten büyük noktalı sayılar}\}$ tanımlanıyor. a) Örnek uzayını, b) A, B ve C olaylarını, c) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ ve $A \cap B \cap C$ olaylarını, d) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ ve $A \cup B \cup C$ olaylarını liste biçiminde yazarak olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-5:** a) Deneye ilişkin örnek uzayı, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olup $P(S) = 1$'dir. b) $A = \{1, 2, 3\}$ olup $P(A) = \frac{1}{2}$, $B = \{1, 2\}$ olup $P(B) = \frac{1}{3}$ ve $C = \{4, 5, 6\}$ olup $P(C) = \frac{1}{2}$ bulunur. c) $A \cap B = \{1, 2\}$ olup $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $A \cap C = \emptyset$ olup $P(\emptyset) = 0$, $B \cap C = \emptyset$ olup $P(\emptyset) = 0$ ve $A \cap B \cap C = \emptyset$ olup $P(\emptyset) = 0$'dır. d) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ olup $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ olup $P(S) = 1$, $B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ olup $P(B \cup C) = \frac{5}{6}$ ve $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ olup $P(S) = 1$ bulunur.

♦ **Uygulama-6:** Uygulama-5'de tanımlanan olaylar ile ilgili; a) A ile B olayları bağımsız mı, ayrık mı, gösteriniz, b) A ile C olayları bağımsız mı, ayrık mı, gösteriniz.

♦ **Çözüm-6:** a) $P(A) = P(A\,/\,B) \;=>\; \frac{1}{2} \neq 1$ olduğundan bağımlıdırlar ve $A \cap B = \{1, 2\} \neq \emptyset$ olduğundan ayrık da değiller. b) $P(A) = P(A\,/\,C) \;=>\; \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan bağımlıdırlar ve $A \cap C = \{\quad\} = \emptyset$ olduğundan ayrık olaylardır.

♦ **Uygulama-7:** Hilesiz altı noktalı yüzlü iki oyun zarı bir kez (ya da bir tanesi iki kez) atılması tesadüfi deneyine ilişkin olaylar; $A = \{\text{Üste gelen noktalı yüzler toplamının yediden büyük olması}\}$, $B = \{\text{Üste gelen noktalı yüzler toplamının çift sayı olması}\}$, $B = \{\text{Üste gelen noktalı yüzler toplamının tek sayı olması}\}$ ve $D = \{\text{Üste gelen noktalı yüzler toplamının 11'den küçük olması}\}$ tanımlansın. a) Eğer varsa hangi iki olay ayrıktır, b) Toplama kuralını kullanarak; $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$ ve $P(B \cup C)$ olasılıklarını hesaplayınız, c) Verilen olaylara ilaveten $E = \{\text{Üste gelen noktalı yüzler toplamının dörtten küçük sayı olması}\}$ ve $F = \{(3;3)\}$ olayları tanımlandığında $P(A \cup E \cup F)$ olsılığını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-7:** Örnek uzayını belirleyelim.

Birinci Zar↓	**İkinci Zar**					
	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3, 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Böylece örnek uzayı, $S = \{(1; 1), \cdots, (6; 6)\ \}$ olup 36 elamandan oluşmaktadır. a) Önce tanımlanan olayları liste biçiminde ifade edelim. A ={(2; 6), (3; 5), (3; 6), (4; 4),(4;5), (4; 6), (5;3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)}, B ={(1; 1), (1; 3), (1; 5), (2; 2),(2;4), (2; 6), (3;1), (3; 3), (3; 5), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (5; 1), (5; 3), (5; 5), (6; 2), (6; 4), (6; 6)}, C ={(1; 2), (1; 4), (1; 6), (2; 1),(2;3), (2; 5), (3;2), (3; 4), (3; 6), (4; 1), (4; 3), (4; 5), (5; 2), (5; 4), (5; 6), (6; 1), (6; 3), (6; 5)}, D ={(1;1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3;2), (3;3), (3; 4), (3;5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (6; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4)} yazılır. a) $B \cap C = \emptyset$ olduğundan B ile C kümeleri ayrıktır. b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{36} + \frac{18}{36} - \frac{8}{36} = \frac{25}{36}$, $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{15}{36} + \frac{18}{36} - \frac{6}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$, $P(B \cup C) = P(A) + P(B) = \frac{18}{36} + \frac{18}{36} = 1$ (ayrık oldukları için). c) $P(A \cup E \cup F) = P(A) + P(E) + P(F) = \frac{15}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{19}{36}$ bulunur (ayrık olay oldukları için).

♦ **Uygulama-8:** Uygulama-7'deki tesadüfi deneyle ilgili aşağıdaki şartlar altında üste gelen noktalar toplamının 10 veya daha büyük sayı olması olasılıklarını hesaplayınız. a) Birinci zar beş gelmişse, b) Zarlardan biri beş gelmişse.

♦ **Çözüm-8:** a) Birinci zarın beş gelmesi halinde sonuçların oluşturduğu örnek uzayı altı elemanlı ve $S = \{(5;1),(5;5),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)\}$ yazılır. Buradan $A = \{\text{Toplam 10 veya daha fazla}\} = \{(5;5),(5;6)\} => P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$ veya $S = \{(1;1),\cdots,(6;6)\}$, $A = \{(5;1),(5;5),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)\}$ ve $B = \{(5;5),(5;6)\}$ olsun. Böylece $P(B\,/\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{1}{3}$ olduğu açıktır. b) Zarlardan birinin 5 gelmesi halinde sonuçların oluşturduğu örnek uzayı 11 elemanlı ve $S = \{(1;5),(2;5),(3;5),(4;5),(5;1),(5;5),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),(6;5)\}$ olup $A = \{\text{Toplam 10 veya daha fazla}\} = \{(5;5),(5;6),(6;5)\} => P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{11}$ veya $S = \{(1;1),\cdots,(6;6)\}$, $A = \{(1;5),(2;5),(3;5),(4;5),(5;1),(5;5),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),(6;5)\}$ olup $B = \{(5;5),(5;6),(6;5)\}$ olsun $P(B\,/\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/36}{11/36} = \frac{3}{11}$ ollur.

♦ **Uygulama-9:** Bir okulun öğrencilerinin %25'i matematikten, %15 kimyadan ve %10'u da hem matematik ve hem de kimya dersinden başarısızdır. Tesadüfi olarak seçilen bir öğrencinin; a) Kimyadan başarısız ise matematikten de başarısız olması, b) matematikten başarısız ise kimyadan da başarısız olması ve c) kimyadan veya matematikten başarısız olması olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-9:** $P(K) = 0.15$, $P(M) = 0.25$ ve $P(K \cap M) = 0.10$ olduğuna göre a) $P(M\,/\,K) = \frac{P(K \cap M)}{P(K)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3}$, b) $P(K\,/\,M) = \frac{P(K \cap M)}{P(M)} = \frac{0.10}{0.25} = \%40$ ve c) $P(M \cup K) = P(K) + P(M) - P(K \cap M) = 0.15 + 0.40 - 0.10 = \%30$ Bulunur.

♦ **Uygulama-10:** Bir sınıfta 10 erkek, 20 kız öğrenci vardır. Erkeklerin yarısı ve kızların da yarısı siyah gözlüdür. Tesadüfi olark seçilen bir öğrencinin erkek ve siyah gözlü olma olasılığını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-10:** $A = \{\text{Öğrenci erkektir}\}$, $B = \{\text{Öğrenci siyah gözlüdür}\}$ $=>$ $A \cup B = \{\text{Öğrenci erkek veya siyah gözlüdür}\}$ olayları tanımlansın. $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} => P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}$ bulunur.

♦ **Uygulama-11:** A ve B aynı örnek uzayında iki olay olsun. $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ ve $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ verildiğine göre aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız. a) $P(A \cup B)$, b) $P(\bar{A})$ ve $P(\bar{B})$, c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, d) $P(\overline{A \cap B})$, e) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ ve f) $P(\bar{A} \cap B)$ olsılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-11:** a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$, b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{8}$ ve $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$, c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ (De Norgan Kuralı), d) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \%75$, e) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \%75$ (De Morgan Kuralı) ve f) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \%25$ bulunur.