VI. BÖLÜM

TESADÜFİ DEĞİŞKENLER VE FONKSİYONLARI

VI.1 Tesadüfi Değişken ve Çeşitleri

VI.1.1 Tesadüfi Değişken

S örnek uzayının her bir basit olayını yalnız bir gerçek değere dönüştüren X fonksiyonuna tesadüfi değişken denir ve bu fonksiyon, $X: S \to A \subset R$ ile ifade edilir.

Tesadüfi değişkenler $X, Y, \cdots$ gibi büyük harflerle ve bunların almış oldukları değerler ise $x, y, \cdots$ gibi küçük harflerle gösterilir.

VI.1.2 Tesadüfi Değişken Çeşitleri

Örnek uzayından reel sayılara tanımlanan bir fonksiyon olan tesadüfi değişken, aldığı sayısal değerlere göre iki farklı şekilde olabilir.

X tesadüfi değişkeni (t. d.) R'deki değer kümesi olan A sayılabilir veya sayılabilir olarak sonsuz bir küme ise X'e kesikli t. d. denir. X t. d.'nin R'deki değer kümesi A, sayılamaz bir küme ise X'e sürekli t. d. denir.

VI.2 Tesadüfi Değişkenlerin Fonksiyonları

Örnek uzayında tanımlanan her olay, X t. d. cinsinden yazılabildiğine göre ilgilenilen tüm olasılıklar X'e bağlı bir fonksiyonun kullanılması ile kolay bir şekilde hesaplanabilir.

X kesikli bir t. d. ve bunun değer kümesi, $A = \{x_i : \text{İ} = 1, 2, \cdots\}$ olsun.

$$p(x) = P(X = x_i) = \begin{cases} p(x_i), \ \forall\, x_i \in A \text{ için} \\ 0, \ \text{diğer durumlarda (yani; } x_i \notin A) \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan fonksiyona olasılık fonksiyonu denir.

♦ **Örnek:** İki hilesiz madeni paranın birlikte (veya bir hilesiz madeni paranın iki kez) atılması deneyinde X, üste gelen tura sayısını göstersin. Bu tesadüfi deneye ilişkin olasılık fonksiyonunu yazınız.

♦ **Çözüm:**Deneye ilişkin örnek uzayı, $S = \{YY, YT, TY, TT\}$ yazılır. $X(YY) = 0$, $X(YT) = X(TY) = 1$ ve $X(TT) = 2$ olup X'in değer kümesi, $A = \{0, 1, 2\}$ yazılabilir. Böylece X'in olasılık fonksiyonu (o.f.),

$X = x_i$	0	1	2	Toplam
$P(X = x_i) = p(x_i)$	1/4	1/2	1/4	1.00

yazılır.

♦ X, değer kümesi A olan sürekli bir t. d. iken $\forall\, A_i = (a, b) \subset A$ için $P\{X \in A_i\} = \int_a^b f(x)dx$ özelliğini sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

VI.2.1 Olasılık/ Yoğunluk Fonksiyonunun Özellikleri

Özellik No	X kesikli t. d. ise	X sürekli t. d. ise
1	$p(x_i) \geq 0, \forall x_i$ için (pozitif tanımlılık özelliği)	$f(x) \geq 0, \forall A_i = (a,b)$ için
2	$\sum_{x_i \in A} p(x_i) = 1$	$\int_a^b f(x)dx = 1$

♦ **Örnek:** X t. d.'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f),

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, \quad - - - \end{cases}$$

verisin.a) $f(x)$'in o.y.f. olduğunu gösteriniz, b) X'in $1/2$'den küçük olması olasılığını gösteriniz.

♦ **Çözüm:** a) i) Alt limit: o iken $f(0) = 2(0) = 0 \geq 0$ ve üst limit:1 iken $f(1) = 2(2) = 2 \geq 0$ olup tanım bölgesinde pozitif tanımlı olduğu açıktır. ii) Tanım bölgesinde alan bire eşit olalıdır. Yanı; $\int_0^1 f(x)dx = 1$ olmalı. Öyle ise $\int_0^1 2xdx = x^2|_0^1 = 1$ bulunur. Böylece $f(x)$ o.y.f.'dur. b) $P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} 2xdx = x^2|_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4 = \%25$ bulunur.

♦ **Örnek:** X t. d.'nin o. f.,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{15}, x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, \quad - - - \end{cases}$$

verilsin. $A = \{x: x \geq 2\}$, $B = \{x: 1 < x\}$ ve $C = \left\{x: \frac{3}{2} < x \leq 3\right\}$ olayları tanımlanmış ise a) $P(A \cap B)$, b) $P(\bar{C})$, c) $P(B \cup C)$, d) $P(B \ / \ C)$ ve e) $P\{(A \cup C) \ / \ B\}$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** a) $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$ olup $P(A \cap B) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$, b) $C = \{2, 3\}$ olup $\bar{C} = \{1, 4, 5\}$ => $P(\bar{C}) = \frac{1}{15}(1 + 4 + 5) = \frac{2}{3}$, c) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$ => $P(B \cup C) = \frac{1}{15}(2 + 3 + 4 + 5) = \frac{14}{15}$, d) $P(B \ / \ C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{15}(2+3)}{\frac{1}{15}(2+3)} = 1$ e) $A \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$ => $(A \cup C) \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$ => $P\{(A \cup C) \ / \ B\} = \frac{\frac{1}{15}(2+3+4+5)}{\frac{1}{15}(2+3+4+5)} = 1$ bulunur.

♦ **Örnek:** X t. d.'nin o. y. f.,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 < x < 1 \\ 0, - - - \end{cases}$$

verilsin. $A = \left\{x: \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}\right\}$, $B = \left\{x: x > \frac{2}{5}\right\}$ ve $C = \left\{x: x \leq \frac{1}{2}\right\}$ olayları tanımlanmış ise a) $P(A \cup B)$, b) $P(B \cap C)$, c) $P\{(\bar{B} \cap A) \ / \ C\}$ ve d) $P\{B \ / \ (A \cup C)\}$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** a) $A \cup B = \left(x: \frac{2}{5} < x < 1\right)$ => $P(A \cup B) = \int_{2/5}^{1} 3x^2 dx = x^3|_{2/5}^{1} = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}$, b) $B \cap C = \left\{x: \frac{2}{5} < x \leq \frac{1}{2}\right\}$ => $P(B \cap C) = \int_{2/5}^{1/2} 3x^2 dx = x^3|_{2/5}^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{8}{125} = \frac{61}{1000}$, c) $\bar{B} = \left\{x: 0 < x \leq \frac{2}{5}\right\} => \bar{B} \cap A = \emptyset => (\bar{B} \cap A) \cap C = \emptyset => P\{(\bar{B} \cap A) \ / \ C\} = \frac{P(\emptyset)}{P(C)} = \frac{0}{P(C)} = 0$ ve d) $A \cup C = \left\{x: 0 < x < \frac{3}{4}\right\}$ => $P(A \cup C) = \int_{0}^{3/4} 3x^2 dx = x^3|_{0}^{3/4} = \frac{27}{64}$, $(A \cup C) \cap B = \left\{x: \frac{2}{5} < x < \frac{3}{4}\right\}$ => $P\{(A \cup C) \cap B\} = \int_{2/5}^{3/4} 3x^2 dx = x^3|_{2/5}^{3/4} = \frac{27}{64} - \frac{8}{125} = \frac{2863}{8000}$ olup $P\{B \ / \ (A \cup C)\} = \frac{P\{B \cap (A \cup C)\}}{P(A \cup C)} = \frac{2863/8000}{27/64} = \frac{2863}{3375}$ bulunur.

VI.3 Bir Tesadüfi Değişkenin Ortalama ve Varyansı

VI.3.1 Bir Tesadüfi Değişkenin Ortalama

Bir X t. d.'nin ortalaması (veya beklenen değeri), $\mu_X = E(X)$ ile gösterilir ve

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \text{Eğer X kesikli ise } \sum_{x \in A} xp(x) \\ \text{Eğer X sürekli ise } \int xf(x)dx \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

♦ **Örnek:** Hilesiz bir madeni paranın iki kez (veya iki hilesiz madeni paranın bir kez) atılması tesadüfi deneyinde X üste gelen yazı sayısı iken X'in ortalamasını (beklenen değerini) hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** X'in o.f.,

$X = x_i$	0	1	2	Toplam
$P(X = x_i) = p(x_i)$	1/4	1/2	1/4	1.00

olduğuna göre X'in ortalaması, $\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{2} xp(x) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ bulunur. Bu sonucun anlamı ise deney bir defa yapıldığında üste bir yazı gelmesinin beklendiği anlamındadır.

♦ **Örnek:** X t.d.'nin o.y.f.,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 < x < 1 \\ 0, - - - \end{cases}$$

verilsin. X'in ortalamasını (beklenen değerini) hesaplayınız.

♦ **Çözğm:** $\mu_X = E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x(3x^2) \, dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$ bulunur.

VI.3.2 Bir Tesadüfi Değişkenin Varyans ve Standart Sapması

Bir X t. d.'nin varyansı, $\sigma_X^2 = V(X)$ ile gösterilir ve $\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliği ile hesaplanır. X'in standart sapması ise σ_X ile gösterilir ve varyansın pozitif kareköküdür. Yani; $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$'dir.

♦ **Örnek**: X t.d.'nin o.f.,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, x = 1, 2, 3 \\ 0, \quad\quad -- \end{cases}$$

ile verilsin. X'in; a) ortalamasını, b) varyansını ve standart sapmasını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** a) $\mu_X = E(X) = \sum_{x=1}^{3} xp(x) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{2}{6}\right) + 3\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$, b) $\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \;\; => \;\; E(X^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 p(x) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{2}{6}\right) + 3^2\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{36}{6} = 6$ ve böylece varyans, $V(X) = 6 - \left[\frac{7}{3}\right]^2 = \frac{5}{9}$ bulunur. Standart sapması ise $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5/9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ bulunur.

♦ **Örnek:** X t.d.'nin o.y.f.,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x, 0 < x < {}^{2}\!/_{3} \\ 0, --- \end{cases}$$

verilsin. X'in; a) ortalamasın, b) varyansını ve standart sapmasını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** a) $\mu_X = E(X) = \int_0^{2/3} xf(x)dx = \frac{9}{2}\int_0^1 x(x)\,dx = \frac{3}{2}x^3\Big|_0^{2/3} = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{9}$ bulunur. b) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \;\; => \;\; E(X^2) = \int_0^{2/3} x^2 f(x)dx = \frac{9}{2}\int_0^1 x^2(x)\,dx = \frac{9}{8}x^4\Big|_0^{2/3} = \frac{9}{8}\left(\frac{16}{81}\right) = \frac{2}{9}$ ve böylece varyans, $V(X) = \frac{2}{9} - \left[\frac{4}{9}\right]^2 = \frac{2}{81}$ bulunur. Standart sapması ise $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2/81} = \frac{\sqrt{2}}{9}$ bulunur.

♦ **Ödev-1:** X t.d.'nin o.f.,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{9}, x = 1, 3, 5 \\ 0, \quad\quad -- \end{cases}$$

ile verilsin. X'in; a) ortalamasını (C: $\mu_X = \frac{35}{9}$), b) varyansını (C: $V(X) = \frac{152}{81}$) ve standart sapmasını (C: $\sigma_X = \frac{\sqrt{152}}{9}$) hesaplayınız.

♦ **Ödev-2:** X t.d.'nin o.y.f.,

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), 0 < x < 1 \\ 0, - - - \end{cases}$$

verilsin. X'in; a) ortalamasın (C: $\mu_X = \frac{1}{2}$), b) varyansını (C: $V(X) = \frac{1}{20}$) ve standart sapmasını (C: $\sigma_X = \frac{1}{\sqrt{20}}$) hesaplayınız.

VI.4 Altıncı Bölüm Çalışma Soruları

♦ **Uygulama-1:** X t.d.'nin o.f.,

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	1/10	3/10	4/10	1/10	a	1/20

verilsin. a) $p(x)$'in o. f. olabilmesi için $p(4) = a$ olasılığını bulunuz, b) $P(X \leq 3)$, c) $P(X > 2)$, d) $P(2 \leq X < 5)$ ve e) $P(X > 2 \,/\, X \leq 3)$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-1:** a) $p(x)$'in o. f. olabilmesi için $\sum_{x=0}^{5} p(x) = 1$ olmadır. => $p(4) = a = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(5)] = 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{20}$ bulunur. b) $P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, c) $P(X > 2) = P(X \geq 3) = p(3) + p(4) + p(5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$, d) $P(2 \leq X < 5) = p(2) + p(3) + p(4) = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$ ve $P(X > 2 \,/\, X \leq 3) = \frac{P[(X>2)\cap(X\leq 3)]}{P(X\leq 3)} = \frac{p(3)}{1-[p(4)+p(5)]} = \frac{1/10}{9/10} = \frac{1}{9}$ bulunur.

♦ **Uygulama-2:** X t.d.'nin o.y.f.,

$$f(x) = \begin{cases} kx, 0 < x < 2 \\ 0, - - - \end{cases}$$

verilsin. a) $p(x)$'in o. f. olabilmesi için k sabiti ne olmalıdır, b)) $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$, c) $P\left(X \geq \frac{3}{4}\right)$, d) $P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right)$ ve e) $P\left(X < \frac{3}{2} \,/\, X > 1\right)$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm-2:** a) $\int_0^2 f(x)dx = 1$ olmalı. => $k\int_0^2 xdx = \frac{k}{2}x^2\Big|_0^2 = 1 => 2k = 1 => k = \frac{1}{2}$ bulunur. b) $P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$, c) $P\left(X \geq \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\int_{3/4}^{2} xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_{3/4}^{2} = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$, d) $P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_1^{3/2} xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^{3/2} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ ve e) $P\left(X < \frac{3}{2} \,/\, X > 1\right) = \frac{P\left[\left(X<\frac{3}{2}\right)\cap(X>1)\right]}{P(X>1)} = \frac{P\left(1<X<\frac{3}{2}\right)}{P(X>1)} = \frac{5/16}{3/4} = \frac{5}{12}$ bulunur.

♦ **Uygulama-3:** X t.d.'nin o.f.,

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	0.05	0.10	0.20	0.40	0.20	0.05

verilsin. μ_X, σ_X^2 ve σ_X değerlerini hesaplayınız.

♦ **Çözüm-3:** $\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{5} xp(x) = 2.75$, $E(X^2) = \sum_{x=0}^{5} x^2 p(x) = 8.95$ olup $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 8.95 - (2.75)^2 = 1.3875$ bulunur. Buradan $\sigma_X = \sqrt{1.3875} \cong 1.178$ bulunur.

♦ **Uygulama-4:** X t.d.'nin o.y.f.,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x-1), 3 < x < 7 \\ 0, - - - \end{cases}$$

ile verilsin. μ_X, σ_X^2 ve σ_X değerlerini hesaplayınız.

♦ **Çözüm-4:** $\mu_X = E(X) = \frac{1}{16}\int_3^7 x(x-1)dx = \frac{1}{16}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^7 = \frac{1}{16}\left(\frac{539}{6} - \frac{27}{6}\right) = \frac{512}{96} = \frac{16}{3}$, $E(X^2) = \frac{1}{16}\int_3^7 x^2(x-1)dx = \frac{89}{3}$ olup $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{89}{3} - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$ ve $\sigma_X = \frac{\sqrt{11}}{3}$ bulunur.