VIII. BÖLÜM
HİPOTEZ TESTLERİ

VIII.1 Hipotez ve Çeşitleri

Genel olarak hipotez, doğruluğu ya da yanlışlığı kesin olarak ispatlanamamış önermelerdir. İstatistiksel olarak hipotez ise kitle (ya da kitlelerin) parametreleri hakkında ortaya atılan iddialardır, şeklinde tanımlanabilir. İki çeşit olarak belirlenir. Kitle veya kitlelerin parametreleri hakkında ortaya atılan iddialar araştırma (araştırmacı ya da karşıt) hipotezi olarak adlandırılıp H_A ya da H_1 ile gösterilir. Amaç $H_A$hipotezinin test edilmesidir; ancak örnekleme dağılımının parametrelerinin bilinmemesi nedeni ile bu hipotezi doğrudan test etmek mümkün değildir. Bu nedenle test edilebilecek yeni bir hipotez gereklidir ki bu hipotez sıfır (boş veya yokluk) hipotezi olarak adlandırılır ve H_0 ile gösterilir.

Test işlemi ise araştırma hipotezine karşı oluşturulan sıfır hipotezin doğru olup olmadığının çeşitli olasılık hesapları ile ortaya çıkartılmasıdır. Böylece elde edilen sonuç dolaylı olarak araştırma hipotezi için genellenir. H_0 hipotezi mutlaka “=” (yani; eşittir) durumunu kapsıyor olmalıdır. H_A hipotezi ise “≠” (farklı), “<” (küçük) ve “>” (büyük) durumlarından birini alır.

VIII.2 Hipotez Örnekleri

♦ **Örnek-1:** “Tati amacı ile yurdumuza gelen yabancıların ortalama tatil süresi 15 günden farklıdır” şeklindeki probleme ilişkin sıfır ve araştırma hipotezi: $H_0: \mu = 15$ gün ve $H_A: \mu \neq 15$ gün şeklinde kurulur.

♦ **Örnek-2:** Samsun’da şehir-içi ulaşımda en çok raylı sistem tercih edenlerde %70’den fazlası toplu taşım kartı (paso vb kart) kullanmaktadır” şeklindeki probleme ilişkin sıfır ve araştırma hipotezi: $H_0: \pi = 0.7$ ve $H_A: \pi > 0.7$ şeklinde kurulur.

♦ **Örnek-3:** “Samsun’daki iki çocuklu ailelerin aylık mutfak harcamaları Ordu’daki iki çocuklu ailelerin mutfak harcamasından daha azdır” şeklindeki probleme ilişkin sıfır ve araştırma hipotezi: $H_0: \mu_S = \mu_O$ (veya $H_0: \mu_S - \mu_O$=0) ve $H_A: \mu_S < \mu_O$ (veya $H_0: \mu_S - \mu_O < 0$) şeklinde kurulur.

♦ **Örnek-4:** “ Fen Liselerini bitiren öğrencilerin üniversitesye girme oranı diğer liseleri bitirenlerin oranından daha farklıdır” şeklindeki probleme ilişkin sıfır ve araştırma hipotezi: $H_0: \pi_F = \pi_D$ (veya $H_0: \pi_F - \pi_D$=0) ve $H_A: \pi_F \neq \pi_D$ (veya $H_0: \pi_F - \pi_D \neq 0$) şeklinde kurulur.

Bu örneklerin hepsinde amaç, H_A hipotezini test etmektir. Ancak bu mümkün değildir. Bu nedenle H_0 hipotezi test edilerek elde edilen sonuç H_A hipotezi için genellenir. H_0hipotezini test ederken μ parametresi için delil $\bar{X}$ istatistiği, π parametresi için P istatistiği, $(\mu_1 - \mu_2)$

parametresi için $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ istatistiği ve $(\pi_1 - \pi_2)$ parametresi için de $(P_1 - P_2)$ istatistiği delil (ispat) olarak kullanılır.

VIII.3 Hata Çeşitleri

H_0 hipotezinin test edilmesi sonucunda iki çeşit hata ile karşılaşılır. Bu hatalar takipteki bir tablo ile özetlenebilir.

Tablo: H_0 hipotezinin Testi sonucu karar ve sonuçları.

<table>
<tr><td rowspan="5">H_0 Hipotezi Test Sonucu</td><td rowspan="2">Karar↓</td><td colspan="2">H_0 Hipotezi Gerçekte</td></tr>
<tr><td>Doğru</td><td>Yanlış</td></tr>
<tr><td>Ret</td><td>Yanlış Karar
(I. Tip Hata): α önem seviyesi</td><td>Doğru Karar
$(1-\beta)$: Testin gücü</td></tr>
<tr><td>Kabul</td><td>Doğru Karar
$(1-\alpha)$: Güvenilirlik seviyesi</td><td>Yanlış Karar
(II. Tip Hata) β</td></tr>
<tr><td>Toplam</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

✓ α: Birinci tip hartadır. Testin önem seviyesi ya da önem düzeyi olarak bilinir. Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini test sonucu ret etme olasılığıdır.

✓ β: İkinci tip hartadır. Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini test sonucu kabul etme olasılığıdır.

✓ $(1-\alpha)$: Testin güvenlilirlik seviyesi ya da düzeyi olarak bilinir. Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini test sonucu kabul etme olasılığıdır.

✓ $(1-\beta)$: Testin gücü olarak bilinir. Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini test sonucu ret etme olasılığıdır.

H_0 hipotezinin testinde öncelikle Birinci tip harta (önem seviyesi)'nın olasılığının ne olacağına karar verilir. Genellikle bu değer, %05, %1, %5 ve %10 olarak alınır. Bir araştırmada önem seviyesinin kaç olacağını araştırmanın ilgili olduğu bilim dalı belirler. Eğer araştırmanın ilgili olduğu bilim dalı gelişmiş bir bilim dalı (fizik, kimya, biyoloji, sağlık bilimleri v. b.) ise bu değer %05 ve %1 olarak alınır. Diğer durumlarda (sosyal bilimlerde) ise %5 ve %10 olarak alınabilir.

VIII.4 Hipotez Test Algoritması

Genel olarak bir istatistiksel hipotez testi algoritması dört adımdan oluşur. Bu adımlar şöyle verilebilir.

a) Birinci Adım: Hipotezler kurulur (H_0 ve H_A)

b) İkinci Adım: Test istatistiği belirlenir (z, t, χ^2, F v.b.) gibi.

c) Üçüncü Adım: Karar verilir. İkinci adımda belirlenen test istatistiklerinin kritik değerleri yardımı ile karşılaştırma yapılarak H_0'ın kabul yada reddine karar verilir.

d) Dördüncü Adım: Yorum yapılır. Üçüncü adımdaki karara göre yorum yapılır.

VIII.5 Parametrik Hipotez Testleri

VIII.5.1 Tek Kitle Parametresi ile İlgili Hipotez Testleri

VIII.5.1.1 Ortalamaya İlişkin Hipotez Testleri

a) Kitle Varyansı Biliniyorken

♦ **Örnek:** Samsun merkez ilçelerinde ikamet eden iki çocuklu ailelerin aylık ortalama mutfak harcamasının 400 TL'den fazla olduğu iddia edilmektedir. Tesadüfi olarak seçilen dokuz iki çocuklu ailenin aylık ortalama mukfak harcaması şöyle tespit edilmiştir. x_i(100 TL): 4.8, 6, 3.8, 7, 3, 2, 8, 5 ve 5.4. Kitleye ilişkin varyans 7500 ise $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \mu = 400\ TL$ ve $H_A: \mu > 400\ TL$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: Kitle varyansı bilindiğinden test istatistiği, $z_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0;1)$ kullanılır. $\mu_0 = 400$; $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{4500}{9} = 500$ ve $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{7500}{9}} \cong 28.868$ olup $z_H \cong \frac{500-400}{28.868} \cong 3.464$ bulunur.

c) Karar: $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde kritik tablo değeri, $z_T = 1.645$ (z tablosundan) okunur. Böylece $z_H > z_T$ olduğundan H_0hipotezi ret edilir.

d) **Yorum:** %95 güvenilirlikle Samsun'daki iki çocuklu ailelerin aylık ortalama mutfak harcamalarının 400 TL'den daha fazla olduğu söylenebilir.

♦ **Örnek:** Belli bir hastalığın tedavisi için yeni bir tür ilaç geliştirilmiştir. Bu ilaçla tedavi edilen hastaların ortalama iyileşme süresinin 15 günden kısa olduğu iddia edilmektedir. Tesadüfi olarak seçilen yedi hasta sözü edilen ilaçla tedavi edilmiş ve iyleşme süreleri şöyle tespit edilmiştir. x_i(gün): 8, 6, 17, 5, 6, 9 ve 12. Kitle varyansı, 6 ise $\alpha = 0.01$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \mu = 15\ gün$ ve $H_A: \mu < 15\ gün$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: Kitle varyansı bilindiğinden test istatistiği, $z_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0;1)$ kullanılır. $\mu_0 = 15$; $\bar{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{63}{7} = 9\ gün$ ve $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{6}{7}} \cong 0.926$ olup $z_H \cong \frac{9-15}{0.926} \cong -6.479$ bulunur.

c) Karar: $\alpha = 0.01$ önem seviyesinde kritik tablo değeri, $z_T = -2.326$ (z tablosundan) okunur. Böylece $|z_H| > |z_T|$ olduğundan H_0hipotezi ret edilir.

d) **Yorum:** %95 güvenilirlikle sözkonusu ilacın iyileştirme süresinin 15 günden daha kısa olduğu söylenebilir.

♦ **Örnek:** Tatil amacı ile Türkiye'ye gelen yabancı uyrukluların ortalama konaklama süresinin 10 günden farklı olduğu iddia edilmektedir. Tatil amacı ile Türkiye'ye giriş yapan yabancı uyruklulardan 9 tanesi tesadüfi olarak seçilerek Türkiye'de konaklama süreleri tespit edilmiştir. x_i(gün): 12, 18, 5, 11, 25, 18, 14, 9 ve 19. Kitle varyansı, 25 ise $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0\!: \mu = 10\ gün$ ve $H_A\!: \mu \neq 10\ gün$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: Kitle varyansı bilindiğinden test istatistiği, $z_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0;1)$ kullanılır. $\mu_0 = 10$; $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{131}{9} = 14.556\ gün$ ve $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{25}{9}} \cong 1.667$ olup $z_H \cong \frac{14.556-10}{1.667} \cong 2.733$ bulunur.

c) Karar: $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ önem seviyesinde kritik tablo değeri, $z_T = \pm 1.96$ (z tablosundan) okunur. Böylece $|z_H| > |z_T|$ olduğundan H_0hipotezi ret edilir.

d) Yorum: %95 güvenilirlikle Türkiyemize gelen yabancı uyrukluların ortalama konaklama süresinin 10 günden farklı olduğu ve hatta daha uzun sürdüğü bile söylenebilir.

b) Kitle Varyansı Biliniyorken

i) Küçük Örneklem Hacimli Örnekler İçin ($n < 30$)

Kitle varyansı bilinmiyor ve örneklem hacmi de $n < 30$ iken test algoritmasında sadece ikinci adımda verilen z_H istatistiği yerine $t_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \sim t_{(n-1)}$ istatistiği kullanılır. Diğer adımlar değişmez. Eşitlikteki $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ ise örneklem standart hatasıdır ve ayrıca s ise örneklem standart sapmasını göstermektedir. $t_{(n-1)}$, $(n-1)$ serbestlik dereceli (sd) t-dağılımı olarak bilinir ve sd ve $(1-\alpha)$ güvenilirlik olasılığı ile birleştirilmiş hazır tablolar geliştirilmiştir.

ii) Büyük Örneklem Hacimli Örnekler İçin ($n \geq 30$)

Kitle varyansı bilinmiyor ve örneklem hacmi de $n \geq 30$ iken test algoritmasında sadece ikinci adımda verilen z_H istatistiğinin paydasındaki kitle standart hatası yerine örneklem standart hatası kullanılır. Şöyle ki yerine $z_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \sim N(0;1)$ istatistiği kullanılır. Diğer adımlar değişmez. Bu eşitlikte $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ ise örneklem standart hatasıdır ve ayrıca s ise örneklem standart sapmasını göstermektedir.

♦ **Örnek:** Ondokuz Mayı Üniversitesinde okuyan öğrencilerin ailelerinden uzakta olanların aileleri ile ceple günlük ortalama 5 dakikadan daha uzun görüştükleri iddia edilmektedir. Bu amaçla yapılan bir çalışmada tesadüfi olarak seçilen 9 öğrencinin günlük konuşma süreleri tespit edilmiştir. x_i(dakika/gün):6, 6, 7, 5, 8, 4, 6, 2 ve 10. Sürelere ilişkin dağılımın normal dağılıma uyduğu varsayımı altında ve $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \mu = 5\ dk$ ve $H_A: \mu > 5\ dk$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: Kitle varyansı bilinmediğinden ve örneklem hacmi de küçük olduğunda test istatistiği, $t_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \sim t_{(n-1)}$ kullanılır. $\mu_0 = 5$; $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{54}{9} = 6\ dk$ ve $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{5.25}{9}} \cong 0.764$ olup $t_H \cong \frac{6-5}{0.764} \cong 1.309$ bulunur.

c) Karar: $\alpha = 0.05$ önem seviyesi ve $(9-1) = 8$ sd'de kritik tablo değeri, $t_T = t_{8;0.95=}$1.860 (t tablosundan) okunur. Böylece $|t_H| < |t_T|$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir.

d) Yorum: %95 güvenilirlikle Omü'de okuyan ve ailelerinden uzakta olan öğrencilerin ceple ailelerini arama süresinin günlük ortalama 5 dakikadan fazla olduğu söylenemez.

♦ **Örnek:** Cerrahi müdahaleden sonra iyileşme süresini 20 günün altına indirdiği iddia edilen yeni bir yöntem ile tesadüfî olarak seçilen dokuz hasta bu yöntem ile ameliyat edilmiştir. Cerrahi müdahaleden sonra iyileşme süreleri gün olarak kaydedilmiştir. x_i(gün): 12, 15, 9, 10, 14, 12, 5, 19 ve 12. Sürelere ilişkin dağılımın normal dağılıma uyduğu varsayımı altında ve $\alpha = 0.01$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) **Hipotezler:** $H_0: \mu = 20\ gün$ ve $H_A: \mu < 20\ gün$ şeklinde belirlenir.

b) **Test İstatistiği:** Kitle varyansı bilinmediğinden ve örneklem hacmi de küçük olduğunda test istatistiği, $t_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \sim t_{(n-1)}$ kullanılır. $\mu_0 = 20$; $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{108}{9} = 12\ gün$ ve $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{15.5}{9}} \cong 1.312$ olup $t_H \cong \frac{12-20}{1.312} \cong -6.096$ bulunur.

c) **Karar:** $\alpha = 0.05$ önem seviyesi ve $(9-1) = 8$ sd'de kritik tablo değeri, $t_T = t_{8;0.95} = -2.896$ (t tablosundan) okunur. Böylece $|t_H| > |t_T|$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

d) **Yorum:** %95 güvenilirlikle söz konusu cerrahi müdahalenin iyileşme süresini 20 günün altına indirdiği söylenebilir.

♦ **Örnek:** Bir firmanın ürettiği konserve kutularının ağırlığının 650 gr. Olması gerektiği halde firmanın buna uymadığı iddia edilmektedir. Tesadüfî olarak seçilen yedi konserve kutusunun ağırlıkları şöyle tespit edilmiştir. x_i(gr.): 630, 640, 620, 635, 610, 650 ve 625. Ağırlıklara ilişkin dağılımın normal dağılıma uyduğu varsayımı altında ve $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \mu = 650\ gr.$ ve $H_A: \mu \neq 650\ gr.$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: Kitle varyansı bilinmediğinden ve örneklem hacmi de küçük olduğunda test istatistiği, $t_H = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{x}}} \sim t_{(n-1)}$ kullanılır. $\mu_0 = 650$; $\bar{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = \frac{4410}{7} = 630\ gr$ ve $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{175}{7}} = 5\ gr.$ olup $t_H = \frac{630-650}{5} = -4.000$ bulunur.

c) **Karar:** $\alpha = 0.05$ önem seviyesi ve $(7-1) = 6$ sd'de kritik tablo değeri, $t_T = t_{6;0.975} = \pm 2.969$ (t tablosundan) okunur. Böylece $|t_H| > |t_T|$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

d) **Yorum:** %95 güvenilirlikle söz konusu konserve kutularının ağırlığının 650 gramın altında olduğu söylenebilir.

VIII.5.1.2 Orana İlişkin Hipotez Testleri

Orana ilişkin hipotez testinde olayı örnekler üzeride anlatmakla yetineceğiz. Vurgulanması gereken nokta örneklem hacimleri büyük olacağı için test algoritmasının ikinci adımında sadece z_H testi kullanılacaktır. Diğer adımlar değişmemektedir.

♦ **Örnek:** OMÜ öğrencilerinin %30'undan fazlasının kütüphaneden faydalanma alışkanlığı olduğu iddia edilmektedir. Tesadüfî olarak seçilen 100 öğrencinin 40'ının kütüphaneden faydalanma alışkanlığına sahip olduğu tespit edilmiştir. $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \pi = 0.30$ ve $H_A: \pi > 0.30$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: $z_H = \frac{P-\pi_0}{\sigma_P} \sim N(0;1)$ olup $\pi_0 = 0{,}30$, $p = \frac{40}{100} = 0.40$ ve $\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.3(0.7)}{100}} \cong 0.0458$ ve buradan test istatistiği ise $z_H \cong \frac{0.4-0.3}{0.0458} \cong 2.182$ bulunur.

c) Karar: $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde kritik tablo değeri, $z_T = 1.645$ (z tablosundan) okunur. Böylece $z_H > z_T$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

d) **Yorum:** %95 güvenilirlikle OMÜ öğrencilerinin kütüphaneden faydalanma oranının % 30'dan yüksek olduğu söylenebilir.

♦ **Örnek:** Yüksek öğrenim amacı ile ailesinin yanından ayrılıp diğer şehirlere giden öğrencilerin %70'den azının (devlek ve özel) kaldığı iddia edilmektedir. Bu durundaki öğrenciler arsından tesadüfî olarak seçilen 400 öğrenciden 260'ının yurtlarda kaldığı tespit edilmiştir. $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \pi = 0.70$ ve $H_A: \pi < 0.70$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: $z_H = \frac{P-\pi_0}{\sigma_P} \sim N(0;1)$ olup $\pi_0 = 0,70$, $p = \frac{260}{400} = 0.65$ ve $\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.7(0.3)}{400}} \cong 0.0229$ ve buradan test istatistiği ise $z_H \cong \frac{0.65-0.70}{0.0229} \cong -2.182$ bulunur.

c) Karar: $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde kritik tablo değeri, $z_T = -1.645$ (z tablosundan) okunur. Böylece $|z_H| > |z_T|$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

d) Yorum: : %95 güvenilirlikle yurtlarda kalan öğrenci oranının % 70'den az olduğu söylenebilir.

♦ **Örnek:** Samsun'da halka satılan ekmeklerde belediyenin belirlediği gramajdan farklı olanların oranının %20'den farklı olduğu iddia edilmektedir. Samsun'da bulunan fırınlar arsından tesadüfî olarak seçilen 100 ekmekten 24 tanesinin belirtilen gramajdan farklı olduğu tespit edilmiştir. $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde iddianın doğru olduğu söylene bilir mi?

♦ **Çözüm:**

a) Hipotezler: $H_0: \pi = 0.00$ ve $H_A: \pi \neq 0.20$ şeklinde belirlenir.

b) Test İstatistiği: $z_H = \frac{P-\pi_0}{\sigma_P} \sim N(0;1)$ olup $\pi_0 = 0,20$, $p = \frac{24}{100} = 0.24$ ve $\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.2(0.8)}{100}} = 0.04$ ve buradan test istatistiği ise $z_H = \frac{0.24-0.20}{0.04} = 1.000$ bulunur.

c) Karar: $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde kritik tablo değeri, $z_T = \pm 1.96$ (z tablosundan) okunur. Böylece $|z_H| < |z_T|$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir.

d) Yorum: : %95 güvenilirlikle sözkonusu ekmeklerden gramajı farklı olanların oranının % 20'den farklı olmadığı söylenebilir.