VII. BÖLÜM
BAZI ÖNAMLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

VII.1 Giriş

Ele alınan tesadüfi sistemle ilgili her türlü muhtemel değerleri veya beklenen özel davranış göstergelerini bulabilmek için tanımlanan tesadüfi değişkenin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinmesinin gerek ve yeterli olduğu bilinmektedir. Olasılık kuramının uygulanmasında bu denli önemli olduğu belirtilen fonksiyonların bulunması, yapılacak araştırmanın en önemli aşamasıdır. Her özel araştırmada yeni bir fonksiyon arayışı içerisine girmemek, araştırmada zaman ve kaynak kullanımını en iyilemek amacı ile bir yandan belirli özelliklerin sağlandığı tesadüfi deney veya gözlemler için araştırmalar yapılarak genel kalıplar türetilmiş diğer yandan da özel araştırmalar için bulunan kalıplar aynı özellikteki tesadüfi sistemlerde kullanımını sağlamak amacı ile genelleştirilmiştir.

Olasılıkta belirli özelliklerin sağlandığı özel tesadüfi deney veya gözlemler için geliştirilen olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarına teorik (kuramsal) dağılımlar denir.

VII.2 Kesikli Dağılımlar

VII.2.1 Binom Dağılımı

VII.2.1.1 OlasılıkFonksiyonu

Aynı şartlar altında tekrarlanan bir tesadüfi deney veya gözlem sonuçları, olumlu-olumsuz, başarılı-başarısız, geçerli-geçersiz gibi yalnız iki durumda ele alınsın. X t.d., bir deney sonucu olumlu ise “1” olumsuz ise “0” şeklinde tanımlandığında deneyin olumlu sonuçlanma olasılığı, p ve olumsuz sonuçlanma olasılığı $q = 1 - p$ ile gösterilsin. Böylesi bir deney için takipteki şartlar sağlanmış olsun.

a) Tesadüfi deney aynı şartlar altında r defa tekrarlanmıştır.
b) Her deney sonucu yalnız iki durum söz konusudur.
c) Bir deneyde olumlu sonuç elde etme olasılığı, p ve olumsuz sonuç elde etme olasılığı $q = 1 - p$ olup, bu olasılıklar her deney için aynıdır.
d) Bir deneyin sonucu diğer deneyin sonucundan bağımsızdır.
e) Yapılan r deneyde karşılaşılan olumlu sonuç sayısı ile ilgilenilmektedir.

Hene yukarıda belirtilen beş özelliği sağlayan bir tesadüfi deişken X, r deneydeki olumlu sonuç sayısı olark tanımlandığında t.d’nin değer kümesi, $A = \{0, 1, 2, \cdots, r\}$ olarak verilir. Böylece X t.d.’nin olasılık fonksiyonu,

$$p(x) = \begin{cases} C_r^x p^x (1-p)^{r-x}, & x = 0, 1, 2, \cdots, r \\ 0, & --- \end{cases}$$

şeklinde ise $p(x)$ fonksiyonuna binom dağılımı ve X’e de binom dağılmış t.d. adı verilir.

♦ **Örnek:** bir hastalıkta iyileşme olasılığının $\frac{1}{3}$ olduğu bilinmektedir. Sözkonusu hastalığa yakalanmış 10 kişiden; a) Üçünün iyileşme, b) En fazla birinin iyileşme, c) iki veya daha fazla kişinin iyileşme ve d) üçten fazla ancak beş veya daha azının iyileşme olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:**Önce X'in olasılık fonksiyonunu yazalım. Deneye uygun o.f.,

$$p(x) = \begin{cases} C_{10}^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}, & x = 0,1,2,\cdots,10 \\ 0, & --- \end{cases}$$

şeklinde yazılır. a) $P(X=3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-3} = \frac{10!}{3!(10-2)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-3} = 120\left(\frac{1}{27}\right)\frac{128}{2187} = \frac{15360}{50049} \cong \%26$ bulunur. b) $P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + C_{10}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{9} = 1(1)\frac{1024}{59049} + 10\left(\frac{1}{3}\right)\frac{512}{19683} = \frac{6144}{59049} \cong \%10.4$, c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \cong 1 - 0.104 \cong 89.6$ bulunur. d) $P(3 < X \leq 5) = p(4) + p(5) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{6} + C_{10}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = 210\left(\frac{1}{81}\right)\frac{64}{729} + 252\left(\frac{1}{243}\right)\frac{32}{243} = \frac{13440+8064}{59049} = \frac{21504}{59049} \cong \%36.42$ bulunur.

VII.2.1.2 Ortalama, Varyans ve Standart Sapması

- ✓ **Ortalaması:** $\mu_X = E(X) = rp$
- ✓ **Varyansı:** $\sigma_X^2 = rpq$
- ✓ **Standart Sapması:** $\sigma_X = \sqrt{rpq}$

♦ **Örnek:** Bir önceki örnek için μ_X, σ_X^2 ve σ_X niceliklerini hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** $\mu_X = 10\left(\frac{1}{3}\right) \cong 3.33$, $\sigma_X^2 = 10\left(\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3} = \frac{20}{9} \cong 2.22$ ve $\sigma_X \cong \sqrt{2.22} \cong 1.491$ bulunur.

VII.2.2 Poisson Dağılımı

VII.2.2.1 Olasılık Fonksiyonu

Bir binom deneyinde r çok büyük ve p (bir denemede başarılı sonuç elde etme olasılığı) çok küçük olması halinde binom dağılımının o.f. Poisson dağılımına yakınsar. Bu nedenle ender rastlanan olaylarının incelenmesinde kullanılır. Örneğin; kazalar, az rastlanan hastalıklar, intihar olayları, doğa afetleri, v.b. gibi örnekler çoğaltılabilir. Ayrıca bu dağılım, birim zaman içinde meydana gelen olaylara uygulanır. Örnek vermek gerekirse bir fabrikanın stok kontrolü, kuyrukta beklemenin kontrolü, büyük bir alış-veriş merkezindeki tezgahtarlara baş vuran alıcıların sırada beklemesi, şehirler arası telefon santralinde konuşma sırasındaki müşterilerin beklemesi, çok yoğun bir hava limanına inen veya kalkan uçakların sırada beklemesi, bir radyoaktif cisimden yayılan partiküllerin birim süredeki sayıları v.b. örnekler çoğaltılabilir.

İlgilenilen olayın anlamlı olduğu zaman aralığında ya da belirli bir yerde sık sık karşılaşılmayan tesadüfi olayların öz durumları için geliştirilen olasılık fonksiyonu Poisson dağılımıdır. X t. d. ilgilenilen olayın ortaya çıkma sayısı olduğunda o.f.,

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}, & x = 0,1,2,\cdots \\ 0, & --- \end{cases}$$

ile verilir. Bu $p(x)$ fonksiyonuna Poisson dağılımı, X'e de Poisson dağılmış t.d. adı verilir.

♦ **Örnek:**Araştırmalara göre bir ülkede gıda zehirlenmesinden ölen vakası 100 bin kişide üç olarak tespit edilmiştir. 200 bin nüfuslu bir şehirde gıda zehirlenmesinden; a) Hiç, b) İki, c) altı, d) altı ila sekiz arasında ve e) üç kişiden fazla ölen olması olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** Önce olaya ilişkin olasılık fonksiyonunu yazalım. $p = \frac{3}{100000} = 0.00003$ olup $r = 200000 => \lambda = rp = 6$ olur. Böylece o.f.,

$$p(x) = \begin{cases} e^{-6}\dfrac{6^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & --- \end{cases}$$

olarak yazılır. a) $P(X = 0) = e^{-6} = \frac{1}{e^6} \cong 0.0025$ (yaklaşık onbinde 25 kişi), b) $P(X = 2) = e^{-6}\frac{6^2}{2!} = \frac{36}{2e^6} = \frac{18}{e^6} \cong 0{,}045$ (yaklaşık binde 45 kişi), c) $P(X = 6) = e^{-6}\frac{6^6}{6!} \cong 0{,}16$ (yaklaşık yüzde 16 kişi), d) $P(6 \leq X \leq 8) = p(6) + p(7) + p(8) = e^{-6}\left(\frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} + \frac{6^8}{8!}\right) = \frac{162}{e^6} \cong 0.40$ (yaklaşık yüzde 40 kişi) ve e) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)] = 1 - e^{-6}(1 + 6 + 18 + 36) = 1 - \frac{61}{e^6} \cong 0.85$ (yaklaşık yüzde 85 kişi).

♦ **Örnek:** Bir telefon santralinin telefon, 14:00-16:00 saatleri arasında 300 defa çalıyor. Sözü edilen saatler arasındaki belirli bir dakikalık süre içinde telefonun; a) hiç çalmama, b) bir kez çalma, c) iki kez çalma ve d) iki veya daha az çalması olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** Önce olaya ilişkin olasılık fonksiyonunu yazalım.120 dakika içinde 300 defa çalıyorsa dakikada, $\lambda = \frac{300}{120} = 2.5$ çağrı yapar. Böylece o.f.,

$$p(x) = \begin{cases} e^{-2.5}\dfrac{2.5^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & --- \end{cases}$$

olarak yazılır. a) $P(X = 0) = e^{-2.5} = \frac{1}{e^{2.5}} \cong 0.082$ (yaklaşık binde 82 defa), b) $P(X = 1) = \frac{2.5}{e^{2.5}} \cong 0.21$ (yaklaşık yüzde 21 defa), c) $P(X = 2) = e^{-2.5}\frac{2.5^2}{2!} = \frac{6.25}{2e^{2.5}} \cong 0.26$ (yaklaşık yüzde 26 defa) ve d) $P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = e^{-2.5}(1 + 2.5 + 3.125) = \frac{6.625}{e^{2.5}} \cong 0.54$ (yaklaşık yüzde 54 defa).

VII.2.2.2 Ortalama, Varyans ve Standart Sapması

- ✓ **Ortalaması:** $\mu_X = E(X) = \lambda$
- ✓ **Varyansı:** $\sigma_X^2 = \lambda$
- ✓ **Standart Sapması:** $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

♦ **Örnek:** Örnek bir için bu değerler, $\mu_X = E(X) = 6$, $\sigma_X^2 = 6$ ve $\sigma_X = \sqrt{6}$ bulunur.

♦ **Örnek:** Örnek iki için bu değerler, $\mu_X = E(X) = 2.5$, $\sigma_X^2 = 2.5$ ve $\sigma_X = \sqrt{2.5}$ bulunur.

Ödev: Bir matbaa işçisinin sayfada ortalama iki dizgi hatası yaptığı bilinmektedir. Bu işçinin dizgisini yaptığı bir sayfada; a) iki hata, b) en fazla 4 hata çıkması olasılıklarını hesaplayınız. (C: o.f.,$p(x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \cdots$, a) $P(X = 2) \cong 0.224$, b) $P(X \leq 4) \cong 0.815$).

VII.3 Sürekli Dağılımlar

VII.3.1 Üstel Dağılım

Güvenilirlik ve sağ kalım analizinde yaygın kullanımı ve uygulaması olan en önemli dağılımlardan biridir.

VII.3.1.1 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Bir X t. d.'nin o. y. f.,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, ---\end{cases}$$

şeklinde ise $f(x)$'e üstel dağılım ve X'e de üstel dağılmış t. d. adı verilir.

♦ **Örnek:** X, $\beta=2$ olan bir üstel dağılmış t. d. iken; a) $P(X\leq 1)$, b) $P(1<X<4)$, c) $P(X>3)$ ve $P(X<2\,/\,X>1)$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** X'in o. y. f.,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, ---\end{cases}$$

olarak ifade edilir. a) $P(X\leq 1)=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x/2}dx=\int_0^2 e^{-u}du=-e^{-u}|_0^2=1-e^{-2}\cong 0.865$, b) $P(1<X<4)=\frac{1}{2}\int_1^4 e^{-x/2}dx=\int_2^8 e^{-u}du=-e^{-u}|_2^8=e^{-2}-e^{-8}=0.135$, $P(X>3)$ $=1-P(X\leq 3)=1-\frac{1}{2}\int_0^3 e^{-x/2}dx=1-\int_0^6 e^{-u}du=1+e^{-u}|_0^6=1-1+e^{-6}\cong 0.0025$ ve $P(X<2\,/\,X>1)=\frac{P(1<X<2)}{P(X>1)}=\frac{e^{-2}-e^{-4}}{e^{-1}}\cong\frac{0.117}{0.368}\cong 0.318$ bulunur.

VII.2.1.2 Ortalama, Varyans ve Standart Sapması

- ✓ **Ortalaması:** $\mu_X=E(X)=\beta$
- ✓ **Varyansı:** $\sigma_X^2=\beta^2$
- ✓ **Standart Sapması:** $\sigma_X=\beta$
- ♦ **Örnek:** Bir önceki örneğin ortalama, Varyans ve standart sapmasını hesaplayınız.
- ♦ **Çözüm:** $\mu_X=E(X)=2$, $\sigma_X^2=2$ ve $\sigma_X=2$ bulunur.

VII.3.2 Normal Dağılım

İstatistik analizinde yaygın kullanımı ve uygulaması olan en önemli dağılımlardan biridir.

VII.3.2.1 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Bir X t. d.'nin o. y. f.,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & -\infty<x<\infty;-\infty<\mu<\infty \text{ ve } \sigma>0\\ 0, ---\end{cases}$$

şeklinde ise $f(x)$'e normal dağılım ve X'e de normal dağılmış t. d. adı verilir ve $X\sim N(\mu;\,\sigma^2)$ ile gösterilir.

VII.2.2.2 Ortalama, Varyans ve Standart Sapması

- ✓ **Ortalaması:** $\mu_X=E(X)=\mu$

- ✓ **Varyansı:** $\sigma_X^2 = \sigma^2$
- ✓ **Standart Sapması:** $\sigma_X = \sigma$

X'in belli değerleri için olasılıklarını o. y. f. yardımı ile hesaplamak zaman alıcı ve zordur. Bu nedenle standart, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dönüşümü ile yeni bir tesadüfi değişken tanımlanır. Bu dönüşüm değişkeninin dağılımına ilişkin o. y. f.,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty \\ 0, \quad\quad --- \end{cases}$$

ile verilir. Böylece elde edilen $f(z)$'ye standart normal dağılım, z'ye de standart normal dağılmış t. d. adı verilir ve $Z \sim N(0;\ 1)$ ile gösterilir. Z dağılımı ile ilgili olasılık değerlerini hesaplamak için hazır olasılık tabloları geliştirilmiştir. Bu tablolar yardımı ile olasılık hesaplamaları takipteki örnekle açıklanmıştır.

♦ **Örnek:** $Z \sim N(0;\ 1)$ sahip olsun. a) $P(0 < Z < 1.82)$, b) $P(Z \le 2.6)$, c) $P(1 < Z < 2.5)$, d) $P(Z \le -0.96)$ ve e) $P(-1.6 < Z \le 2.3)$ olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** a) $P(0 < Z < 1.82) = p(1.82) - p(0) = 0.9656 - 0.5000 = 0.4656$, b) $P(Z \le 2.6) = 0.9953$, $P(1 < Z < 2.5) = p(2.5) - p(1) = 0.9938 - 0.8413 = 0.1525$, $P(Z \le -0.96) = 0.1585$ ve $P(-1.6 < Z \le 2.3) = p(2.3) - p(-1.6) = 0.9893 - 0.0548 = 0.9345$ bulunur.

♦ **Örnek:** Belli bir derste öğrencilerin başarısının ortalaması 100 üzerinden 60 ve standart sapması 12 olan bir normal dağılıma sahip oldukları bilinmektedir. Bu dersi sınavına girmiş olan bir öğrencinin almış olduğu puanın; a) 72'den fazla, b) 52 ila 66 arası ve c) 46'dan az çıkması olasılıklarını hesaplayınız.

♦ **Çözüm:** $X \sim N(60;\ 144)$ iken $Z = \frac{X-60}{12}$ dönüşümü, $Z \sim N(0;\ 1)$ dağılımı olur. Öyle ise a) $P\left(Z > \frac{72-60}{12}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$, b) $P\left(\frac{52-60}{12} < Z < \frac{66-60}{12}\right) = P(-0.67 \le Z \le 0.50) = p(0.50) - p(-0.67) = 0.6915 - 0.2514 = 0.4401$ ve c) $P\left(Z \le \frac{46-60}{12}\right) = P(Z \le -1.17) = 0.1210$ bulunur.

VII.4 VII. Bölümle İlgili Çalışma Soruları

VII.4.1 Binom Dağılımı Soruları

♦ **Uygulama-1:** $X \sim Bn(4;\, 3/5)$ olan bir binom t. d. olsun. a) $P(X \le 3)$, b) $P(1 < X \le 4)$, c)$P(X > 2)$, d) $P(X < 3\ /\ X > 1)$ ve e) $P(1 < X \le 3\ /\ X < 4)$ olasılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.8704, b) 0.8208, c) 0.4752, d) 0.4211 ve e) 0.7941)

♦ **Uygulama-2:** Bir makinenin üretimindeki kusurlu oranının 0.2 olduğu bilinmektedir. X, bu makinede üretilen 15 ürün içindeki kusurlu sayısı iken; a) $P(X = 3)$, b) $P(X \ge 4)$, c) $P(X < 5)$, d) $P(3 < X \le 5)$, e) $P(X < 3\ /\ X \ge 1)$ ve f) $P(1 < X \le 4\ /\ X < 5)$ olasılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.1501, b) 0.4519, c) 0.7357, d) 0.2908, e) 3761 ve f) 0.7728)

♦ **Uygulama-3:** Belli bir derste sınava giren her 100 öğrenciden 40'ının başarılı olduğu bilinmektedir. X, bu dersin sınavına giren 15 öğrenciden başarılı olanların sayısı iken; a) $P(X = 1)$, b) $P(X < 12)$, c) $P(7 < X < 12)$, d) $P(X \le 5/1 < X < 8)$ ve f) $P(2 \le X < 5\ /\ X < 8)$ olasılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.0047, b) 0.9981, c) 0.2112, d) 0.5092 ve e) 0.4124)

VII.4.2 Poisson Dağılımı Soruları

♦ **Uygulama-4:** X, ortalaması üç olan bir Poisson dağılımlı t. d. iken; a) $P(X > 2)$, b) $P(1 \leq X < 3)$ ve c) $P(X < 3/X \leq 4)$ olasılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.5768, b) 0.3734 ve c) 0.5191)

♦ **Uygulama-5:** Bir bayan kuaförüne saatte ortalama iki müşteri geldiği ve bunların Poisson dağılımına uyduğu bilinmektedir. X, saatte gelen ortalama müşteri sayısı iken; a) a) $P(X = 3)$, b) $P(X < 3)$ ve c) $P(X > 2)$, d) $P(X < 4/X > 1)$ ve e) $P(1 < X \leq 3)$ olasılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.1804, b) 0.6767, c) 0.3233, d) 0.7595 ve e) 4511)

VII.4.3 Üstel Dağılım Soruları

♦ **Uygulama-6:** Bir firmanın üretmiş olduğu elektrik ampüllerinin dayanma sürelerinin ortalama iki yıl olduğu ve üstel dağılıma uyduğu biliniyor. X böylesi bir kitleden t.d. iken; a) $P(X > 2)$, b) $P(1 < X < 3)$ ve c) $P(X < 3/X < 2)$ olassılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.6321, b) 0.3834 ve c) 1)

♦ **Uygulama-7:** Bir hastalıkta yaşama süresi sekiz yıl olduğu ve üstel dağılıma uyduğu bilinmektedir. X böylesi hastalığa yakalanmış bir hastanın sağ kalım süresine ilişkin t.d. iken; a) $P(X < 4)$, b) $P(X > 4)$ ve c) $P(1 < X < 4/X < 8)$ olassılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.3935, b) 0.6065 ve c) 0.48)

♦ **Uygulama-8:** X üstel dağılmış bir t.d. iken; $P(X > k) = k$ ise $P(X \leq k)$ olasılığını hesaplayınız. (C: $1 - k$)

VII.4.4 Normal Dağılım Soruları

♦ **Uygulama-9:** $X \sim N(5; 9)$ ise a) $P(X < 7)$, b) $P(X > 4)$ ve $P(2 < X < 4/1.5 < X < 5)$ olasılıklarını hesaplayınız. (C: a) 0.7475, b) 0.6306 ve c) 0.5572)

♦ **Uygulama-10:** $X \sim N(4; 9)$ ise $P(X < k) = 0.8508$ eşitliğini sağlayan k koodinat değerini bulunuz. (C: $z = \Phi^{-1}(0.8508) \cong 1.04$ tablodan)

♦ **Uygulama-11:** $X \sim N(\mu; 4)$ ve $P(X \geq 5) = 0.2358$ ise μ'yü (X'in ortalamasını) bulunuz. (C: $\mu \cong 3.56$; $z = \Phi^{-1}(0.2358) \cong -0.72$ tablodan)