OTOMATİK KONTROL TEMELLERİ

Prof. Dr. M. Nimet ÖZDAŞ
Prof. Dr. A. Talha DİNİBÜTÜN
Prof. Dr. Ahmet KUZUCU

İ.T.Ü. Makina Fakültesi
Otomatik Kontrol Birimi

BİRSEN YAYINEVİ

Kitabın her hakkı saklıdır ve **Birsen Yayınevi**'ne ve kitabın yazarına aittir. Bu kitabın tamamı veya herhangi bir bölümü yayınevinin yazılı izni olmaksızın yayınlanamaz, teksir notu haline getirilemez, fotokopi vb. şeklinde çoğaltılamaz.

ISBN : 975 - 511 - 121 - 2

Kitabın Adı	:	Otomatik Kontrol Temelleri
Kitabın Yazarları	:	Prof. Dr. M. Nimet ÖZDAŞ Prof. Dr. A. Talha DİNİBÜTÜN Prof. Dr. Ahmet KUZUCU
Yayınlayan	:	Birsen Yayınevi Ltd. Şti. Cağaloğlu Yokuşu, Evren Çarşısı, No: 19/29 - 31 Cağaloğlu / İSTANBUL Tel: 527 85 78 / 513 75 88
Dizgi	:	Erdiz Masaüstü Yayıncılık Tel : 512 87 02 - 512 93 40
Kapak Baskı	:	Ör Matbaası Tel: 501 94 94
Baskı	:	Eren Ofset Tel : 613 19 16
Cilt	:	Güven Mücellithanesi Tel : 520 19 15 / 512 64 42

İSTANBUL, 1995

YAZARLARIN ÖNSÖZÜ

İ.T.Ü. Makina Fakültesi'nde 1987-1988 ders yılında başlamak üzere «Sistem Dinamiği ve Kontrol» kolu kurulmuştur. Böylece lisans düzeyinde kontrolla ilgili mecburi ve seçime bağlı ders sayısı yediye yükselmiş ve Otomatik Kontrol alanında bir ihtisaslaşma imkânı ortaya çıkmıştır. Bu gelişme süreci içinde öğrencilerin Otomatik Kontrol alanında gördükleri ilk dersin bir kitabının yazılması öğretimde birliği sağlama yanında daha sonra görecekleri derslerin de temelini oluşturacağından öncelik kazanmış ve bu eser 1988-1989 akademik yılına yetiştirilmiştir.

Uzun yıllar İ.T.Ü. Makina Fakültesi öğrencilerine verilen dersler ve ders notlarından da yararlanılarak hazırlanmış olan bu kitap lineer ve sabit parametreli sistemlerle ilgili üç sömestr saatlik bir program içermektedir.

Onbir bölümden oluşan Kitapta Otomatik Kontrol'la ilgili kavramların, analiz metod ve tekniklerinin öğretilmesine çalışılmaktadır. Kitaba yardımcı mahiyette ve uygulamalarla ilgili bir problem kitabı da yakında çıkarılacaktır.

Bu kitabın hazırlanmasında kendi zamanlarından büyük fedakârlık ederek bizlere yardımcı olan Araştırma Görevlileri Doğan Kemal Hacıahmet'e ve Hakan Güner'e, teknik ressam Nejat Kını'ya ve sekreter Serpil Erşan'a ve kitabı büyük bir itina ile basan İ.T.Ü. Rektörlük Matbaası personeline teşekkürü borç biliriz.

Ekim 1988

YAZARLAR'DAN
KİTABIN İKİNCİ BASKISI HAKKINDA

Otomatik Kontrol alaninda öğrencilerin gördüğü ilk ders için hazırlanmış olan bu kitabın 1988 yılında yapılan birinci baskısının mevcudu tükenmiş bulunmaktadır. Kitaba gösterilen ilgi ve ihtiyaç dikkate alınarak ikinci baskının yapılması faydalı görülmüştür.

Bu kitabın ikinci baskısını gerçekleştiren Birsen Yayınevi'ne teşekkür ederiz.

Mart 1995

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
ÖNSÖZ		V
1.	OTOMATİK KONTROLA GİRİŞ	
1.1	Genel Bilgiler	1
1.2	Temel Kavramlar	3
1.3	Sistemlerde Bilgi Akışının ve Temel İşlemlerin Gösterilmesi	10
1.4	Kontrol Çevriminin Temel Elemanları	22
2.	LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ	
2.1	Giriş	30
2.2	Kompleks Sayılar ve s Kompleks Değişkeni	31
2.3	Laplace Dönüşümünün Tanımı	37
2.4	Çeşitli Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri	38
2.5	Laplace Dönüşümünün Özellikleri	44
2.6	Türevin Laplace Dönüşümü	45
2.7	İntegralin Laplace Dönüşümü	47
2.8	Son Değer Teoremi	47
2.9	Başlangıç Değer Teoremi	48
2.10	Poller ve Sıfırlar	49
2.11	Transfer Fonksiyonu ve Karakteristik Fonksiyon	54
2.12	Ters Laplace Dönüşümü	55
2.13	Lineer Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözümü	62
2.14	Lineerleştirme	64
3.	SİSTEM DİNAMİĞİ	
3.1	Giriş	68
3.2	Basit Sistem Elemanları	71
3.3	Elektriksel Sistem Elemanları	73

Sayfa

3.4 Mekanik Sistem Elemanları 77
3.5 Basit Hidrolik Elemanlar 84
3.6 Basit Termik Elemanlar 92
3.7 Basit Elemanlarda Enerji Depolanması 95
3.8 Genelleştirilmiş Empedans 95

4. TRANSFER FONKSİYONU, BLOK DİYAGRAMI VE İŞARET AKIŞ DİYAGRAMI

4.1 Giriş 105
4.2 Transfer Fonksiyonu 106
4.3 Blok Diyagramı 108
4.4 Kapalı Çevrim Blok Diyagramı 111
4.5 Blok Diyagramlarının İndirgenmesi 116
4.6 Fiziksel Sistemlerin Blok Diyagramlarının ve Çıkışı Girişe Bağlayan Transfer Fonksiyonlarının Elde Edilmesi 121
4.7 İşaret Akış Diyagramları 140
4.8 Çözümlü Problemler 151

5. GEÇİCİ REJİM CEVABI

5.1 Giriş 163
5.2 Zaman Sabiti Elemanının Geçici Rejim Cevabı 166
5.3 Titreşim Elemanının Geçici Rejim Cevabı 172

6. KONTROL ORGANI TİPLERİ

6.1 Giriş 177
6.2 İkili Kontrol Organı 178
6.3 Sürekli Kontrol Organı 182
6.4 Endüstriyel Kontrol Organı Tipleri 185

7. KAPALI ÇEVRİMLİ KONTROL

7.1 Giriş 192
7.2 Ölçme Organının Etkisi 193
7.3 Zaman Sabiti Tipindeki Bir Sistemin Orantı Kontrolu 194
7.4 Zaman Sabiti Tipindeki Bir Sistemin İntegral Kontrolu 198
7.5 Zaman Sabiti Tipindeki Bir Sistemin PI Kontrolu ... 202
7.6 Otomatik Kontrollu Sistemlerin Çalışma Türleri 203
7.7 Kontrol Sistemlerinde Sürekli Rejim Hatası 207

Sayfa

8. KONTROL ORGANININ AYARI

8.1 Kontrol Organının Deneysel Ayarı 212
8.2 Kontrol Organının Ayarlanmasında Analitik Yol 217
8.3 Kontrol Organının Ayar Değerlerinin Bulunmasında Simülasyon Metodları 217

9. KONTROL SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

9.1 Giriş 221
9.2 Routh Kararlılık Ölçütü (Kriteri) 224
9.3 Routh Kararlılık Ölçütünün Kontrol Sistemlerinin İncelenmesinde Kullanılması 230

10. SİSTEMLERİN FREKANS CEVABI

10.1 Giriş 235
10.2 Sistemlerin Frekans Cevabı 239
10.3 Logaritmik Diyagram veya Bode Diyagramı 242
10.4 Basit Sistemlerin Frekans Cevabı 243
10.5 Polar Diyagram (Nyquist Diyagramı) 255
10.6 Polar Diyagramların Genel Şekilleri ve Sistem Tipleri 262
10.7 Kazanç Payı ve Faz Payı 264
10.8 Frekans Cevabının Deneysel Olarak Elde Edilmesi 266

11. KÖKLERİN GEOMETRİK YERİ

11.1 Giriş 270
11.2 Köklerin Geometrik Yerini Çizmek İçin Kurallar 277
11.3 Köklerin Geometrik Yerine Ait Örnek Çizimler 289
11.4 Özet: Köklerin Geometrik Yerinin Kolay Çizilebilmesi İçin Kurallar 293
11.5 Pol ve Sıfırların Köklerin Geometrik Yerine Etkileri ... 294
11.6 Pol ve Sıfırların Konumlarının Etkisi 296
11.7 Çok Parametreli Sistemlerde Köklerin Geometrik Yeri 298

KAYNAKLAR

İNDEKS

1. OTOMATİK KONTROLA GİRİŞ

1.1 GENEL BİLGİLER

Kontrol işlemlerine günlük yaşantının hemen her anında rastlanır. Bilinçli ya da bilinçsiz olarak kontrol işlemleri uygular, kontrol işlemleri içinde davranırız. Kontrol işlemlerinin bir çoğu, «otomatik» biçimde, yani «insan girişimi olmadan» gerçekleştirilir. Örneğin «merdiven otomatiği», merdiven-koridor ışıklarının yakıldıktan belli bir süre sonra kendi kendine sönmesini sağlar. Kalorifer «brülör otomatiği», kalorifer kazanı brülörlerinin kazan suyu sıcaklığı düştüğü zaman yanmasını, önceden belirlenmiş bir sıcaklığın üstüne çıktığı zaman sönmesini sağlar. Termosifon, şofben ya da fırın sıcaklığının belirli bir değer etrafında tutulması, su basıncının hidrofor sistemleri ile ayarlanması, depo sıvı seviyelerinin şamandıralı açma-kapama vanaları ile kontrolu benzer uygulamalardır.

İnsan vücudunda daha karmaşık ve hassas kontrol işlemleri gerçekleşir :

Göze giren ışık şiddeti göz bebeğinin açılıp kapanması ile ayarlanır. Vücut sıcaklığı, çevre sıcaklığı arttığı zaman terleme ve sıvı buharlaşmasının soğutma etkisi ile, çevre sıcaklığı azaldığı zaman ise, kıl dibi kaslarının kasılmasının (ürperme) deri yüzeyinde yarattığı ısı ile çevre sıcaklığının değişmelerine karşı kontrol edilir. Acı duyulduğu zaman geri çekilme refleksi, ağır, hafif, sağlam veya narin cisimleri tutma, kavrama işlemi, göz-kas koordinasyonu (yazı yazma), kandaki şeker konsantrasyonunun belirli bir değerde tutulması, insan vücudundaki «fizyolojik kontrol» işlemlerinden çeşitli örneklerdir.

Toplumsal yaşamı doğrudan etkileyen konularda da kontrol uygulamaları vardır :

Fiyat artışları (enflasyon), pazardaki talebin azaltılması veya paranın değerinin artırılması ile kontrol edilebilir. Para değerini artırmak için dolaşımdaki para miktarı ve kontrol edilebilen harcamalar azaltılabilir. Talebi azaltmak için ise kişilerin harcama güçleri kısıtlanabilir. (Sıkı para politikası, kemer sıkma politikası). Bir diğer örnek, bir bölgenin eko-

nomik gelişmesinin kontrolu için verilebilir. Ekonomik gelişmeyi hızlandırmak için, o bölgeye yatırım ve nitelikli insan gücü akışını sağlamak gerekir. Bu da, özendirici (teşvik, prim, yan ödenek gibi) ya da zorlayıcı (rotasyon, mecburi hizmet gibi) önlemlerle sağlanabilir.

Kontrol işlemlerinin bu örneklerdeki benzer tarafından yararlanarak «kontrol» ve «otomatik kontrol» için şu genel tanımları yapabiliriz:

Kontrol : İncelenen davranışların belirli istenen değerler etrafında tutulması veya istenen değişimleri göstermesi için yapılanlar, genel anlamda kontrol işlemlerini tanımlarlar.

Otomatik Kontrol : Kontrol işlemlerinin, kontrol edilmek istenen olay etrafında kurulmuş bir karar mekanizması tarafından, doğrudan insan girişimi olmaksızın gerçekleştirilebilmesidir.

Kontrol işlemlerinin belirlenmesi ve otomatik kontrol mekanizmalarının kurulması, öncelikle bu işlemleri gerektiren amaçların ve istenen davranışların kesin biçimde tanımlanmasını, buna bağlı olarakta, olayların oluştuğu ortamın, olayların **sebep-sonuç ilişkilerinin** ve **davranış özelliklerinin** incelenmesini gerektirir. «Sistem Dinamiği ve Kontrol» bilim dalı, bu konuların bilimsel yöntemlerle incelendiği bilim dalıdır.

Otomatik Kontrol, özellikle mühendislik sistemlerinde giderek daha çok önem kazanmaktadır. Bunun nedenlerini şöylece sıralayabiliriz:

— Otomatik Kontrol, insanları monoton tekrarlı işlerden kurtararak zekâ ve düşünebilme yeteneklerini daha iyi kullanabilecekleri işlere yönelmelerini sağlar.

— Otomatik Kontrol, insanın fizyolojik yeteneklerini aşan (çok hızlı, çok hassas, büyük kuvvetler gerektiren gibi) uygulamalarda insanın hâkimiyetini kolaylaştırır.

— Otomatik Kontrolün mühendislik sistemlerinde kullanılması, gerek teorik tasarım, gerekse gerçekleştirme ve uygulama bakımından daha sade, daha esnek, kolayca ayarlanabilen ve verimi yüksek çözümlere imkân vermektedir.

— Bilgisayarların mühendislik uygulamalarında yaygın biçimde kullanılması, Kontrol ve Otomatik Kontrol yöntemlerinin de daha etkin olarak uygulanmasına yol açmıştır.

1.2 TEMEL KAVRAMLAR

1.2.1 Sistem Kavramı

Değişik alanlardaki sistemlerin bilimsel biçimde incelenmesi aşağıdaki genel tanımın yapılmasını sağlamıştır:

Sistem : Belirli bir amacı sağlayan bir «bütün» oluşturacak biçimde fonksiyonel bağlantıları bulunan etkileşimli ya da ilişkili elemanlar kümesine «sistem» denir.

Bu tanımdan şu önemli özellikler anlaşılır.

— **Bir sistem, sınırları içinde bir bütün oluşturur.** Sistemin sınırları, sistemin oluşturulmasındaki amaca ya da sistem üzerinde yapılan incelemenin amacına göre belirlenir. Bu sınırların dışına sistemin «çevre»si denir. Sistem, çevresinden bu sınırlar üzerinden etkilenir, çevresini de gene bu sınırlar üzerinden etkiler.

— **Bir sistem, birbiri ile etkileşimli elemanlardan oluşur.** Sistemin davranış özelikleri, hem elemanların bireysel davranış özeliklerine, hem de elemanlar arasındaki etkileşim özeliklerine bağımlıdır.

Şekil 1.1 Sistem, elemanları sınırı ve çevresi.

Yukarıdaki tanım ve özeliklere göre çeşitli alanlardan sistem örnekleri verebilir.

— **Biyolojik sistemler :** Hücrelerden oluşur, tüm hücreler birbirini etkiler, hücrelerden bir kısmının farklı biçimde gelişmeye başlaması tüm biyolojik sistemin dengesini ve davranışını etkiler.

— **Fizyolojik sistem :** Örneğin kan dolaşım sistemi, kalp, damarlar ve kandan oluşur. Ancak, besin, oksijen ve hormonlar yolu ile bilgi taşıdığı için vücudun fonksiyonlarını etkileyen diğer sistemlerle (solunum, sindirim, v.d.) etkileşim içindedir.

— **Demografik sistem :** Belirli bir bölgenin nüfusunun değişimi, o bölgenin doğal veya idarî sınırları içindeki sosyal ve ekonomik elemanlara bağlıdır. Ancak, çevre bölgelerin nüfus ve sosyo-ekonomik koşulları da o bölgenin nüfusunu etkiler. (Kentleşme, mevsim işçiliği gibi).

Çeşitli fiziksel elemanların biraraya getirilmesi ile oluşturulan mühendislik sistemlerinden aşağıdaki örnekler verilebilir.

— **Termik makinalar :** Silindir-piston sistemi, termodinamik genleşmeyi doğrusal kayma hareketine çevirir. Böylece yakıtın kimyasal enerjisini mekanik kayma enerjisine dönüştürür. Piston kolu-krank mili sistemi, kayma hareketini ve enerjisini, dönme hareketi ve enerjisine dönüştürür. Birden fazla silindir-piston-piston kolu-krank sisteminin birbirine belirli bir düzende bağlanması, ardışık git-gel hareketinden düzenli dönme hareketinin elde edilmesini sağlar. Bu mekanik sisteme, yakıt akışını düzenleyen karbüratör sisteminin ve yanma olayını düzenleyen ateşleme sisteminin eklenmesi ile «motor» sistemi elde edilir. Bir motorun istendiği gibi çalışmasını sağlamak için yukarıda tanımlanan tüm alt sistemlerin bireysel çalışmalarının ve birbirlerine etkilerinin istenenlere uygun biçimde olması gerekir. Eksantrik milinin hareket verdiği subaplar ve distribütör bu uygunluğu gerçekleştirirler.

— **Güç üretim sistemi :** Elektrik gücü üretiminde kazan veya baraj, türbin, jeneratör, türbojeneratör grubu, hidrolik veya termik santral ve bağlantılı güç üretim dağıtım şebekesi, sınırları inceleme ve tasarım amaçlarına göre genişletilmiş sistemlerdir. Ülke yüzeyine yayılmış bağlantılı güç üretim sistemi çok sayıda hidroelektrik ve termik santralı, ayrıca güç dağıtım şebekesini içerir. Bir türbin-jeneratör grubunun devreden çıkması, tüm sistemin davranışını etkileyebilir (Şekil 1.2).

Şekil 1.2 Güç üretim sistemi.

1.2.2 Giriş, Çıkış, Kumanda Değişkenleri, Bozucu Değişkenler

Giriş değişkenleri : Bir sisteme, o sistemin dışından uygulanan, diğer değişkenlerden bağımsız biçimde değişebilen ve sistemin davranışını etkileyen değişkenlere sistemin «giriş değişkenleri» kısaca «girişleri» denir.

Çıkış değişkenleri : Bir sistemin davranışını belirleyen değişkenler arasında tasarım ya da gözlem açısından en belirleyici olanlarına sistemin «çıkış değişkenleri», kısaca «çıkışları» denir. Çıkışlar genellikle gözlenebilir (ölçülebilir) değişkenlerdir. Bir sistemin girişleri ve çıkışları arasında bir «sebep-sonuç ilişkisi» vardır.

Kumanda değişkenleri : Bir sistemin girişleri arasında, istendiği gibi değiştirilebilen (kumanda edilebilen) ve sistemin çıkışlarını en çok etkileyen girişlere «kumanda değişkenleri», «kumanda girişleri», kısaca «kumanda» denir.

Bozucu değişkenler : Bir sistemin girişleri arasında kumanda edilemeyen ve değişimi önceden kestirilemeyen girişlere «Bozucu değişkenler», «Bozan etkenler» kısaca «bozucular» denir. Sistem girişleri arasında kumanda edilemediği halde değişimleri ölçülebilen ya da önceden belirlenebilen gi-

rişler, bozucu olarak nitelendirilmezler. Bir sistem, çevresinden girişleri ile etkilenir. Çevresini çıkışları ile etkiler. Örnek olarak bir uçağın davranışını düşünürsek, yukarıdaki değişkenler,

Sistem : Uçak

Girişleri : Uçak motoru itme kuvveti F, yükseklik kumanda yüzeyi açısı α, yön kumanda yüzeyi açısı β, kanatçık açısı γ, yatay rüzgar hızı u, düşey hava akımları hızı w

Çıkışları : Uçağın yerden yüksekliği H, hızı V, yönü θ, yatma açısı Φ

Kumandalar : İtme kuvveti F, yükseklik ve yön kumandaları α, β ve γ

Bozucular : Yatay rüzgar hızı u, düşey hava akımları hızı w

olarak tanımlanabilirler.

Sistemlerin, giriş ve çıkışlarının şematik biçimde gösterilmesi kolaylık sağlar. Genellikle, sistem bir dikdörtgenle, girişler bu dikdörtgene yöneltilmiş oklarla çıkışlar da bu dikdörtgenden çıkan oklarla gösterilirler. Şekil 1.3 de bu gösterme biçimi uçak örneğine uygulanmıştır.

Şekil 1.3 Sistemlerin ve Uçak sisteminin gösterilmesi.

1.2.3 Kontrol

Bir sistemin çıkışlarını istenen değerlere yöneltmek ya da önceden belirlenmiş bir davranışı izlemelerini sağlamak için sistemin kumanda girişleri üzerinde yapılan işlemlere «kontrol» denir.

Kontrol sistemi : Bir sistemin genel olarak davranışını ve çıkışlarını, bozucu değişkenlerin etkisine rağmen, istenen değerlere yöneltmek için gerekli kontrol işlemlerini gerçekleştirmek üzere o sistem etrafında kurulan sisteme «Kontrol Sistemi» denir. «Kontrol Sistemi», kontrol edilmek istenen sistemle bir bütün oluşturur. Öyle ki, bu yeni sistem, istenen davranışı ve diğer kontrol amaçlarını kolayca ayarlanabilir bir biçimde sağlar.

Şekil 1.4 Sistem ve Kontrol Sistemi.

1.2.4 Kontrol Çevrimi, «Açık» ve «Kapalı» Kontrol Çevrimleri

Kontrol amaçlarının kontrol sistemi yardımıyla sağlanması, aşağıdaki üç temel işlemin kontrol sistemi tarafından gerçekleştirilmesini gerektirir :

— **Sistem davranışının gözlenmesi (ölçme) :** Fiziksel sistemlerde bu işlem, sistemin çıkışlarının kontrol sisteminde kullanılabilecek biçimde ölçülmesi ve gösterilmesi işlemidir.

— **Sistem davranışının değerlendirilmesi ve kumandanın belirlenmesi (kontrol) :** Sistem çıkışlarının kontrol amaçları (istenen değerler) ile karşılaştırılması sonunda, sisteme uygulanacak kumandanın belirlenmesi işlemidir.

— **Kontrol çevrimi :** Yukarıda sıralanan ölçme-kontrol-kumanda fonksiyonlarının gerçekleştirilmesi için oluşturulan elemanlar ya da matematik işlemler dizisine «kontrol çevrimi» denir.

Kontrol çevriminin temel elemanları, temel kontrol fonksiyonlarına göre :

— Ölçme elemanı

— Karşılaştırma ve kontrol elemanı

— Kumanda elemanı dır.

Bu elemanların birbirleri ile uyum içinde çalışmasını sağlayan devrelerle, güç düzeylerini veya değişim aralıklarını birbirine uydurmak için kullanılan yükselticiler kontrol çevrimlerini tamamlar.

«Açık» kontrol çevrimi, Açık çevrimli kontrol : Bir kontrol çevriminde, kontrol ve kumanda, sisteminin çıkışlarına fiziksel (organik) bir bağlantı ile bağımlı olarak belirlenmiyorsa, kontrol çevrimi «açık»tır. Çıkışların kumandayı kontrol sistemi içinde doğrudan etkilemediği kontrol türüne de «açık çevrimli kontrol» denir. Açık çevrimli kontrol, genellikle, kumanda edilen sistemin yapısının ve sisteme etkiyen diğer girişlerin önceden çok iyi bilindiği uygulamalarda kullanılır.

Şekil 1.5 «Açık» kontrol çevrimi.

«Kapalı» kontrol çevrimi, kapalı çevrimli kontrol : Bir kontrol çevriminde kontrol ve kumanda, sistemin çıkışlarındaki değişmelere organik bir bağlantı ile doğrudan bağımlı biçimde belirleniyorsa kontrol çevrimi «kapalı»dır. Kumandanın çıkışlardaki değişmelerden etkilendiği, bu değişmelere göre belirlendiği bu kontrol türüne de «Kapalı çevrimli kontrol» denir. Kapalı çevrimli kontrolda kontrol işlemleri ve sebep-sonuç ilişkileri kendi üzerinde kapalı bir dizi oluştururlar. Sistem çıkışındaki değişmeler, sisteme uygulanacak kumanda'nın belirlenmesi için, daha önceki adımlara (karşılaştırma-kontrol) «geri» gönderildiği için, bu türden kontrol çevrimlerine «geri beslemeli» kontrol çevrimleri de denir.

Şekil 1.6 «Kapalı» kontrol çevrimi.

1.2.5 Otomatik kontrol sistemi

Otomatik kontrol sistemi, bir sistem etrafında, önceden belirlenmiş kontrol amaçlarını «insan girişimi olmadan gerçekleştirmek» üzere kurulmuş birbiri ile ve sistemle bağlantılı elemanlardan oluşur.

Otomatik kontrol sistemlerinde kumanda, kontrol çevrimi elemanlarınca bu elemanlar üzerinde ayarlanabilen kontrol amaçlarına ve sistem çıkışlarındaki değişmelere göre hesaplanır ve sisteme uygulanır. Dolayısı ile Otomatik Kontrol Sistemleri genelde kapalı çevrimli, geri beslemeli kontrol sistemleridir.

Negatif geri besleme : Girişindeki artışların çıkışında da artışlara sebep olduğu bir sistemi ele alalım ve kontrol amacı, çıkışı sabit bir değerde tutmak olsun. Böyle bir sistemde çıkış, istenen değere göre bir artış (pozitif değişme) göstermiş ise, kumandanın azaltılarak (negatif değişme) çıkışın istenen değere geri dönmesi sağlanmalıdır. Eğer çıkış, istenen değere göre bir azalma (negatif değişme) göstermiş ise, bu kez kumanda da bir artış (pozitif değişme) sağlanarak çıkışın istenen değere yükseltilmesi gerekir.

Çıkıştaki değişmelerin kumandaya etkisi ters yönde olmaktadır. Bunun için çıkış değişmelerinin karşılaştırma ve kontrol elemanına negatif işaretle beslenmesi gerekir. Negatif geri besleme Otomatik Kontrol Çevriminin temel özeliklerinden biridir.

Hata ve sapma : Çıkışın herhangi bir anda, istenen değere göre farkına «hata» denir. Karşılaştırma elemanı, çıkışı istenen değerle karşılaştırarak hata değişmelerini belirler. Kontrol organı, bu hata değişmelerinin bir fonksiyonu olarak kumanda değişmelerini belirler ve kumanda organına gönderir. İstenen değeri, t zaman değişkeni olmak üzere, R(t) (referans) ile çıkışı da Y(t) ile gösterirsek,

Hata : $E(t)=R(t)-Y(t)$

olarak tanımlanır.

Eğer değişkenlerin belirli değerler etrafında değişmeleri inceleniyorsa, çıkışın belirli değeri Y ye göre değişmesine «sapma», kumandanın belirli değeri U ya göre değişmesine «düzeltme» denir. Hata ve Sapmanın belirli değeri olarak genellikle sıfır alınır. (Çıkışın istenen değeri sağladığı durum). Buna göre bu değişmeler :

Sapma	:	$y(t)=\Delta Y(t)=Y(t)-\bar{Y}$
Düzeltme	:	$u(t)=\Delta U(t)=U(t)-\bar{U}$
Referans değişmesi	:	$r(t)=\Delta R(t)=R(t)-\bar{R}$
Hata değişmesi	:	$e(t)=\Delta E(t)=E(t)-\bar{E}=E(t)$

olarak tanımlanır.

Otomatik kontrol sistemlerinin davranışları istenen değere, referans değerine göre incelendiği için bu sistemler «sıfır hata» ve «sıfır sapma» etrafında çalışırlar. Hata değişmesi ifadesini açarsak :

$$e(t)=\Delta E(t)=\Delta(R(t)-Y(t))=\Delta R(t)-\Delta Y(t)=\Delta r(t)-\Delta y(t)$$

buluruz. Çıkış değişmelerinin işareti, negatif geri beslemeyi gösterir.

1.2.6 Kontrol Sistemlerinin İncelenmesi ve Tasarlanması

Kontrol sistemi, kontrol edilecek sisteme (ana sistem) bağlanarak onunla bir bütün oluşturur ve sistemin davranışının kontrol amaçlarına uygun biçimde gerçekleşmesini sağlar. Öncelikle ana sistemin giriş ve çıkışlarının belirlenip davranışının incelenmesi gerekir. Daha sonra kontrol sistemi elemanları seçilerek ana sisteme eklenir. Bu elemanların kendi aralarındaki ve ana sistem üzerindeki etkileri, **kontrol** amaçlarını sağlamak üzere ayarlanır. Sistemler, günümüzde, kontrol sistemleri ile birlikte tasarlanmaktadır.

1.3 SİSTEMLERDE BİLGİ AKIŞININ VE TEMEL İŞLEMLERİN GÖSTERİLMESİ

Sistemlerin sadece giriş ve çıkışlarının belirlenmesi ve bir önceki bölümde olduğu gibi şematik biçimde gösterilmesi ayrıntılı bir inceleme için

yeterli değildir. Sistem elemanlarının işlevlerinin, bireysel giriş ve çıkışlarının ve sistem elemanları arasındaki bilgi akışının da gösterilmesi gerekir. Sistem elemanlarının etki ve sebep-sonuç bağıntılarına göre sıralanmaları, sistemin «yapısı» nın da incelenmesini sağlar. Bu şekilde elde edilen diyagrama sistemin **«fonksiyonel diyagramı»** denir.

Fonksiyonel diyagramdaki elemanların fonksiyonları matematik operatörlerle ifade edilip, sistemin incelenmesine matematik bir temel oluşturduğu zaman bu diyagrama sistemin **«blok diyagramı»** denir.

Bu bölümde «fonksiyonel diyagram» ve «blok diyagramı» nın nasıl oluşturulduğu basit örneklerle gösterilecek, bu konu daha sonra ayrıntılı biçimde işlenecektir.

1.3.1 Fonksiyonel Diyagram

Şekil 1.7 de bir depo ve girişine bağlanmış bir vanadan oluşan bir sistem gösterilmektedir.

Parametreler :	A	:	Depo kesit alanı
	C_1, C_2	:	Vana katsayıları
	ρ	:	Sıvı yoğunluğu
	g	:	Yerçekimi ivmesi
Değişkenler :	P_b	:	Besleme basıncı
	P	:	Depo dibi basıncı
	H	:	Sıvı düzeyi yüksekliği
	$Q_g, Q_ç$	:	Depoya giriş çıkış debileri

Bu sistemin elemanlarını teker teker inceleyelim :

Vana : Vanadan geçen debi, vananın iki ucu arasındaki basınç farkına ve vana açıklığına bağlıdır. Küçük değişmeler için doğrusal yaklaşımla vana elemanının davranışını şöylece ifade edebiliriz :

$$\Delta Q_g = C_1 \Delta a + C_2 \Delta (P_b - P) \qquad C_1, C_2 : \text{ orantı katsayıları}$$

Şekil 1.7 Depo - Vana Sistemi ve değişkenler.

Depo : Kesit alanı A olan depo, giriş ve çıkış debileri arasındaki farkı depolamaktadır. Buna göre depo hacmı V ve seviyesi H için

$$\frac{dV}{dt}=Q_g-Q_ç \;;\; V=AH \;;\; A\,\frac{dH}{dt}=Q_g-Q_ç$$

Küçük değişmeler için son ifade :

$$A\,\frac{d(\Delta H)}{dt}=\Delta(Q_g-Q_ç)\Longrightarrow\Delta H=\frac{1}{A}\int_0^t(\Delta Q_g-\Delta Q_ç)\,dt$$

biçiminde yazılır.

Depo-Vana etkileşimi : Depo girişindeki basınç P nin sıvı seviyesine bağlılığı

$P=\rho gH$; $\Delta P=\rho g\Delta H$ ρ : sıvı yoğunluğu, g : yerçekimi ivmesi ifadesi ile tanımlanır.

Giriş ve Çıkışlar : Bu sistemde, depo sıvı seviyesinin değişmelerinin incelendiği ve sıvı seviyesinin kontrolu için giriş vanasının açılıp kapatıldığı düşünülerek eleman giriş ve çıkışları tanımlanır :

Vana :	girişler :	— vana besleme basıncı: P_b, değişmesi	ΔP_b
		— depo girişindeki basınç: P, değişmesi	ΔP
		— vana açıklığı: a, değişmesi	Δa
	çıkış :	— Depo giriş debisi Q_g, değişmesi	ΔQ_g
Depo :	girişler :	— Depo giriş debisi Q_g, değişmesi	ΔQ_g
		— Depo çıkış debisi $Q_ç$, değişmesi	$\Delta Q_ç$
	çıkış :	— Depo sıvı seviyesi H, değişmesi	ΔH

Depo-vana etkileşimi : $P=\rho gH$, $\Delta P=\rho g\Delta H$

Sistemin yapısal diyagramı, bu tanımlara göre, Şekil 1.8 deki gibidir.

Şekil 1.8 Depo - Vana sisteminin yapısal diyagramı.

Sistemin kumanda girişi, vana açıklığı a, çıkışı da depo seviyesi H dır. Diğer değişkenlerden P, H'ya bağımlı bir iç değişken niteliğindedir. P_b ve $Q_ç$ nin ΔP_b ve $\Delta Q_ç$ değişmeleri ise, önceden bilinemedikleri varsayılarak, bozan etkenler olarak kabul edilecektir.

Sistemin fonksiyonel diyagramı, sistemdeki matematik işlemlerin ve eleman bağıntılarının özel sembollerle yapısal diyagramda gösterilmesi yolu ile elde edilir.

Şekil 1.9 da depo vana sisteminin fonksiyonel diyagramı gösterilmiştir.

Şekil 1.9 Depo - Vana Sisteminin fonksiyonel diyagramı.

1.3.2 Kazanç-Transfer Fonksiyonu

Girişi ve çıkışı belirlenmiş bir eleman için, giriş ve çıkış arasındaki bağıntıyı iki türlü ifade etmek mümkündür :

— Kendine özgü dinamik davranış göstermeyen, ya da dinamik davranışı sabit kararlı değerlere yakınsamış elemanlar için «statik kazanç» veya doğrudan «kazanç» ile,

— Kendine özgü dinamik davranışı olan elemanlar için ise giriş-çıkış bağıntısının bir matematik operatör ile ifade edildiği «transfer fonksiyonu» ile.

Kazanç : (Statik Kazanç) «Sistemin girişindeki birim değişme için çıkışında gözlenen değişme» dir. Sistem giriş X, çıkışı Y ise, kazanç, $K=\Delta Y/\Delta X$ olarak tanımlanır. (Şekil 1.10). Bir elemanın statik kazancı K biliniyorsa, girişindeki ΔX değişmesinin çıkışında neden olduğu ΔY değişmesi, $\Delta Y=K.\Delta X$ olarak bulunur.

$$K = \frac{\Delta X}{\Delta Y} \qquad \Delta Y = K.\Delta X$$

Şekil 1.10 Statik Kazanç.

Transfer fonksiyonu (geçiş fonksiyonu) : Dinamik davranışı olan sistemdeki diferansiyel işlemler (türev, integral) bir matematik operatör yardımıyla ifade edilerek, sistem çıkışının bu operatör cinsinden yazılmış ifadesinin, sistem girişinin bu operatör cinsinden ifadesine oranı, o sistemin «Transfer Fonksiyonu»dur. Sistem girişi bir s operatörüne göre X(s), çıkışı da X(s) nin bir fonksiyonu olarak Y(s)=G(s) . X(s) biçimde yazılabiliyorsa, sistemin transfer fonksiyonu (geçiş fonksiyonu) G(s)=Y(s) / X(s) olarak tanımlanır. (Şekil 1.11). Transfer fonksiyonu G(s) olan (bilinen) bir sistemin girişinin zaman içindeki değişimleri X(s) biçiminde biliniyorsa, çıkışının değişimleri yine s operatörü cinsinden Y(s)=G(s)X(s) olarak bulunur.

Şekil 1.11 Transfer fonksiyonu.

Lineer Sistem Dinamiği ve Otomatik Kontrol alanında zamana göre sürekli değişimler için genellikle Laplace operatörü s ve Laplace dönüşümü kullanılır.

1.3.3 Blok Diyagramı

Blok diyagramı, fonksiyonel diyagramdaki elemanların kazanç ve transfer fonksiyonlarının, elemanları temsil eden bloklar çine yazılması ile elde edilir. Kazanç, genellikle giriş değişmelerinin sabit bir katsayı ile çarpımı işlemini tanımlar. Blok diyagramlarındaki toplama çıkarma işlemleri için Şekil 1.12 teki sembol kullanılır.

Şekil 1.12 Cebirsel toplama sembolü

Yukarıdaki tanımları örneklemek için yine depo-vana sistemini ele alalım.

Vana :	Girişleri :	Δa , $\Delta(P_b - P)$
	Çıkışı :	ΔQ_g
	Eleman bağıntısı :	$\Delta Q_g = C_1 \Delta a + C_2(\Delta P_b - \Delta P)$
Depo :	Girişleri :	ΔQ_g , $\Delta Q_ç$
	Çıkışı :	ΔH
	Eleman bağıntısı :	$A\, d(\Delta H)/dt = \Delta(Q_g - Q_ç) = \Delta Q_g - \Delta Q_ç$

Bu denklemin her iki tarafına da Laplace dönüşümünü uygulayarak aslında birinci mertebeden bir diferansiyel denklem olan eleman bağıntısını

$$A\, s\Delta H(s) = \Delta Q_g(s) - \Delta Q_ç(s)$$

dolayısı ile

$$\Delta H(s) = (1/As)\,(\Delta Q_g(s) - \Delta Q_ç(s))$$

biçiminde yazabiliriz.

Vana bağıntısı ve basınç ile seviye etkileşim bağıntısını da s cinsinden :

$$\Delta Q_g(s) = C_1 \Delta a(s) + C_2(\Delta P_b(s) - \Delta P(s))$$

$$\Delta P(s) = \rho g \Delta H(s)$$

biçiminde yazabiliriz. Son üç denklemle sistemin blok diyagramı. Şekil 1.13 te gösterildiği gibi oluşturulur.

Şekil 1.13 Depo - Vana sisteminin ayrıntılı blok diyagramı.

Vana besleme basıncının sabit olduğu varsayılırsa, ($\Delta P_b=0$) Şekil 1.14 teki sadeleştirilmiş blok diyagramı elde edilir.

Şekil 1.14 Depo - Vana sisteminin blok diyagramı.

Blok diyagramının elde edilmesinde kazançlar ve transfer fonksiyonları, elemanların giriş ve çıkışlarındaki küçük değişmeler için yazılmış, bu küçük değişmeler için sistemin davranışının «doğrusal» olduğu varsayılmıştır. Bu da, vana ve depo karakteristiklerinde «doğrusal sistemlerin süperpozisyon ilkesi»ni kullanma, yani cebirsel toplama yapma imkanını sağlamıştır. Sonuç olarak, kazanç, transfer fonksiyonu ve blok diyagramı şu önemli iki özeliği taşır:

— Kazanç, transfer fonksiyonu ve blok diyagramı, giriş ve çıkış değişkenlerindeki küçük değişmeler için tanımlanırlar.

— Blok diyagramında tüm bağıntılar doğrusaldır, süperpozisyon ilkesi kullanılabilir. Doğrusal olmayan karakteristikler, küçük değişmeler için doğrusallaştırılmıştır.

Bu özeliklere göre, depo vana sistemi için şu tanımlar yapılabilir :

— vana açıklık-debi kazancı: $C_1=\Delta Q_g/\Delta a$ ($\Delta P_b-\Delta P=0$ varsayılır)

— vana basınç-debi kazancı: $C_2=\Delta Q_g/(\Delta P_b-\Delta P)$ ($\Delta a=0$ varsayılır)

— depo giriş debisi-seviye transfer fonksiyonu:
$G(s)=\Delta H(s)/\Delta Q_g(s)=1/As$

— depo çıkış debisi-seviye transfer fonksiyonu :
$G(s)=\Delta H(s)/\Delta Q_ç(s)=1/As$

— depo transfer fonksiyonu: $\Delta H(s)/(\Delta Q_g(s)-\Delta Q_ç(s))=G(s)=1/As$

Kazanç, Transfer fonksiyonu ve Blok diyagramı kavramındaki küçük değişmeler genellikle sistemin kararlı denge durumu etrafındaki küçük değişmelerdir. Önce sistemin giriş ve çıkışları arasındaki bağıntılardan kararlı denge durumu bulunmalı, sonra, giriş ve çıkışların bu durumu sağlayan sabit değerleri etrafında küçük değişmeleri için elemanların kazanç ve transfer fonksiyonları tanımlanarak blok diyagram oluşturulmalıdır. Mühendislik sistemlerinde kullanılan elemanların giriş-çıkış bağıntıları genellikle doğrusal değildir. Dolayısı ile kazanç ve transfer fonksiyonlarının bulunması, bu bağıntıların denge durumu etrafında küçük değişmeler için doğrusallaştırılmasını (yaklaşık doğrusal ifadelerin bulunmasını) gerektirir.

Örnek 1.1: Şekil 1.15 de görülen mekanik tahrik sisteminin fonksiyonel diyagramını ve blok diyagramını elde ediniz.

Şekil 1.15 Elektromekanik tahrik sistemi.

Sistemin güç kaynağı olan doğru akım elektrik motorunun sabit bir ∅ manyetik alanı için statorundan geçen akım ile orantılı bir moment verdiğini, elektrik motorunun bir J ataletini döndürdüğünü varsayalım. Sistemin sürtünme momenti hızı ile orantılı olsun (viskoz sürtünme), sistemin belirli bir M_d direnç momenti için belirli bir $\omega=\Omega$ hızında dönmek üzere tasarlanacağını düşünelim. Eleman bağıntıları aşağıdaki gibi yazılacaktır.

Motor sürme momenti :	$M_m=kI$		
İvmelendirme momenti :	$M_i=J\dot{\omega}$	J :	atalet momenti
Sürtünme momenti :	$M_s=B\omega$	B :	viskoz sürtünme katsayısı
Moment dengesi :	$M_m=M_i+M_s+M_d$		

ya da

$$kI=J\dot{\omega}+B\omega+M_d \tag{1.1}$$

olacaktır.

Bu sistem sabit hızda dönerkenki dengesi, $\omega=\Omega=Sbt$, $\omega^{\cdot}=0$ dan

$$kI_d=B\omega+M_d \tag{1.2}$$

ile belirlidir. Sistem girişlerinin I_d ve M_d, çıkışının da ω olduğunu düşünürsek Şekil 1.16 daki statik blok diyagramını elde ederiz.

Şekil 1.16 Elektromekanik tahrik sisteminin statik blok diyagramı.

Ancak bu sistemin, girişindeki I akımına ve direnç momenti M_d deki değişmelere göre (1.1) diferansiyel denklemi ile tanımlanan bir dinamik davranışı vardır. Eğer sistemimizin nasıl hızlandığını, yavaşladığını, yani zaman içindeki (dinamik) davranışlarını incelemek istiyorsak blok diyagramı değişik bir görünüm olacaktır. (1.2) denklemi ile ifade edilen denge durumuna göre değişimleri

$$I=I_d+\Delta I\ ,\ M_d=M_d+\Delta M\ ,\ \omega=\Omega+\Delta\omega$$

biçiminde yazıp (1.1) de yerleştirirsek

$$k(I_d+\Delta I)=J\frac{d}{dt}(\Omega+\Delta\omega)+B(\Omega+\Delta\omega)+(M_d+\Delta M) \tag{1.3}$$

elde ederiz. Ancak, Sabit Ω değeri için (1.2) den $kI_d=B\Omega+M_d$ olduğu için değişmelerin davranışı

$$k\Delta I=J\Delta\omega^{\cdot}+B\Delta\omega+\Delta M \tag{1.4}$$

ile ifade edilecektir.

Sistemin çıkışı $\Delta\omega$, $\Delta\omega^{\cdot}$ nın zamanına göre integre edilmesi ile elde edileceğinden

$$\Delta\omega^{\cdot}=(k\Delta I-B\Delta\omega-\Delta M)/J$$

ile aşağıdaki fonksiyonel diyagrama gelinir. (Şekil 1.17)

Şekil 1.17 Elektromekanik tahrik sisteminin fonksiyonel diyagramı.

$$L[\Delta\omega(t)]=\Delta\Omega(s)\ ,\quad L[\Delta I(t)]=\Delta I(s)\ ,\quad L[\Delta M(t)]=\Delta M(s)$$

Laplace dönüşümü ve operatörünü kullanarak ve

$$L[\Delta\omega\cdot(t)]=s\,\Delta\Omega(s)-\Delta\Omega(0)\ \text{ da }\ \Omega(0)$$

ilk koşulunu sıfır alarak (sistemin statik denge durumunda olduğunu varsayarsak) Şekil 1.18 deki blok diyagramı elde edilir.

Şekil 1.18 Elektromekanik tahrik sisteminin blok diyagramı.

(1.3) ifadesinin aynı yaklaşımla kullanılması ile aynı blok diyagramı değişkenlerin denge durumu etrafındaki değişmeleri yerine mutlak değişmeleri cinsinden oluşturulacaktır (Şekil 1.19). Ancak, mutlak değişmeleri kullanmanın iki sakıncası vardır.

— Statik denge durumu ayrıca incelenmemekte, sistem sanki sıfır değer etrafında çalışıyormuş gibi gözetilmektedir. Halbuki kontrol sistemleri hep istenen değerler için kurulur.

— Blok diyagramı, bu biçimde ancak sistem büyük değişmeler için de doğrusal kalıyorsa geçerlidir. Halbuki, fiziksel sistemlerin çok az bir bölümü büyük değişmeler için doğrusal karakteristiklidir.

Şekil 1.19 Mutlak değişmeler cinsinden blok diyagramı.

Her iki inceleme tarzının farklılıkları Şekil 1.20 de gösterilmiştir.

Şekil 1.20.

1.3.4 Akış Diyagramı

Akış diyagramının blok diyagramı ile en önemli farklılığı, değişkenlerin (giriş ve çıkışların) noktalarla, blok diyagramında bloklar içinde gösterilen matematik işlemlerin ise transfer hatları ile gösterilmesidir.

Şekil 1.21 de bu gösterme biçimine örnekler verilmiş ve önceki kısımda incelenen mekanik tahrik sisteminin akış diyagramı gösterilmiştir.

Şekil 1.21 Akış diyagramı.

1.4 KONTROL ÇEVRİMİNİN TEMEL ELEMANLARI

Kontrol çevriminin temel elemanları, 1.2.4 kısmında belirtildiği gibi

— Ölçme elemanı ve devresi

— Kontrol elemanı ve devresi

— Kumanda elemanı ve devresi dir.

Kontrol çevriminin, kontrol edilen sistemle birlikte oluşturduğu genel yapı, Şekil 1.22 de gösterilmiştir.

Şekil 1.22 Kontrol çevriminin genel yapısı.

Kontrol çevriminin temel elemanları, fonksiyonlarına göre değişik güç düzeylerinde çalışırlar. Güç düzeyi, seçilen kontrol teknolojisine bağlı olup eleman yapısını etkiler. Bu bakımdan kontrol çevrimini, kontrol teknolojileri ve güç düzeyleri açısından incelemekte yarar vardır.

1.4.1 Ölçme elemanı ve devresi

Sistem çıkışındaki değişmelerin gözlenmesi (ölçülmesi) genellikle çıkış büyüklüğü değişmelerinin bilgi iletme ve işleme için daha uygun fizik-

sel büyüklük değişmelerine çevrilmesi ile yapılır. Ölçme elemanı ve devresi iki bölümden oluşur.

— **Duyar eleman :** Sistemin çıkış büyüklüğündeki değişmeleri, seçilen ölçme ve kontrol teknolojisine göre, gözlenebilir ve yükseltilebilir biçimde çıkış ile aynı ya da başka bir fiziksel büyüklüğün değişmelerine dönüştürür. Ölçme işleminin, sistem çıkışını ve davranışını etkilememesi için sistem güç düzeyine kıyasla çok küçük güçlerle çalışan duyar elemanlar kullanılır.

— **Ölçme yükseltici devresi :** Duyar eleman çıkışının, sistem çıkışının değişim aralığına göre ölçeklendirilmesi (kalibrasyon) gerekir. Ayrıca çok küçük güç düzeyindeki bu çıkışın kontrol elemanı standart değişme aralığına uydurulması da gerekir. Ölçme yükseltici devresi, bu fonksiyonları gerçekleştirmek üzere önceden seçilmiş kontrol teknolojisine uygun elemanlardan oluşur. Yükseltici devre için gerekli güç ya sistemi en az etkileyecek biçimde sistem gücünden, ya da, özellikle hassas kontrol sistemlerinde, sistem dışındaki bir güç kaynağından sağlanır.

1.4.2 Kontrol elemanı ve devresi :

Kontrol elemanı ve devresinin temel fonksiyonları :

— Sistem çıkışının kontrol amaçlarına uygunluğunu belirlemek

— Sistemi kontrol amaçları doğrultusunda yönetmek için gerekli kontrol değişmelerini belirlemek, üretmektir.

Kontrol elemanı ve devresinde bu temel fonksiyonları gerçekleştirmek için üç ana bölüm vardır. Bunlar :

— Kontrol amaçlarının tanımlandığı ve seçilen kontrol teknolojisine uygun fiziksel büyüklüklere çevrildiği «referans girişi» bölümü.

— Ölçme değişmelerinin referans girişleri ile karşılaştırıldığı ve referansa göre sapmanın belirlendiği «karşılaştırma» bölümü.

— Kontrol edilen sistemin yapısı ve istenen performans gözetilerek önceden belirlenen bir «kontrol kanunu», «kontrol algoritması»na göre, sapma değişmelerine gerekli hesap işlemlerini uygulayan ve kontrol değişmelerini üreten «kontrol», «hesap» bölümü.

Kontrol elemanı ve devresinin girişleri, ölçme sisteminden gelen standard değişme aralığındaki, ölçülmüş sistem çıkışı ile, referans girişi bölümünde aynı aralığa getirilmiş referans girişidir. Kontrol devresi çıkışı ise, yine aynı standard aralıktaki kontrol değişmeleridir. Kontrol elemanı ve devresi, çok çeşitli alanlarda esnek biçimde kullanılabilmeleri için belirli teknolojilerde (elektronik, pnömatik, sayısal elektronik) gerçekleştirilirler. Kontrol elemanı ve devresinin güç düzeyi seçilen teknolojiye ve bilgi aktarma ve işlemenin karmaşıklığına göre değişir. Kontrol elemanı ve devresinin gücü, duyar elemanınki kadar olmasa bile, sistem gücüne kıyasla küçüktür.

1.4.3 Kumanda Elemanı (Son Kontrol Elemanı) ve devresi

Kumanda elemanı ve devresi, kontrol edilen sistemi doğrudan etkileyen son kontrol elemanı ve bu elemana gerekli güçte kumanda eden sürücü eleman ve devrelerden oluşur. Sürücü eleman, girişindeki standard aralıkta kontrol değişmelerini son kontrol elemanının değişmelerine çevirir. Son kontrol elemanı, kontrol edilen sistemin özeliklerine göre seçilir ya da boyutlandırılır. Sürücü elemanlar, sistemin, uygulama alanının ve son kontrol elemanının türüne göre, kontrol teknolojisi ile aynı, ya da ayrı teknolojilerde seçilebilirler. Kumanda elemanı ve devresinin girişi, kontrol elemanının güç düzeyinde, çıkışı ise sistem gücünü değiştirebilecek «orta» güç düzeyindedir.

Kumanda elemanı ve devresi, hem sistemi doğrudan etkiledikleri için hem de artık standard bir aralığa ayarlanamayan kumanda değişmeleri ve güç düzeyi bakımından kontrol edilen sistemin bir parçası kabul edilir. Kumanda elemanının seçimi, boyutlandırılması ve kumanda değişim aralığının belirlenmesi kumanda etkinliği bakımından ana sistem tasarımının çok önemli bir bölümüdür. Kumanda elemanı belirlenirken yalnızca statik çalışma karakteristikleri değil, sistemin kumanda girişlerine duyarlılığı, kumanda elemanının sistemin dinamik davranışına etkisi ve sistemden istenen davranış nitelikleri de gözetilmelidir.

1.4.4. Kontrol çevriminin incelenmesi ve tasarımı

Kontrol çevrimi oluşturulurken gerek ölçme elemanı ve devresi, gerekse kumanda elemanı ve devresi kontrol edilmek istenen sistemin yapısına, özeliklerine ve kontrol amaçlarına uygun biçimde seçilirler. Bu aşamadan sonra hem ölçme elemanı, hem de kumanda elemanı kontrol edil-

mek istenen sistemin parçası, elemanı olarak düşünülür. Ölçme ve kumanda elemanları ile birlikte düşünülen sistemin girişi seçilen teknolojiye göre standard bir değişme aralığındaki kontrol değişmeleri, çıkışı da yine standard bir değişme aralığındaki ölçülmüş çıkış değişmeleridir. Kontrol elemanı ve devresinin girişi (ölçülmüş sistem çıkışı) ve çıkışı da aynı aralıklarda değişeceğinden kontrol çevrimindeki tüm değişkenler aynı standard değişme aralığı için ölçeklendirilmiş olur.

Bu konuyu örneklemek için fonksiyonel diyagramını çıkardığımız vana-depo sistemini inceleyelim. Bu sistem üzerine bir seviye ölçer şamandıra, bir de levye sistemi ekleyerek giriş vanasının açıklığını değiştirdiğimizi, böylece Şekil 1.23 de gösterilen kapalı çevrim kontrol sistemini gerçekleştirdiğimizi düşünelim. Bu sistemin fonksiyonel diyagramı Şekil 1.24'de gösterilmektedir.

Şekil 1.23.

Şekil 1.24.

Sistemimizin tasarım değerleri (anma değerleri, nominal değerler) şöylece verilmiş olsun:

Besleme basıncı	: $P_b = 6$ bar $= 6 \times 10^5$ N/m²
	Sıvı: Su $\rho = 10^3$ kg/m³
En büyük giriş debisi	: $Q_{mak} = 10^{-3}$ m³/sn (60 lt/dak)
En büyük seviye	: $H_{mak} = 1{,}2$ m
Depo kesit alanı	: $A = 10^{-2}$ m²
Ortalama vana direnç kuvveti	: $F_v = 10$ N
Kararlı çalışma değerleri	: $H = 1$ m, $Q_g = Q_ç = 0{,}5 \times 10^{-3}$ m³/sn
Vana açıklığı	: % 50

a — Sistem gücü: Akışkan gücü, $E' = \Delta F v$ ifadesini herhangi bir kesit alanı S ile bölüp çarparak

$$E' = (\Delta F/S)\,(vS) = \Delta P Q$$

biçiminde bulunur. P, S kesitinin iki yanındaki basınç farkını, Q ise o kesitten geçen debiyi gösterir. Buna göre sistem gücü, kararlı çalışma halinde

$$E' = (P_b - \overline{P})\,\overline{Q} = (P_b - \rho g \overline{H})\,\overline{Q} = (6 \times 10^5 - 10^3 \times 9{,}81 \times 1) \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 295 \text{ Watt}$$

mertebesindedir. Sistem girişindeki güç ise

$$E'_b = P_b\, Q_{mak} = 6 \times 10^5 \times 10^{-3} = 600 \text{ Watt}$$

dır.

b — Ölçme sistemi: Kütlesi 0,2 kg olan bir şamandıra kullandığımızı varsayalım. Bu şamandıra, H seviyesi ile birlikte hareket edecektir. Sistemden, ölçme sırasında çekebileceği en büyük güç $E' = Fv = m_s gH$ olacaktır. Bunu hesaplamak için, $Q_ç = 0$, $Q_g = Q_{mak}$ olduğunu varsayalım. O zaman $H' = Q_{mak}/A$ olacaktır. Sayısal değerlerle

$$E' = m_s\, gH_{mak} = m_s\, g\, Q_{mak}/A = 0{,}2 \times 9{,}81 \times 10^{-3}/10^{-2} = 0{,}196 \text{ Watt}$$

mertebesindedir.

c — Kumanda sistemi: Şamandıra hareketi bir levye sistemi ile vana kumandasına iletildiğine göre, N bu levye sisteminin iletme oranı, Δa_{mak} vana açıklığının değişme aralığı, ΔH_{mak} da seviye değişme aralığı olmak üzere

$$\frac{1}{N} = \frac{\Delta a_{mak}}{\Delta H_{mak}}$$

Buna göre vana açıklığının değişme hızı da $a^{\cdot}=H^{\cdot}/N$ olacaktır.

Vana kumandası için gerekli güç $E^{\cdot}=F_v a^{\cdot}$ olduğuna göre yine, $Q_ç=0$ $Q_g=Q_{mak}$ olarak ve $N=2$ varsayarsak

$$E^{\cdot}_v=F_v\, a^{\cdot}=F_v\, H^{\cdot}/N=F_v\, (Q_{mak}/A)/N=10\times(10^{-3}/10^{-2})/2=0{,}5 \text{ Watt}$$

mertebesinde bulunur.

Bu örnekte, ölçme ve kumanda için gerekli güç, sistem dışında bir kaynaktan alınmamış, sistem gücünün bir bölümü kontrol işlemi için kullanılmıştır. İncelediğimiz uygulamada bir de ölçme ve kumanda işlemleri için sistem gücünün kullanılmasından doğan etkiyi araştıralım.

Yalnızca ölçme durumunda: Şamandıra kendi ağırlığına eş ağırlıkta suyun yer değiştirmesine yol açacaktır. Bu ağırlıkta suyun hacmi,

$$\rho\Delta V_{su}\, g=m_ş\, g \;\rightarrow\; \Delta V_{su}=m_ş/\rho=0{,}2\times10^{-3}\ m^3$$

bu hacim değişmesi yüzünden seviye H da oluşan hata ise

$$\Delta H_ö=\Delta V_{su}/A=0{,}2\times10^{-3}/10^{-2}\ m=0{,}02\ m=2\ cm$$

olacaktır.

Ölçme ve kumanda durumunda: F_v vana direnç kuvveti levye sistemi ile şamandıraya iletildiğine göre

$$\rho\Delta V_{su}\, g=m_ş\, g+F_v/N$$

$$\Delta V_{su}=\frac{m_ş}{\rho}+\frac{F_v}{\rho g N}=0{,}2\times10^{-3}+10\times10^{-3}/(2\times9{,}81)=0{,}71\times10^{-3}\ m^3$$

$$\Delta H=\Delta V_{su}/A=0{,}71\times10^{-3}/10^{-2}=0{,}071\ m=7{,}1\ cm$$

olacaktır.

1.4.5 Kontrol Teknolojileri

Kumanda ve kontrol sistemleri genellikle aşağıdaki teknolojilerle gerçekleştirilmektedir.

Elektronik: Gerek ölçme ve gerekse bilgi iletme ve işleme elemanlarının çeşitliliği, kontrol devresinin gerçekleştirilmesinde çok geniş olanakları

sağlaması bakımından en çok uygulanan teknolojidir. Kontrol teçhizatı, ölçme - yükseltme - kalibrasyon, kontrol ve kumanda - güç elektroniği katlarından oluşur. Geometrik boyutları küçüktür. Gösterge ve kaydetme elemanlarına kolayca bağlanabilir.

Elektronik teknolojisi de kendi içinde iki önemli kola ayrılır:

Sürekli (Analog) Elektronik: Ölçme devresi çıkışı genellikle —10 V, +10 V standart aralığındadır. Bilgi iletimi uzak mesafelere yapılıyorsa (30 m den fazla) «akım çıkışlı» ölçme devreleri kullanılır. Bunların standart değişim aralığı 4 mA - 20 mA dir. Kontrol elemanı ve devresi de seçilen ölçme elemanına göre «gerilim girişli» (+10,—10 V) ya da «akım girişli» (4—20 mA) seçilir. Ölçme ve kontrol devrelerinde «tüm devre» (IC) elemanlar kullanılır. Kumanda devresi, kullanılacak kumanda (son kontrol) elemanına ya da kontrol edilen sisteme göre ayarlanabilir güçte bir «güç yükseltici devre» niteliğindedir.

Sayısal (Dijital) Elektronik : Ölçme elemanı ve devresi sayısal ya da sürekli çıkış verebilir. Sürekli değişmeler bir analog - dijital çevirici ile sayısal biçime dönüştürülür. Güç düzeyi genellikle (+5 V, — 5 V) referans gerilimleri ile mA mertebesindedir. Kontrol elemanı ve devresi ya tümdevre mantık elemanlarından ya da, genellikle, bir mikroişlemci sisteminden oluşur. Bu durumda programlanabilme kolaylığı uygulamalar için büyük bir esneklik sağlar. Sistem, dışındaki bilgi işlem sistemlerine, sayısal gösterge ve kaydedicilere kolaylıkla bağlanabilir. Kumanda devresi, kumandanın sürekli olduğu hallerde kontrol devresi ile bağlantıyı sağlayan bir dijital - analog çeviriciden ve son kontrol elemanını süren bir güç elektroniği devresinden oluşur.

Elektro - mekanik : Yüksek güçlü sistemlere ve son kontrol elemanlarına özellikle sıralamalı işlemler için kumanda edildiğinde «röle» ler, «kontaktör» ler gibi elektro - mekanik elemanlar kullanılabilir. Bu türden uygulamalarda ölçme sistemi çıkışı, elektro - mekanik elemanlara doğrudan kumanda edebilecek düzeydedir. Kontrol sistemi, bu elemanlardan kurulu bir mantık devresi niteliğindedir. Gerek ölçme, gerek kontrol, gerekse kumanda elemanları için 220 V tek fazlı, 380 V üç fazlı alternatif akım veya 24 V doğru akım elektrik gücü kullanılır.

Son kontrol elemanına kumanda eden rölelerin en büyük akım değerleri, gerekli güce göre 16 Amper'e kadar yükselirken, ölçme ve kontrol sisteminde genellikle daha küçük (0,1 - 1,6 A) akım değerleri kullanılır.

Elektro - mekanik elemanlar genellikle aç - kapa türü süreksiz kontrol sistemleri için kullanılırlar.

Pnömatik (Basınçlı hava): Pnömatik teknolojisi, elektronik ve elektromekanik elemanların yangın tehlikeleri nedeniyle kullanılamadığı uygulama alanlarında, veya basınçlı havanın ölçme tekniği, kumanda tekniği bakımından daha elverişli olduğu durumlarda benimsenir. Eğer kullanma yerinde basınçlı hava besleme devresi zaten kurulmuş ise, bu da bir tercih nedenidir.

Basınçlı hava ile (Pnömatik) kontrolda bilgi taşıyan değişken basınçtır. Standart değişme aralığı 0,2 bar - 1 bar arasındadır. Pnömatik ölçme ve kontrol elemanlarına, bu elemanlar içindeki kayıpları da karşılamak üzere 1,6 bar besleme basıncı uygulanır. Kumanda elemanlarıda standard 0,2 bar - 1 bar değişme aralığında gelen kontrol değişmelerini arzulanan kumandaya çevirecek biçimde tasarlanırlar. Ölçme elemanlarının giriş (ölçme) aralığı ayarlanabilir olduğu halde çıkışları yine 0,2 bar - 1 bar standard aralığındadır. Ölçme veya kontrol değişmelerinin uzak mesafelere iletilmesi gerektiğinde (30 m den fazla) ya pnömatik ileticilerle (transmitter) genliği azalan basınç değişmeleri standard aralığa yükseltilir veya yeni gelişmekte olan «sayısal pnömatik» teknolojisi kullanılır.

Pnömatik kontrol teknolojisi elektrik - pnömatik ve pnömatik - elektrik çeviriciler yardımı ile elektronik veya elektromekanik teknolojisi ile birlikte kullanılmaktadır. Sıralamalı işlemlerin gerçekleştirilmesinde pnömatik valfler ve mantık elemanları kullanılır. Bu elemanlarla gerçekleştirilen pnömatik güç uygulamalarında, sürekli değişmelerin kontrolu söz konusu değilse, kullanılan besleme basıncı genellikle 6 bar, kumanda basıncı ise 4 bar mertebesindedir.

Hidrolik (Basınçlı yağ): Küçük hacımlarda yüksek güçlerin kontrolunu gerektiren uygulamalarda hidrolik kumanda teknolojisi kullanılır. Genellikle kumanda elemanlarının girişi elektronik, çıkışı hidroliktir. Yine de, değişik teknolojilerde ölçme yapmamak amacı ile hidrolik ölçme, hidrolik geri besleme yapılabilir. Hidrolik kontrol devrelerinde besleme ve kumanda basıncı 300 bar'a kadar çıkarılabilir. Bilgi taşıma ve işleme değişkeni, yine basınçtır. Ölçme - kontrol devresinde kumanda basıncından çok daha düşük, en fazla 20 bar mertebesinde basınçlarla çalışılır. Son kontrol elemanı bir hidrolik silindir veya hidrolik motordur.

2. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

2.1 GİRİŞ

Laplace dönüşümü, lineer sistemlerin incelenmesinde kullanılan çok yararlı bir dönüşüm metodudur. Laplace dönüşümü ile sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler, çözümü daha kolay olan cebrik denklemlere dönüştürülür.

Laplace dönüşümünde diferansiyel denklemlerdeki bağımsız değişkenin (genellikle zaman t), yerini Laplace değişkeni (Laplace operatörü) s alır. Diğer bir deyişle bu dönüşümün yapılmasıyla t domeninden s domenine geçilmektedir. s değişkenine bağlı olarak elde edilen cebrik denklemler ile gerekli işlemler yapıldıktan sonra, diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için ters dönüşümle veya Laplace dönüşüm cetvelleri kullanılmak suretiyle t domenine geri dönülür. Laplace dönüşümünün önemli yararları aşağıda belirtilmiştir:

1. Elde olunan çözüm içinde başlangıç şartları da bulunmaktadır, ayrıca sabitleri tayine ihtiyaç yoktur.
2. Çözümü elde etmek için yapılan işlemler basit cebrik işlemlerdir.
3. Dönüşüm cetvellerinin kullanılması işlemleri kısaltır.
4. Bir sisteme ait geçici rejim ve sürekli rejim çözümleri bir arada, bir tam çözüm olarak elde edilir.
5. Çeşitli analitik ve grafik tekniklerin kullanılmasını sağlar.
6. Fiziksel sistem hakkında çözümden önce fikir verir.

Laplace dönüşümünde bağımsız değişken s bir kompleks değişkendir ve $s=\sigma+j\omega$ olarak tanımlanır. Burada σ ve ω sırasıyla gerçel (reel) ve sanal (imajiner) bileşenler olup $j=\sqrt{-1}$ dir.

2.2 KOMPLEKS SAYILAR VE s KOMPLEKS DEĞİŞKENİ

Tabii sayılar sistemi 0, 1, 2, 3,... gibi tam sayılardan oluşur. Rasyonel sayılar sistemi negatif tamsayıları ve 1/3 gibi kesirleri de içine alır. Gerçel (reel) sayılar sistemi ise ilâveten $\sqrt{2}$, π gibi sayıları da içermektedir. Reel sayı noktalarının sürekli zinciri ele alınırsa, bu reel sayı çizgisini oluşturur.

Kompleks sayılar sisteminde ise negatif reel sayıların kare kökleri de bulunmaktadır: $\sqrt{-3}$ gibi. Böylece, kompleks sayı sistemi reel sayı çizgisini de içine alan sürekli bir düzlem olarak düşünülebilir. Reel sayılar çizgisi yatay eksendir. Bu yatay eksene 0 (sıfır) reel sayısında dik çizilen düşey eksen sanal (imajiner) eksendir. Sanal eksen üzerinde bir birim yukarıda nokta $j=\sqrt{-1}$ olarak tanımlanır.

O halde kompleks bir sayı biri gerçel (reel) kısım ve diğeri sanal (imajiner) kısım olarak iki kısımdan oluşmaktadır:

Gerçel (reel) kısım $+j$ Sanal (imajiner) kısım$=\mathrm{Re}+j\ \mathrm{Im}$.

Bir kompleks sayı z harfi ile gösterilsin. $z=x+jy$ dir. Burada x gerçel ve y sanal bileşenleri göstermektedir. Mühendislik alanı uygulamaları bakımından, kompleks düzlemdeki $z=x+jy$ sayısı bir vektör olarak düşünülebilir, Şekil 2.1.

Şekil 2.1 Kompleks düzlem.

Şekil 2.1 deki vektörün büyüklüğü kompleks sayının modülüdür:

$$r=\text{Modül } z=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Bu vektörün açısı ise şöyle tanımlanır:

$$\sphericalangle z=\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Kompleks sayıların cebrik toplamı: eğer

$$z_1=x_1+jy_1 \text{ ve } z_2=x_2+jy_2$$

ise

$$z_2+z_1=(x_2+x_1)+j(y_2+y_1)$$

ve

$$z_2-z_1=(x_2-x_1)+j(y_2-y_1)$$

şeklindedir.

Bu vektörel toplama ve çıkarmadan ibarettir. Şekil 2.2 ve Şekil 2.3.

Şekil 2.2 Toplama.

Şekil 2.3 Çıkarma.

Bir kompleks sayının değişik ifade şekilleri :

Bir kompleks sayıyı üç değişik şekilde ifade etmek mümkündür. Bunlardan biri dik koordinatlarla belirtmektir. Bu, kompleks sayının reel ve imajiner kısımları ile (Re+j Im) şeklinde ifade edilmesidir.

Örnek: $z=3+j4$, Şekil 2.4.

İkinci bir ifade şekli, polar şekilde göstermedir. Bir kompleks sayı, polar şekilde, kompleks düzlemdeki büyüklüğü ve açısı ile gösterilir ve $r\sphericalangle\theta^\circ$ olarak yazılır. Burada

Şekil 2.4 Bir kompleks sayının gösterilmesi.

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ve } \measuredangle\theta=\text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

dır. Örnek olarak alınan $z=3+j4$ kompleks sayısının polar şekli $\sqrt{3^2+4^2}$ $\measuredangle$arctg $(4/3)=5\measuredangle 53.1°$ olmaktadır. Şekil 2.5.

Şekil 2.5 Bir kompleks sayının polar şekli.

Bir kompleks sayının üçüncü ifade şekli ile yani üstel (eksponansiyel) şekli ile belirtilmesinde $z=x+jy$ kompleks sayısının şekil 2.1 deki gösterilişinde $x=r\cos\theta$ ve $y=r\sin\theta$ olduğuna dikkat etmek yeter. Bunlar yerine yazılırsa

$$z=x+jy=r\ \mathrm{Cos}\,\theta+jr\ \mathrm{Sin}\,\theta=r(\mathrm{Cos}\,\theta+j\ \mathrm{Sin}\,\theta)$$

olur.

Burada

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ \text{ve}\ e^{j\theta}=\mathrm{Cos}\,\theta+j\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

olduğu dikkate alınarak,

$$z=x+jy=r\ e^{j\theta}$$

elde olunur. $z=r\,e^{j\theta}$ kompleks sayısının üstel şeklidir. $e^{j\theta}$, açısı θ olan birim vektör olarak kabul edilir. Zira,

$$|e^{j\theta}|=\sqrt{\mathrm{Cos}^2\,\theta+\mathrm{Sin}^2\,\theta}=1$$

dir. $e^{j\theta}$ birim vektörü, θ açısı değiştikçe reel eksenden başlayıp, saat akrebine ters yönde döner. Bu birim vektörün yatay bileşeni Cos θ, düşey bileşeni ise j Sin θ dır. Şek. 2.6.

Şekil 2.6 Birim daire ve birim vektör $e^{j\theta}$.

$\theta=180=\pi$ rad için $e^{j\pi}=-1$ dir. Eşitliğin her iki tarafının kareköku alınırsa $e^{j\pi/2}=\sqrt{-1}$ elde olunur. Diğer taraftan,

$$e^{j\pi/2} = \cos \pi/2 + j \sin \pi/2 = 0 + j\,1 = j$$

olup $j = \sqrt{-1}$ olduğu sonucuna varılır. Örnek olarak alınan $z = 3 + j4$ kompleks sayısının üstel şekli

$$z = \sqrt{3^2 + 4^2}\; e^{j \operatorname{arctg} 4/3} = 5\; e^{j\,0{,}927}$$

dir ve şekil 2.7 de gösterilmiştir. Üstel göstermede e'nin tabii logaritma tabanı (e=2,718) olduğu ve θ açısının radyan olarak belirtildiği hatırlanmalıdır.

Şekil 2.7 Bir kompleks sayının üstel şekil.

Kompleks sayıların çarpımı ve bölünmesi :

Kompleks sayılarla çarpma ve bölme işlemleri polar veya üstel şekilde gösterilişlerle kolayca yapılır.

Polar şekilde

$$z_1 = r_1 \measuredangle \theta_1^\circ \text{ ve } z_2 = r_2 \measuredangle \theta_2^\circ$$

olsun.

$$z_1 z_2 = (r_1 \measuredangle \theta_1^\circ)(r_2 \measuredangle \theta_2^\circ) = (r_1 r_2) \measuredangle \theta_1^\circ + \theta_2^\circ$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \measuredangle \theta_1^\circ}{r_2 \measuredangle \theta_2^\circ} = \frac{r_1}{r_2} \measuredangle \theta_1^\circ - \theta_2^\circ$$

dir.

Örnek :

$$z_1=3\measuredangle 47{,}2^\circ \text{ ve } z_2=2\measuredangle 110{,}6^\circ$$

olsun.

$$z_1z_2=(3\measuredangle 47{,}2^\circ)(2\measuredangle 110{,}6^\circ)=6\measuredangle 157{,}8^\circ$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3\measuredangle 47{,}2^\circ}{2\measuredangle 110{,}6^\circ}=1{,}5\measuredangle -63{,}4^\circ$$

olur.

Üstel şekilde :

$$z_1=r_1\,e^{j\theta_1} \text{ ve } z_2=r_2e^{j\theta_2}$$

olsun.

$$z_1z_2=(r_1\,e^{j\theta_1})(r_2\,e^{j\theta_2})=(r_1r_2)\,e^{j(\theta_2+\theta_1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\,e^{j\theta_1}}{r_2\,e^{j\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_2-\theta_1)}$$

dir.

Örnek :

$$z_1=3\,e^{j2} \text{ ve } z_2=2\,e^{j3}$$

olsun.

$$z_1z_2=(3\,e^{j2})(2\,e^{j3})=6\,e^{j5}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3\,e^{j2}}{3\,e^{j3}}=1{,}5\,e^{-j1}$$

olur.

Bir kompleks sayının eşleniği :

Bir kompleks sayının eşleniği yine bir kompleks sayıdır, şöyleki eşleniğin reel kısmı esas kompleks sayının reel kısmı ile aynıdır, fakat imajiner kısmı esas kompleks sayının imajiner kısmının ters işaretlisidir:

$$(a+jb)\text{nin eşleniği}=a-jb$$

s kompleks değişkeni: Evvelce de belirtildiği gibi s kompleks değişkeni

$$s=\sigma+j\omega$$

şeklinde tanımlanır. Böylece s, bir kompleks sayı olarak, kompleks düzlemde bir nokta olarak gösterilir. Bu kompleks düzlem «s düzlemi» olarak isimlendirilebilir. s bir kompleks değişken olarak birbirlerinden farklı pekçok kompleks sayı değerini alabilir. Örnek olarak, s değişkeninin iki özel değeri Şekil 2.8 de gösterilmiştir. Bu iki sayı

$$s_1=\sigma_1+j\omega_1 \text{ ve } s_2=\sigma_2+j\omega_2 \text{ dir ve } s_1' \text{ ile } s_2'$$

sırasıyla s_1 ile s_2 nin kompleks eşlenikleridir. «s düzlemi» otomatik kontrola ilişkin çeşitli analiz ve sentez tekniklerinin uygulandığı bir alandır. Bunun anlamı ve önemi konular ilerledikçe anlaşılacaktır.

Şekil 2.8 s düzlemi.

2.3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TANIMI

Laplace dönüşümüne ilişkin matematik işlem sembolik olarak

$$L[f(t)] \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir ve «f(t) nin Laplace dönüşümü» diye okunur.

Laplace dönüşümünün matematik tanımı :

$$L[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt=F(s) \tag{2.2}$$

dir. Bu ifadenin integrasyon sınırları 0 ve ∞ olduğundan t bağımsız değişkeni ortadan kalkar ve yalnız s kompleks değişkeninin bir fonksiyonu olan F(s) elde edilir.

(2.2) bağıntısının geçerli olabilmesi için f(t) fonksiyonunun «dönüşümü alınabilir» (transformable) olması gerekir. Diğer bir deyişle Laplace integrali yakınsamalı, belirli bir F(s) fonksiyonel değerine sahip olmalıdır.

2.4 ÇEŞİTLİ FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

Zaman domeninde verilen bir f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümünü elde etmek için

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2.2}$$

bağıntısının kullanılacağı evvelce belirtilmişti. Laplace dönüşümü çiftleri hernekadar cetveller halinde verilirse de, burada bazı örnek hesaplamalar yapılacaktır.

1 — $t \geqslant 0$ için $f(t)=A$ fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyonun şekli Şekil 2.9 da gösterilmiştir ve basamak fonksiyonu adını taşır. Eğer $A=1$ ise «birim basamak fonksiyonu» denir ve $f(t)=u(t)$ birim basamak fonksiyonunu belirtir.

Şekil 2.9 Basamak fonksiyonu.

O halde

$$F(s)=L[f(t)=A]=\int_0^\infty A\, e^{-st}\, dt=A\int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$=\frac{-A\, e^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty=\frac{A}{s} \tag{2.3}$$

Sonuç olarak $L[A]=A/s$ dir.

$A=1$ ise, yani $f(t)=u(t)$ birim basamak fonksiyonu ise $A=1$ konarak

$$L[u(t)]=1/s \tag{2.4}$$

olur.

2 — $f(t)=e^{-at}$ fonksiyonu alınsın.

$$F(s)=L[e^{-at}]=\int_0^\infty e^{-at}\,e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-(a+s)t}\,dt$$

$$=\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{s+a} \tag{2.5}$$

3 — $f(t)=\mathrm{Sin}\omega t$ sinusoidal fonksiyonu alınsın

$$\mathrm{Sin}\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

olduğu hatırlanarak

$$F(s)=L[\mathrm{Sin}\omega t]=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{1}{2j}\;\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{2.6}$$

elde olunur.

4 — $f(t)=\mathrm{Cos}\omega t$ alınsın,

$$\mathrm{Cos}\omega t=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

dir.

$$F(s)=L[\mathrm{Cos}\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{2.7}$$

bulunur.

5 — $f(t)=At$ rampa fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyon A nın pozitif veya negatif eğim oluşuna göre doğrusal artma veya doğrusal azalma şeklinde olabilir. Pozitif A eğimi için Şekil 2.10 da gösterilmiştir.

Şekil 2.10 Rampa fonksiyonu.

Laplace dönüşümü bulunsun:

$$F(s)=L[At]=\int_0^\infty (At)\,e^{-st}\,dt \tag{2.8}$$

(2.8) integrali kısımlara ayrılarak değerlendirilebilir.

$u=At$ ve $dv=e^{-st}\,dt$ denilsin. Kısımlara ayırarak integral almada kural

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

dur.

Bu kural uygulanarak

$$\int_0^\infty At\,e^{-st}\,dt=\frac{-At\,e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty-A\int_0^\infty\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt$$

$$=\frac{-At\,e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty-\frac{A\,e^{-st}}{s^2}\Big|_0^\infty=\frac{A}{s^2}$$

böylece

$$L[At]=A/s^2 \tag{2.9}$$

dir.

Eğer A=1 ise «birim rampa fonksiyonu» denir ve

$$L[t]=1/s^2 \tag{2.10}$$

olur.

Genel olarak, aynı yolla gösterilebilir ki

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}} \tag{2.11}$$

dir.

Burada n=0,1,2,3.. dir.

7 — Ötelenmiş fonksiyonun Laplace dönüşümü.

Ötelenmiş bir fonksiyon Şekil 2.11 de gösterilmiştir.

Böyle bir fonksiyon şu şekilde tanımlanabilir:

$0 \leq t < L$ için 0

$t \geq L$ için $f(t-L)$

Şekil 2.11 Ötelenmiş fonksiyon.

Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L[f(t-L)]=\int_0^\infty f(t-L)e^{-st}dt=\int_0^L (0)e^{-st}dt+\int_L^\infty f(t-L)e^{-st}dt$$

$$=\int_L^\infty f(t-L)e^{-st}dt$$

Burada bir değişken dönüşümü yapılabilir: $\tau=t-L$ alınırsa $t=\tau+L$ olur; ayrıca $t=L$ için $\tau=0$ ve $d\tau=dt$ dir. Yerine konarak

$$=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+L)}d\tau=e^{-Ls}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}dt$$

Laplace dönüşümü herhangi bir değişken için geçerli olup

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}dt=F(s)$$

dir. Yerine yazarak

$$L[f(t-L)]=e^{-Ls}F(s) \qquad (2.12)$$

sonucu bulunur. Otomatik kontrol sistemlerinde ötelenmiş fonksiyonun temsil ettiği olay «nakil gecikmesi» veya «ölü zaman» fonksiyonu olarak isimlendirilir.

8 — Darbe (puls) fonksiyonunun Laplace dönüşümü.

Darbe (puls) fonksiyonu

$$0\leq t\leq t_0 \text{ için } f(t)=A=\text{Sabit}$$

$$t<0 \text{ ve } t>t_0 \text{ için } f(t)=0$$

şeklinde tanımlanır ve Şekil 2.12 de gösterilmiştir.

Şekil 2.12 Darbe (puls) fonksiyonu.

Darbe fonksiyonu $t=0$ anında uygulanan $f(t)=A\,u(t)$ basamak fonksiyonu ile $t=t_0$ anında uygulanan $f(t-t_0)=-A\,u(t-t_0)$ basamak fonksiyonunun süperpozisyonu şeklinde düşünülebilir. Böylece

Darbe fonksiyonu $$f(t)=A\,u(t)-A\,u(t-t_0) \tag{2.13}$$

yazılır. Buradan

$$F(s)=L[f(t)]=L[A\,u(t)]-L[A\,u(t-t_0)] \tag{2.14}$$

$$=\frac{A}{s}-e^{-st_0}\frac{A}{s}$$

$$F(s)=\frac{A}{s}(1-e^{-st_0})$$

elde olunur. (**Not:** (2.14) ifadesi yazılırken Laplace dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu özelliği kullanılmıştır. Bu özellik üzerinde ileride durulacaktır.)

9 — İmpuls fonksiyonunun Laplace Dönüşümü.

İmpuls fonksiyonu, darbe (puls) fonksiyonunun limiti olarak düşünülür. Şekil 2.13 de gösterildiği gibi yüksekliği a/t_0 olan bir darbe fonksiyonu alınsın.

Şekil 2.13 İmpuls fonksiyonu.

Bu darbe fonksiyonunun alanı $(a/t_0)t_0=a$ dır. $t_0\to 0$ için limite gidilirse a/t_0 yüksekliği sonsuza gider, fakat alan a sabit kalır. Böylece limitte

alanı a olan bir «impuls fonksiyonu» elde edilir. Bu fonksiyon düşey eksen üzerinde yukarı yönlenmiş bir ok ile gösterilir, (çünkü t=0 anındaki impuls'dur). Eğer alan a=1 ise «birim impuls fonksiyonu» adı verilir ve (t) ile gösterilir. Tanım olarak birim impuls fonksiyonu

$$t>0 \text{ ve } t<0 \quad \text{için} \quad \delta(t)=0$$

$$t=0 \quad \text{için} \quad \delta(t)=\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt=1$$

dir.

Alanı a olan impuls fonksiyonu a $\delta(t)$ şeklinde ifade edilir. Yukarıda yapılan açıklamalardan, impuls fonksiyonunun Laplace dönüşümünün, darbe fonksiyonunun Laplace dönüşümünden $t_0 \to 0$ için limit alınarak bulunabileceği anlaşılmaktadır. O halde,

$$L[a\delta(t)]=\lim_{t_0\to 0} \frac{a/t_0}{s}(1-e^{-t_0 s})=\lim_{t_0\to 0} \frac{a}{t_0 s}(1-e^{-t_0 s})=\frac{0}{0}$$

belirsizliği gidermek için L'Hospital kuralı uygulanarak pay ve payda t_0'a göre türetilir :

$$L[a\delta(t)]=\lim_{t_0\to 0} \frac{\dfrac{d(a(1-e^{-t_0 s}))}{dt_0}}{\dfrac{d(t_0 s)}{dt_0}}=\lim_{t_0\to 0} \frac{as\,e^{-t_0 s}}{s}=a$$

$$L[a\delta(t)]=a \tag{2.16}$$

olur. İmpuls fonksiyonunun Laplace dönüşümünün o impuls'un alanına eşit olduğu görülmektedir. Açık olarak, a=1 ise yani birim impuls fonksiyonu alınırsa

$$L[\delta(t)]=1 \tag{2.17}$$

olur. Birim impuls fonksiyonunun Laplace dönüşümünün bire eşit olması, otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde kolaylık sağlar.

2.5 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

A bir sabit olmak üzere

$$L[Af(t)]=A\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt=A\,F(s) \tag{2.18}$$

dir. Ayrıca benzer şekilde, A ve B sabit olmak üzere

$$L[Af_1(t)+Bf_2(t)]=A\,F_1(s)+B\,F_2(s) \tag{2.19}$$

elde edilir. Eğer iki fonksiyonun toplamının dönüşümü, herbir fonksiyonun dönüşümlerinin toplamına eşitse o dönüşüme lineer dönüşüm denir. Böylece, Laplace dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu görülmektedir.

2.6 TÜREVİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$L[f(t)]=F(s)$ iken $f(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi olan $f'(t)=df(t)/dt$ nin Laplace dönüşümü araştırılsın :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^\infty\left[\frac{df(t)}{dt}\right]e^{-st}\,dt \tag{2.20}$$

$$u=e^{-st}\,dt \qquad v=f(t)$$

$du=-s\,e^{-st}\,dt$ ve $dv=df(t)$ ile kısımlara ayırarak integral alma kuralı uygulanırsa,

$$\int_0^\infty u\;dv=uv\Big|_0^\infty-\int_0^\infty v\;du$$

yerine koyarak

$$\int_0^\infty e^{-st}\,df(t)=\int_0^\infty\frac{df(t)}{dt}\,e^{-st}\,dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty-\left[-s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt\right] \tag{2.21}$$

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olabilmesi için $f(t)$ fonksiyonu eksponansiyel mertebeden olmalıdır. Yani $t\to\infty$ için $f(t)$ nin büyümesi e^{-st} nin sıfıra hızla inmesinden yavaştır. O halde Denklem (2.21) aşağıdaki hali alır.

$$\int_0^\infty\frac{df(t)}{dt}\,e^{-st}\,dt=-f(0)+s\,F(s) \tag{2.22}$$

(2.22) ifadesi düzenlenirse

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=L[f'(t)]=s\,F(s)-f(0) \tag{2.23}$$

olur. (2.23) ifadesinde s Laplace operatörünü; $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü ve $f(0)$, $f(t)$ fonksiyonunun başlangıç şartını ($t=0$ için değerini) göstermektedir.

Eğer başlangıç şartı sıfır ise, yani $f(0)=0$ ise,

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=L[f'(t)]=s\,F(s) \tag{2.24}$$

olur. Başlangıç şartı sıfır ise büyük bir kolaylık ortaya çıkar. Zira Laplace operatörü s, d/dt türev alma operatörüne karşılık olmaktadır: $s \leftrightarrow d/dt$. Böylece, meselâ

$$A\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

diferansiyel denkleminin Laplace dönüşümü, A sabit ve başlangıç şartı $y(0)=0$ ise kolaylıkla

$$AsY(s)+Y(s)=X(s)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=L[f^2(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f(0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=L[f^n(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f(0)-$$

$$....f^{n-1}(0) \tag{2.25}$$

olarak bulunur. Başlangıç şartları tamamen sıfır ise

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)$$

. . . . . .

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s) \tag{2.26}$$

basitliği mevcuttur.

2.7 İNTEGRALİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

f(t) fonksiyonunun integralinin Laplace Dönüşümü

$$L[\int f(t)dt]=\int_0^\infty [\int f(t)dt]e^{-st}\,dt \tag{2.27}$$

yine kısımlara ayırmak suretiyle integral alma işlemi sağlanırsa, sonuç olarak

$$L[\int f(t)dt]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s} \tag{2.28}$$

elde olunur. Burada $f^{-1}(t)=\int f(t)dt$ dir ve $f^{-1}(0)$ ise integralin $t=0$ için değerini yani başlangıç şartını belirtmektedir. Eğer başlangıç şartı sıfır ise, yani

$$f^{-1}(0)=0 \text{ ise}$$

$$L[f^{-1}(t)]=L[\int f(t)dt]=F(s)/s \tag{2.29}$$

olur. Görülür ki, başlangıç şartı sıfır olunca, $1/s$ integral alma operatörüne karşılık olmaktadır: $1/s \leftrightarrow \int_0^t$

Benzer olarak

$$L[f^{-2}(t)]=\frac{F(s)}{s^2}+\frac{f^{-1}(0)}{s^2}+\frac{f^{-2}(0)}{s} \tag{2.30}$$

dur. Burada $f^{-1}(t)$ nin zamana göre birinci integralini ve $f^{-2}(t)$ $f(t)$ nin zamana göre ikinci integralini göstermektedir.

2.8 SON DEĞER TEOREMİ

Bu teorem $f(t)$ fonksiyonunun $t=\infty$ daki değerinin (son değerinin) doğrudan doğruya $F(s)$ dönüşümünden elde edilmesini sağlar. Son değer teoremi $t=\infty$ da bir limite sahip olan fonksiyonlara uygulanabilir, aksi halde $f(\infty)$ ın anlamı yoktur.

Son değer teoremini elde etmek için önce türevin dönüşümü yazılsın.

$$L[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt=sF(s)-f(0)$$

s yerine sıfır konarak

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt=[sF(s)]_{s=0}-f(0) \tag{2.31}$$

olur. Diğer taraftan

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt=f(t)\Big|_0^\infty=f(\infty)-f(0) \tag{2.32}$$

dir. Denklem (2.31) ve (2.32) nin sağ tarafları eşitlenerek

$$f(\infty)=[sF(s)]_{s=0} \tag{2.33}$$

elde olunur. Bu, son değer teoreminin matematik ifadesidir. Son değer teoremi şu şekilde de yazılabilir.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sf(s) \tag{2.34}$$

2.9 BAŞLANGIÇ DEĞER TEOREMİ

Bu teorem f(t) fonksiyonunun t=0+ daki değerinin doğrudan doğruya F(s) dönüşümünden tayin edilmesini mümkün kılar.

Yine türev dönüşümünden hareket edilsin

$$L[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{0+} f'(t)\,dt+\int_{0+}^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \tag{2.35}$$

t=0 dan t=0+ ya integral alınırken $t\approx 0$ için $e^{-st}\approx 1$ olduğu dikkate alınmıştır.

(2.35) ifadesinin $s\to\infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{s\to\infty} L[f'(t)]=\int_0^{0+} f'(t)\,dt+\lim_{s\to\infty}\int_{0+}^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \tag{2.36}$$

$s\to\infty$ için $e^{-\infty}\approx 0$ olup (2.36) ifadesinde sağ tarafdaki ikinci terim ortadan kalkar. Böylece

$$\lim_{s\to\infty} L[f'(t)] = f(t)\Big|_{0}^{0+} = f(0+) - f(0) \tag{2.37}$$

olur. Diğer taraftan

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0) \tag{2.38}$$

olup, iki tarafın $s\to\infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{s\to\infty} L[f'(t)] = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0) \tag{2.39}$$

ve (2.37) ile (2.39) ifadelerinin karşılaştırılmasından

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{2.40}$$

elde olunur ki bu da başlangıç değer teoreminin matematik ifadesidir. Başlangıç değer teoremi $t=0$ da değil, fakat sıfırdan birazcık büyük olan $t=0+$ da geçerlidir. Başlangıç değer teoremini

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{2.41}$$

şeklinde yazmak da mümkündür.

2.10 POLLER VE SIFIRLAR

Laplace dönüşümündeki Laplace operatörü s nin bir kompleks değişken olduğu ($s=\sigma+j\omega$) evvelce belirtilmişti. Kompleks değişken s ye bağlı bir kompleks değişkenli fonksiyonun polleri ve sıfırları tanımlanacaktır. Pol ve sıfırların otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde önemi büyüktür.

Kompleks değişkenli bir fonksiyonun türevi :

$$F(s) = s^2 = (\sigma + j\omega)^2 = \sigma^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega = F_x + jF_y \tag{2.42}$$

kompleks değişkenli fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyonun reel kısmı

$F_x = \sigma^2 - \omega^2$ ve imajiner kısmı $F_y = 2\sigma\omega$ olup F_x ve F_y gerçek büyüklüklerdir. Böylece $F(s) = F_x(\sigma, \omega) + jF_y(\sigma, \omega)$ kompleks değişkenli fonksiyonunun türevi

$$F'(s) = \frac{dF(s)}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta F(s)}{\Delta s} \tag{2.43}$$

şeklindedir. Burada

Tablo 2.1. Laplace Dönüşümü Çiftleri

Zaman fonksiyonu:	$f(t)$	Laplace dönüşümü $F(s)$
Birim impuls	$\delta(t)$	1
Birim basamak	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Birim rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Polinom	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Üstel fonk.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Sinüs	$\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Kosinüs	$\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Sönümlü Sinüs	$e^{-at}\,\mathrm{Sin}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Sönümlü Kosinüs	$e^{-at}\,\mathrm{Cos}\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
	$e^{-at}t$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$		$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-a\,e^{-at})$		$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$		$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{Sin}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$		$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{Sin}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)$		$\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)s}$
$\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$		

$$\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$$

dır.

Bir kompleks değişkenli fonksiyonun türevi haiz olması ve bu türevin tek (unique) olması için (diğer bir deyişle türevin Δs nin sıfıra gidiş yolundan bağımsız olması için), $F(s)$ fonksiyonunun reel ve imajiner kısımları Cauchy - Riemann denklemlerini sağlamalıdır. Cauchy - Riemann denklemleri burada

$$\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial \sigma} = -\frac{\partial F_x}{\partial \omega} \qquad (2.44)$$

şeklindedir.

Ele alınan örnekte

$$F_x = \sigma^2 - \omega^2 \text{ ve } F_y = 2\sigma\omega$$

dır.

O halde

$$\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = 2\sigma = \frac{\partial F_y}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial \sigma} = 2\omega = -\frac{\partial F_x}{\partial \omega}$$

olup $F(s) = s^2$ fonksiyonu Cauchy - Riemann denklemlerini sağlar; ayrıca her σ ve ω için sağlar, yani $F(s)$ fonksiyonunun her s değeri için türevi mevcuttur.

Kompleks fonksiyonların türev alma işlemi bilinen türev alma işlemi şeklinde yapılır. Örnek olarak

$$\frac{d(s^n)}{ds} = n\, s^{n-1} \quad , \quad \frac{d(e^{as})}{ds} = a\, e^{as}$$

$$\frac{d(\ln s)}{ds} = \frac{1}{s} \quad , \quad \frac{d(\operatorname{Sin} s)}{ds} = \operatorname{Cos} s$$

$$\frac{d(\operatorname{Cos} s)}{ds} = -\operatorname{Sin} s \quad , \quad \frac{d(\operatorname{Sinh} s)}{ds} = \operatorname{Cosh} s$$

dir.

Analitik fonksiyonlar :

Şekil 2.14 gibi bir s_0 kompleks sayısı ile s_0 merkezli ρ yarıçaplı (çok küçük bir uzunluk) daire içinde kalan s kompleks sayısı dikkate alınsın. Böylece s_0 kompleks sayısının civarı dikkate alınmaktadır.

Şekil 2.14.

$$|s-s_0|<\rho$$

dur.

Bir F(s) fonksiyonunun bir s noktasında türevi olması için s noktasında Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamalıdır. Eğer bir F(s) fonksiyonu s_0 noktasında ve s_0 noktasının civarındaki her s noktasında türevi haiz ise, «F(s) fonksiyonu s_0 noktasında analitiktir» denir. Diğer bir deyişle, bir fonksiyonun bir s_0 noktasında analitik olması için, s_0 noktasının civarındaki her s noktasında Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmalıdır. Böyle noktalara adi (ordinary veya regular) noktalar denir.

Eğer bir F(s) fonksiyonu bir R bölgesinin her noktasında analitik ise F(s) fonksiyonu R bölgesinde analitiktir denir, Şekil 2.15

Tekil (singular) noktalar :

Eğer $F(s)$ fonksiyonu bir s_0 noktasında analitik değilse ve fakat s_0 noktasının civarındaki her noktada analitik ise s_0 noktasına Tekil (singular) nokta denir.

Örnek olarak $F(s)=1/(s-s_0)$ fonksiyonu $s=s_0$ noktasında türevi haiz değildir, yani analitik değildir. s_0 noktası bir tekil (singular) noktadır.

Bir $F(s)$ fonksiyonunun kendisini veya türevini «sonsuz» yapan tekil noktalara «Pol»ler denir.

Örnek olarak

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-4)(s+5)^3}$$

fonksiyonu $s_1=-1$, $s_2=+4$, $s_3=-5$ noktalarında pollere sahiptir. Bu fonksiyon $s=-5$ noktasında 3. cü mertebeden pole sahiptir. Genel olarak, eğer

$$\lim_{s\to s_i} F(s)=\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{s\to s_i} (s-s_i)^n F(s)=\text{SONLU}$$

ise $F(s)$ fonksiyonunun $s=s_i$ de n. ci mertebeden polü vardir. Ele alınan örnekte

$$\lim_{s\to -5}\left[(s+5)^3 \frac{s+2}{(s+1)(s-4)(s+5)^3}\right]=\frac{1}{12}=\text{SONLU}$$

olup, $F(s)$ fonksiyonunun $s_3=-5$ noktasında 3. mertebeden polü vardır. $s_1=-1$ ve $s_2=+4$ noktalarındaki poller ise 1. mertebedendir.

$F(s)$ fonksiyonunu sıfır yapan s değerlerine ise «Sıfır» lar denir. Ele alınan örnekte, $s=-2$ için $F(s)=0$ olup, $s=-2$ bir sıfırdır.

Kısaca kesir şeklinde verilmiş bir $F(s)$ kompleks fonksiyonunda payı sıfır yapan s değerleri sıfırları; paydayı sıfır yapan s değerleri ise polleri teşkil eder. Örnekteki sıfır ve poller kompleks düzlemde (s düzleminde) gösterilmiştir, Şekil 2.16. Bir sıfır küçük bir yuvarlakla, bir pol ise bir x işaretiyle gösterilir. n. ci mertebeden pol n katlı poldür ve üstüste n adet x ile gösterilmiştir. s düzleminde sıfır ve poller belli olursa $F(s)$ fonksiyonu elde edilebilir.

Şekil 2.16 da 3 katlı pol xxx şeklinde gösterilmiştir. s düzleminde sıfır ve poller belli olursa F(s) fonksiyonu elde edilebilir.

Şekil 2.16 s düzleminde sıfır ve poller.

2.11 TRANSFER FONKSİYONU VE KARAKTERİSTİK FONKSİYON

Otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde, lineer sabit katsayılı sistemlerin giriş - çıkış bağıntılarının belirtilmesi için çoğunlukla «transfer fonksiyonları» kullanılır. Bir lineer sabit katsayılı sistemin transfer fonksiyonu, tanım olarak, «çıkışın» (cevap fonksiyonunun) Laplace dönüşümünün, «girişin» (ikaz fonksiyonunun) Laplace dönüşümüne oranıdır. Şu kayıtla ki bütün başlangıç şartları sıfırdır.

Aşağıdaki diferansiyel denklemle tanımlanan bir lineer sabit katsayılı sistem alınsın:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots\dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y$$

$$= b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x \, (n \geqslant m) \qquad (2.45)$$

Burada y sistemin çıkışı ve x sistemin girişidir. Bu sisteme ait transfer fonksiyonu, bütün başlangıç şartlarının sıfır olduğu kabul edilerek, heriki tarafın Laplace dönüşümü alınarak kolayca bulunur.

Türevin Laplace dönüşümü özelliğinden başlangıç şartları sıfır iken, d^n/dt^n yerine s^n konacağı hatırlanarak

$$(a_0s^n+a_1s^{n-1}+....+a_{n-1}s+a_n)Y(s)$$
$$=(b_0s^m+b_1s^{m-1}+....+b_{m-1}s+b_m)X(s) \qquad (2.46)$$

elde edilir ve buradan Transfer Fonksiyonu

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+....+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+....+a_{n-1}s+a_n} \qquad (2.47)$$

olur. İlgili blok diyagramı Şekil 2.17 de dir.

Şekil 2.17 Transfer fonksiyonu G(s)

Transfer fonksiyonu lineer sabit katsayılı bir sistemde çıkışı girişe, sisteme ait parametrelerle bağlayan bir ifadedir.

Transfer fonksiyonu sistemin kendisine ait özellikleri belirtir, fakat girişten (veya ikaz fonksiyonundan) bağımsızdır. Transfer fonksiyonu giriş ile çıkışı birbirine bağlamak için gerekli birimleri ihtiva edebilir, ancak sistemin fiziksel yapısı hakkında herhangi bir bilgi vermez. Birbirinden fiziksel olarak farklı birçok sistemin transfer fonksiyonu aynı olabilir.

Transfer fonksiyonu yardımıyla, bir sistemin dinamik davranışı s ye bağlı cebrik denklemlerle gösterilebilmektedir. Transfer fonksiyonunun paydasındaki s nin en yüksek üssü, çıkışın en yüksek mertebeden türev teriminin mertebesine eşittir. Bu bakımdan eğer, s nin en yüksek üssü n ise, sistem n. ci mertebedendir.

Transfer fonksiyonunun paydasına «karakteristik fonksiyon» adı veverilir. Karakteristik fonksiyon sıfıra eşitlenerek «karakteristik denklem» elde edilir. Sistemin geçiş rejimindeki davranışı, doğrudan doğruya karakteristik denklemin sıfırlarından (veya transfer fonksiyonunun pollerinden) elde edilebilir.

2.12 TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

s domeninde hesaplar yapıldıktan sonra, zaman domenine geri dönmek ve sonucu zaman domeninde değerlendirmek istenebilir. Böylece,

esas değişken olan t(zaman) değişkenine dönülmüş olur. Bu şekilde, kompleks değişkenli ifadenin zaman değişkenli ifadeye dönüştürülmesi için uygulanan matematik işleme «Ters dönüşüm» denir. Ters Laplace dönüşümü sembolik olarak

$$L^{-1}[F(s)]=f(t) \tag{2.48}$$

şeklinde gösterilir.

Matematik olarak f(t), F(s) ten aşağıdaki integral alma işlemi ile bulunur.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{ts}\,ds\ ,\ (t>0) \tag{2.49}$$

(2.49) ile verilen integral alma işlemi hayli karışıktır. Fakat, F(s) belli iken f(t) nin bulunması için integral işlemi yapmaya gerek yoktur. Laplace dönüşümü çiftlerini veren cetvel kullanmak suretiyle f(t) kolaylıkla bulunabilir. Ancak, cetvellerin kullanılabilmesi için F(s) , f(t) nin yegâne Laplace dönüşümü olmalı ve F(s) den ters dönüşümle f(t) elde edildiği zaman bu f(t) fonksiyonu başlangıçta Laplace dönüşümü alınan yegâne f(t) fonksiyonu olmalıdır. Böylece cetvellerle verilen dönüşüm çiftleri iki yönde de alınabilir.

F(s) fonksiyonu, çoğunlukla, Laplace dönüşümü çiftleri cetvellerinde olduğu şekilde ortaya çıkmaz. Bu hallerde, F(s) kısmi kesirlere ayrılmak suretiyle s nin basit fonksiyonları şeklinde yazılır ve böylece bilinen ters Laplace dönüşümleri yardımıyla, cetvellerden yararlanarak, f(t) elde edilir.

Kontrol sistemlerinin incelenmesinde, F(s) çoğunlukla aşağıdaki şekilde bulunur:

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)} \tag{2.50}$$

Burada A(s) ve B(s) s değişkeninin birer polinomudur ve B(s) nin mertebesi A(s) nin mertebesinden büyüktür (veya en çok mertebeler eşittir).

(2.50) ifadesinin basit kesirlere ayrılması ve sonunda f(t) nin bulunmasında mümkün 3 hal aşağıda incelenmektedir.

Basit poller halli :

Eğer $F(s)=A(s)/B(s)$ basit pollere sahipse, yani $B(s)=(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)$ şeklinde basit çarpanlara ayrılabiliyorsa F(s) basit kesirlerin toplamı şeklinde yazılabilir :

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+....+\frac{K_i}{s-s_i}+....+\frac{K_n}{s-s_n} \quad (2.51)$$

burada $K_1, K_2, ... K_n$ sabitlerdir. Bu sabitler

$$K_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)\frac{A(s)}{B(s)} \quad (2.52)$$

olarak hesaplanır. Böylece hesaplanan $K_1, ..., K_i .... K_n$ ler ile ters dönüşüm alarak

$$f(t)=K_1 e^{s_1 t}+K_2 e^{s_2 t}+ ... +K_i e^{s_i t}+ ... +K_n e^{s_n t} \quad (2.53)$$

bulunur. f(t) nin üstel azalan bir fonksiyon olması için bütün s_i değerleri negatif olmalıdır. Eğer herhangi bir $s_i>0$ ise t sonsuza giderken f(t) sınırsız artar. Eğer herhangi bir $s_i=0$ ise sabit terim elde edilir; Zira

$$K_i e^{(0)t}=K_i$$

dir.

Katlı poller hali :

Eğer $B(s)=(s-s_r)^q(s-s_1)(s-s_2) ..... (s-s_{n-q})$ şeklinde çarpanlara ayrılıyorsa s_r kökü q defa tekrarlanıyor demektir. s_r ye

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$$

nin katlı polü denir. Bu halde F(s) nin basit kesirleri

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{Cq}{(s-s_r)^q}+\frac{Cq-1}{(s-s_r)^{q-1}}+ ..... +\frac{C_1}{s-s_r}+$$
$$+\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+ .... +\frac{K_{n-q}}{s-s_{n-q}} \quad (2.54)$$

olur.

Katlı terimlerin C sabitleri şöyle bulunur:

$$C_q=\lim_{s\to s_r}\left[(s-s_r)^q\frac{A(s)}{B(s)}\right]$$
$$C_{q-1}=\lim_{s\to s_r}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s-s_r)^q\frac{A(s)}{B(s)}\right]\right\} \quad (2.55)$$
$$C_{q-k}=\lim_{s\to s_r}\left\{\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-s_r)^q\frac{A(s)}{B(s)}\right]\right\}$$

K_1 , K_2 , ...K_{n-q} sabitleri de basit poller halinde olduğu gibi hesaplandıktan sonra ters dönüşüm sağlanır :

$$f(t)=\left[\frac{C_q t^{q-1}}{(q-1)!}+\frac{C_{q-1}t^{q-2}}{(q-2)!}+\ldots+\frac{C_2 t}{1!}+C_1\right]e^{s_r t}$$
$$+K_1 e^{s_1 t}+K_2 e^{s_2 t}+\ldots+K_{n-q}\, e^{s_{n-q} t} \qquad (2.56)$$

Örnek :

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)}$$

olsun.

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{C_2}{(s+2)^2}+\frac{C_1}{s+2}+\frac{K_1}{s+5}$$

$$C_2=\lim_{s\to-2}(s+2)^2\cdot\frac{11s+28}{(+2)^2(s+5)}=2$$

$$C_1=\lim_{s\to-2}\left\{\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)}\right]\right\}=\lim_{s\to-2}\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{11s+28}{s+5}\right]\right\}$$

$$=\lim_{s\to-2}\left[\frac{11(s+5)-(11s+28)}{(s+5)^2}\right]=3$$

$$K_1=\lim_{s\to-5}\left[(s+5)\frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)}\right]=-3$$

yerine koyarak

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{3}{s+2}-\frac{3}{s+5}$$

ve ters dönüşüm ile

$$f(t)=2t\,e^{-2t}+3\,e^{-2t}-3\,e^{-5t}$$

veya

$$f(t)=(2t+3)e^{-2t}-3\,e^{-5t}\ ,\ t\geqslant 0$$

olur.

Kompleks eşlenik poller hali :

B(s) ye ait kompleks kökler daima eşlenik çiftler halinde bulunur. Bu kökler a+jb ve a−jb şeklindedir. Bu köklerle ilgili çarpanlar

$$(s-a-jb)\ (s-a+jb)=s^2-2as+(a^2+b^2)$$

şeklindedir. Eğer

$$B(s)=(s-a-jb)\ (s-a+jb)\ (s-s_1)\ ....\ (s-s_{n-2}) \quad \text{ise}$$

basit gerçel poller için uygulanan yöntemle basit kesirlere ayırarak

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{K_c}{s-a-jb}+\frac{K_{-c}}{s-a+jb}+\frac{K_1}{s-s_1}+...+\frac{K_{n-2}}{s-s_{n-2}} \quad (2.57)$$

yazılır ve ters dönüşümle

$$f(t)=K_c\, e^{(a+jb)t}+K_{-c}\, e^{(a-jb)t}+K_1\, e^{s_1 t}+ .... + K_{n-2} e^{s_{n-2} t} \quad (2.58)$$

elde edilir.

K_c ve K_{-c} sabitleri benzer yolla hesaplanır:

$$K_c=\lim_{s\to a+jb}\left[(s-a-jb)\frac{A(s)}{(s-a-jb)\ (s-a+jb)\ (s-s_1)\ ...\ (s-s_{n-2})}\right]$$

$$=\lim_{s\to a+jb}\left[\frac{1}{2jb}\ \frac{A(s)}{(s-s_1)\ ....\ (s-s_{n-2})}\right]=\frac{1}{2jb}K(a+jb) \quad (2.59)$$

burada

$$K(a+jb)=\lim_{s\to a+jb}\left[\frac{A(s)}{(s-s_1)\ ...\ (s-s_{n-2})}\right]$$

$$=\left[(s^2-2as+a^2+b^2)\ \frac{A(s)}{B(s)}\right]_{s=a+jb} \quad (2.60)$$

dır.

Benzer olarak

$$K_{-c}=-\frac{1}{2jb}K(a-jb) \quad (2.61)$$

ve

$$K(a-jb)=\lim_{s\to a-jb}\left[\frac{A(s)}{(s-s_1)\ (s-s_2)\ ...\ (s-s_{n-2})}\right]$$

$$=\left[(s^2-2as+a^2+b^2)\ \frac{A(s)}{B(s)}\right]_{s=a-jb} \quad (2.62)$$

dir.

$K(a+jb)$ ve $K(a-jb)$ sabitleri eşlenik kompleks sayılarıdır.

$$K(a+jb)=|K(a+jb)|\,e^{j\alpha} \tag{2.63}$$

$$K(a-jb)=|K(a-jb)|\,e^{-j\alpha} \tag{2.64}$$

yazılabilir.

Bu sayılar kompleks düzlemde birer vektör ile gösterilmiştir, Şekil 2.18.

Şekil 2.18 Kompleks düzlemde vektörel gösteriş.

Ayrıca, $|K(a+jb)|=|K(a-jb)|$ dir. O halde

$$K_c=\frac{1}{2jb}\,|K(a+jb)|\,e^{j\alpha}$$

$$K_{-c}=-\frac{1}{2jb}\,|K(a+jb)|\,e^{-j\alpha}$$

yazılabilir. (2.58) ifadesinde yerine konarak

$$f(t)=\frac{1}{b}\,|K(a+jb)|\,e^{at}\,\frac{e^{j(bt+\alpha)}-e^{-j(bt+\alpha)}}{2j}$$

$$+K_1\,e^{s_1t}+\ldots+K_{n-2}\,e^{s_{n-2}t} \tag{2.65}$$

bulunur. Veya (2.65) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(t)=\frac{1}{b}|K(a+jb)|e^{at}\,\mathrm{Sin}(bt+\alpha)+K_1\,e^{s_1 t}+\ldots+K_{n-2}\,e^{s_{n-2}t} \quad (2.66)$$

Böylece f(t) üstel (eksponansiyel) zarf eğrili bir sinüs terimi ihtiva etmektedir. Bu sinusoidin zarf eğrisi

$$\frac{1}{b}|K(a+jb)|\,e^{at} \text{ dir ve } a<0 \text{ için } e^{at}\,,\ t$$

büyürken üstel azalır; a=0 ise sinusoidin genliği

$$\frac{1}{b}|K(a+jb)|$$

olarak sabittir. a>0 ise giderek artan bir sinusoid ortaya çıkar, Şekil 2.19. Şekil 2.19 da a nın pozitif, sıfır ve negatif olması durumlarında (a+jb) eşlenik kök çiftinin kompleks düzlemdeki konumları ile tekabül eden f(t) eğrisi gösterilmiştir. f(t) eğrisi a ya bağlı olarak sönümlenen sinüsoid, sabit genlikli sinüsoid veya artan genlikli sinüsoid olmaktadır.

Şekil 2.19 a nın çeşitli değerleri için (a+jb) eşlenik kök çiftinin kompleks düzlemdeki konumları ve ilgili sinusoidin zaman düzlemindeki değişim şekilleri.

Benzer olarak, gerçel köklerden (diğer deyişle F(s) nin basit pollerinden) dolayı f(t) nin $K_i e^{s_i t}$ terimleri incelenebilir. Eğer

$s_i<0$ ise $K_i e^{s_i t}$ terimi üstel azalır,

$s_i=0$ ise $K_i e^{s_i t}=K_i$ olur,

$s_i>0$ ise $K_i e^{s_i t}$ terimi üstel artar.

Bu söylenenler Şekil 2.20 de gösterilmiştir.

Şekil 2.20 F(s) nin basit pollerinin kompleks düzlemdeki konumlarına göre zaman düzlemindeki değişimler.

2.13 LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Örnek 2.1 :

$$y''-3y'+2y=4e^{2t} \;;\; y(0)=-3\,,\; y'(0)=5$$

diferansiyel denkleminin çözümü:

$$L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = 4L[e^{2t}]$$

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 3\,s\,y(s) + 3 + 2\,Y(s) = 4/(s-2)$$

Başlangıç şartları yerlerine konarak

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3s\,Y(s) + 3 + 2\,Y(s) = 4/(s-2)$$

$$(s^2 - 3s + 2)\,Y(s) + 3s - 14 = 4/(s-2)$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2+3s+2}$$

$$Y(s) = \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

Kısmi kesirlere ayırarak

$$Y(s) = \frac{K}{(s-1)} + \frac{C_2}{(s-2)^2} + \frac{C_1}{(s-2)}$$

$$K = \lim_{s\to 1} (s-1)\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2} = -7$$

$$C_2 = \lim_{s\to 2} (s-2)^2 \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2} = +4$$

$$C_1 = \lim_{s\to 2} \frac{d}{ds}(s-2)^2 \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2} = \left.\frac{-3s^2+6s+4}{(s-1)^2}\right|_{s=2} = +4$$

O halde

$$Y(s) = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{4}{s-2}$$

Cetvel 2.1 yardımıyla ters dönüşüm yapılarak

$$y(t) = -7\,e^{t} + 4t\,e^{2t} + 4\,e^{2t}$$

çözümü elde edilmiş olur. Diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü ile çözümü elde edilince, $y(t)$ çözümünün başlangıç şartıyla birlikte elde olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durum bir avantajdır.

Örnek 2.2 : Otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde sık karşılaşılan birinci mertebeden bir sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem alınsın

$$\tau y' + y = x(t) \quad , \quad y(0) = 0$$

$$\tau L[y'] + L[y] = L[x(t)]$$

$$x(t) = u(t) \quad \text{(birim basamak fonksiyonu)}$$

olsun.

$$\tau[sY(s) - y(0)] + Y(s) = 1/s$$

$$\tau[sY(s) - 0] + Y(s) = 1/s$$

$$(\tau s + 1)Y(s) = 1/s$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{1/\tau}{s(s + 1/\tau)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1/\tau}$$

$$K_1 = \lim_{s \to 0} s \frac{1/\tau}{s(s + 1/\tau)} = +1$$

$$K_2 = \lim_{s \to -1/\tau} \left(s + \frac{1}{\tau}\right) \frac{1/\tau}{s(s + 1/\tau)} = -1$$

O halde

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}$$

Ters dönüşüm ile

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

çözüm olarak bulunur.

2.14 LİNEERLEŞTİRME

Otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde kullanılan metodların çoğu lineer kontrol sistemleri için geliştirilmiştir. Lineer bir kontrol sisteminde, değişkenler arasındaki bütün bağıntılar lineer diferansiyel denklemlerdir ve çok defa sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerdir.

Laplace dönüşümü lineer sistemler için kullanılabilmektedir. Ancak, gerçekte kontrol sistemleri lineer olmayan elemanlar ihtiva edebilir. Bu yüzden kontrol sistemini belirleyen diferansiyel denklemler lineer olmaz. Çözüm aranırken, Laplace dönüşümünün uygulanabilmesi ve diğer çözüm

metodlarının kullanılabilmesi için lineer olmayan bağıntılar lineerleştirilmelidir.

Bir bağıntının lineer olması için y nin bağlı olduğu değişkenler olan $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ lerin hepsi birinci mertebeden olmalıdır:

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \ldots C_nx_n \tag{2.67}$$

Örnek olarak $y = x^2/K$ lineer olmayan bağıntısı alınsın. Çalışma noktası (x_i, y_i) ise, $y = x^2/K$ fonksiyonu (x_i, y_i) noktasındaki teğeti ile yaklaşıma alınabilir. Yeni bir çalışma noktası (x, y) olsun, Şekil 2.21.

Şekil 2.21 $Y = x^2/K$ fonksiyonu.

Bu yeni çalışma noktası için $x = x_i + \Delta x$ dir. x absisinden çizilen düşey doğru lineer olmayan eğriyi y_i den itibaren $\Delta y + \varepsilon$ da, yani $y = y_i + \Delta y + \varepsilon$ da keser; teğeti ise y_i den itibaren Δy de yani $y_i + \Delta y$ de keser.

Yaklaşık olarak:

$$y = y_i + \Delta y + \varepsilon \cong y_i + y \tag{2.68}$$

yazılabilir. Böylece, çalışma noktası civarında eğri yerine çalışma noktasındaki teğet alınıyor demektir.

Şekil 2.21 den teğetin eğimi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_i = (x_i, y_i) \text{ noktasındaki eğim} \tag{2.69}$$

$|_i$ sembolü, türevin (x_i, y_i) noktasında değerlendirileceği anlamındadır.

Böylece

$$\Delta y = \left.\frac{dy}{dx}\right|_i \Delta x = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{K}\right)\right|_i \Delta x = \frac{2x_i}{K}\Delta x \tag{2.70}$$

olur. (2.70) ifadesi (2.68) de yerine konarak

$$y \cong y_i + \frac{2x_i}{K}\Delta x \tag{2.71}$$

elde edilir.

Sayısal değer vererek lineerleştirme hatası hesaplanabilir.

$K=1$ olsun. O halde $y=x^2$ dir.

Çalışma noktası $x_i=10$ için seçilsin. $y_i=10^2=100$ dür. O halde çalışma noktası (10, 100) dür.

Yeni çalışma noktası $x=11$ olsun. Lineerleştirme ile, (2.71) bağıntısını kullanarak, ve $\Delta x=11-10=1$ için,

$$y \cong 100 + \frac{210}{1} 1 = 120$$

olur.

y nin gerçek değeri ise $y=x^2=11^2=121$ dir. Lineerleştirme yapmakla hata oranının

$$\frac{121-120}{121} = \frac{1}{121}$$

olduğu görülür. Hata oranı % 1 den küçüktür ve önemsenmiyebilir.

Lineerleştirmede, ilk çalışma noktasından fazla uzaklaşmamak şartı ile iyi sonuç alınır.

Lineer yaklaşıklık için genel ifade :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \tag{2.72}$$

olsun. Çalışma noktası $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} \dots x_{ni})$ ise

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\bigg|_i \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\bigg|_i \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\bigg|_i \Delta x_n \tag{2.73}$$

dir. Burada

$$\Delta y = y - y_i$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{1i}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_{2i}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{ni}$$

olmaktadır. Böylece

$$y \cong f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots x_{ni}) + \Delta y \tag{2.74}$$

olarak elde edilir.

(2.73) genel ifadesi, ele alınan basit örnek $y = x_2/K$ bağıntısına uygulansın. Bu örnekde bağımsız değişken bir tanedir ve $x = x_1$ dir. (2.73) ifadesi uygulanırsa

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\bigg|_i \Delta x$$

$$\Delta y = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{K}\right)\bigg|_i \Delta x = \frac{2x_i}{K}\Delta x$$

buradan toplam değer

$$y \cong y_i + \Delta y = y_i + \frac{2x_i}{K}\Delta x \tag{2.75}$$

bulunur. Genel yoldan bulunan (2.75) sonucu ile Şekil 2.21 üzerinde yapılan geometrik inceleme ile elde olunan (2.71) sonucu tamamen aynıdır.

3. SİSTEM DİNAMİĞİ

3.1 G İ R İ Ş

Teknolojik sistemlerin dinamik karakteristiklerinin incelenmesini mümkün kılmak için bu sistemlere ait fiziksel olayın idealleştirilmesi suretiyle modellerinin kurulması gereklidir. Model kurma işleminde genellikle çok kompleks olan bir teknolojik sistemin uygun kabullerle basit ve pek çok halde idealize edilmiş elemanlardan müteşekkil olarak tasarlanması sureti ile bir «**Fiziksel Model**» elde edilir. Fiziksel modelden itibaren de temel fizik kanunlarını kullanarak elemanların davranışını tanımlayan lineer veya lineer olmayan denklemler ve dolayısıyle «**Matematik Model**» elde edilmiş olur. Bir sistem için uygun bir Matematik Model bulunduktan sonra bilinen analiz metodları veya hesap makinaları ile hesaplama yardımıyle çözümü bulmak kabildir. Şekil 3.1.

Şekil 3.1.

Bilindiği gibi bütün teknolojik sistemler non-lineer karakterdedir. Lineer olmayan sistemlere ait matematik çözümleri elde etmedeki güçlükten ötürü genellikle sistem elemanlarının çalışma bölgesi içinde lineer oldukları kabul edilir.

Bu yaklaşımın hakiki duruma uyması nisbetinde model mükemmel olur. Böylece sistem için lineer elemanlardan müteşekkil bir lineer fiziksel model elde edildikten sonra Newton kanunu, Kirchoff kanunu, hidroliğin, termodinamiğin ve ısı transferinin temel kanunları gibi temel fiziksel kanunlar yardımıyle sistemin davranışını belirten lineer bir integro - diferansiyel denklem elde edilebilir. Bu denklemlerin çözümü lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan klasik metodlar, transformasyon metodları veya Elektronik Hesap Makinaları yardımıyle yapılır.

Örnek : Otomobil süspansiyon sisteminin fiziksel modelinin kurulması :

Bir yol üzerinde V hızıyle hareket etmekte olan bir otomobil Şekil 3.2 de şematik olarak gösterilmiştir. Bu otomobilin süspansiyon sisteminin fiziksel modeli basit halden karmaşık (kompleks) hale kadar gözönüne alınacaktır. Bu modelin kurulmasının gayesi arabanın ve yolcuların düşey hareketlerinin önceden bilinmesi ve ayrıca yay ve amortisör (sönüm elemanı) sisteminin optimum dizaynıdır. Esasen süspansiyon sisteminden beklenen düşey ivmelerin sıkıntı vermeyecek seviyeye indirilmesidir. Otomobilin süspansiyon sisteminin en basit olan fiziksel modeli Şekil 3.2'a da gösterilmiştir; Otomobil bir m kütlesine indirgenmiştir ve k otomobil yay ve makaslarının eşdeğer yaylanma katsayısını, b ise amortisör (sönüm elemanı) lerin eşdeğer sönüm katsayısını vermektedir. Bu basit model vasıtasıyle arabanın yol üzerindeki girinti - çıkıntılardan ötürü x_a düşey hareketi ve yay ile amortisördeki kuvvetler tayin edilebilir. Araba süspansiyonunun daha iyi bir fiziksel modeli Şekil 3.2.b de verilmiştir. Bu modelde tekerlek ve aksların toplam kütlesi m_t ve tekerlek lâstiklerinin yaylanması k_t de gözönüne alınmıştır.

Otomobilin sarsılmasını da inceleyebileceğimiz daha ileri ve daha elverişli, fakat daha karmaşık bir model Şekil 3.2.c de görülmektedir. Burada otomobilin gövdesi m kütlesinde ve kütle merkezine göre atalet momenti J olan bir rijit cisim olarak alınmıştır. Bu modelde arabanın ön ve arka kısımlarındaki eşdeğer yay ve amortisörler gösterilmiştir ve 2 yay, 2 amortisör, 2 tekerlek ve aks takımı ile 2 lâstik takımı bulunmaktadır. Şekil 3.2.d ise her tekerlekte bağımsız birer süspansiyon sistemini gösteren çok daha karmaşık fakat pratikteki uygulamaya en fazla uyan fiziksel modeli belirtmektedir.

V
yol
x_1
x_2
Ağırlık = mg
m
x_a
k
b
V
x (t)
(a)
Ağırlık = mg
m_1
x_a
k
b
m_2
x_1
k_1
V
x (t)
(b)
(c)

Şekil 3.2.

Yukarıdaki fiziksel modellerdeki sistem elemanlarının lineer olmayan karakterlerini de gözönüne almak mümkündür.

Bir sistemin fiziksel modelinin kurulmasında, sistemin davranışını en iyi belirten model genellikle karmaşıktır. Fiziksel modelden matematik modele geçilerek çözüm yolları aranacağına göre teknolojik sistemin davranışını belirtilen bir yaklaşıklıkla sağlayan en basit modelin seçilmesine çalışmakta büyük fayda vardır.

Fiziksel sistemlerin dinamik karakteristikleri enerji akışı, enerji mübadelesi (transformasyonu) ve depolanmasına bağlıdır. Çok kompleks olan fiziksel sistemlerin dinamik karakteristiklerini elde etmek için basit elemanların fiziksel ve lineer matematik modellerini bilmek ve sistemi teşkil eden eleman grubu için matematik modeli kurmanın gerekli olduğu belirtilmişti. O halde ideal basit elemanların incelenerek bunların arasındaki benzerliklerin gösterilmesinde fayda vardır.

3.2 BASİT SİSTEM ELEMANLARI

Bu kısımda elektriksel, mekanik, hidrolik ve termik sistemlere ait basit elemanlarda sebep (giriş) sonuç (çıkış) bağıntıları incelenecektir. Muhtelif sistemlerde basit elemanların değişkenleri arasındaki fiziksel bağıntıların benzer olması bu elemanlara ait matematik modeli aynı kılmaktadır. Bu durum ise sistemler arasındaki benzerlikleri açıkca ortaya koymakta ve analojinin esasını göstermektedir. Basit elemanların seri veya paralel olarak bağlanması ile ortaya çıkan kompleks sistemlerin matematik modelleri de kolayca elde edilebilmektedir.

Ayrıca matematik modeli aynı olan sistemlerin en elverişli analoglarının kurulması ve muhtelif parametrelerin etkilerini tayin için bunlar üzerinde deney yapma imkânı sistemlerin dinamik karakteristiklerini inceleme bakımından büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Basit elemanlarda Uç ve İç değişkeni :

Basit elektriksel elemanlar direnç ve kondansatörde olduğu gibi iki uçlu (A ve B gibi) elemanlardır, Şekil 3.3. Bir R direncinin A-B uçları arasına bir $e_{A,B}$ potansiyel farkı uygulanırsa dirençten i akımı geçtiği bilinmektedir.

$e_{A,B}$ ile i arasında tek fiziksel bağıntı vardır ve bu tip elemanlara iki uçlu eleman denir. İki uçlu elemanlarda değişkenlerden biri sebep (örneğin $e_{A,B}$) diğeri (örneğim akım) sonuçtur ve sebep - sonuç bağıntısı tek-

tir. İki uçlu bir elemanda $e_{A,B}$ nin ölçülebilmesi için bir Voltmetrenin devreyi bozmadan A ve B noktasına bağlanması kâfidir. Bu bakımdan $e_{A,B}$ potansiyel farkına **uç değişkeni** denir.

Şekil 3.3.

i akımını ölçmek için devreyi kesip bir ampermetre kullanmak gerekir; bu bakımdan akıma **iç değişkeni** denir. İç değişkeni elemanın her noktasında aynı değerdedir. Uç değişkeni ise sadece uçlar (A ve B noktaları) arasında tanımlanmıştır.

Mekanik sistem elemanlarında uç değişken **hız**, iç değişken ise **kuvvettir.** Gerçekten mekanik bir elemanın hızı sabit bir referans sistemine (dünyaya) göre mekanik eleman bağlantısını bozmadan ölçülebilir. Örnek olarak bir takometre ile dönen bir milin hızını (açısal hızını) ölçmek kolaydır. İç değişken olan kuvvetin ölçülmesine gelince mekanik bağlantıyı bozup araya bir dinamometre yerleştirmek zorunluğu vardır. Böylece elektriksel ve mekanik sistemlerde

Uç değişkenleri: e, $v = dx/dt$ veya $\omega = d\theta/dt$

İç değişkenleri: i, F (kuvvet) veya M (moment)

olmaktadır.

Benzer şekilde aynı kavram genişletilirse hidrolik sistemde p basıncı uç değişkeni, Q debisi iç değişkeni, termik sistemde T sıcaklık farkı uç değişkeni, q_T termik debisi iç değişken olmaktadır. Tablo 3.1 de muhtelif sistemlere ait uç ve iç değişkenleri gösterilmiştir.

Basit sistem elemanlarında uç değişken ve iç değişken kavramlarındaki benzerliğe ilâveten bu elemanlarda bir uç değişkeni bir iç değişkene bağlayan fiziksel bağıntı da benzerdir.

Tablo 3.1

	Elektiriksel	Mekanik		Hidrolik	Termik
		Doğrusal	Dönme		
Uç değişken: Devreyi açmadan ölçülebilen değişken	e (Potansiyel farkı)	v (Hız)	ω (Açısal hız)	p (Basınç)	T (Sıcaklık farkı)
İç değişken: devreyi bir yerden açarak ölçülen değişken	i (Akım)	F (Kuvvet)	M (Moment)	θ (Debi)	q_T (Termik debi)

Örnek olarak elektriksel ve hidrolik direnç ve kapasite elemanlarını gözönüne alalım. Bunlara ait fiziksel bağıntılar Kısım (3.5) de de belirtileceği üzere aşağıdaki gibi benzerdir.

	Direnç elemanı	Kapasite elemanı
Elektriksel	: $e=R\,i$	$C\,de/dt=i$
Hidrolik	: $p=R_H\,Q$	$C_H\,dp/dt=Q$

Temel fiziksel bağıntıların da benzer olması muhtelif sistemler arasında bir analoji bulunduğunu göstermektedir. Termik sistemlerde bu analojiden bazı ayrılmalar varsa da sistemlere analoji açısından toplu bakış sistem dinamiği bakımından önemli olmaktadır.

Bundan sonraki kısımda uç değişkeni ve iç değişkeni kavramından faydalanarak muhtelif sistemlere ait basit elemanlar bu yeni görüşle incelenecektir.

İki uçlu elemanlarda sebep - sonuç bağıntısı ve matematik model hatırlatılacak, ayrıca bunlara ait blok diyagramları da çizilecektir.

3.3 ELEKTRİKSEL SİSTEM ELEMANLARI

Elektriksel basit elemanlar Direnç, Kapasite, Endüktans, Transformatör ve Transdüktörlerdir. Elektriksel elemanlarda uç değişken potansiyel farkı e, iç değişken akım i dir.

Direnç elemanı : Bir direnç elemanının uçlarına (e) potansiyel farkı uygulanır ve dirençten i akımı geçerse Ohm kanununa göre

$$e = i\,R \text{ veya } R = de/di \tag{3.1}$$

dir.

İdeal direnç elemanında R direnci sabittir ve akım ile potansiyel farkından bağımsızdır. Hakikatte ise direnç sabit değildir ve e ile i bağıntısı nonlineerdir, Şekil 3.5. Denklem 3.1 deki fiziksel bağıntıya göre blok diyagramı Şekil 3.6 dadır.

Şekil 3.4.

Şekil 3.5.

Şekil 3.6.

Direnç elemanına verilen güç

$$G=i^2 R \tag{3.2}$$

olup, geri alınamaz.

2 — **Kapasite elemanı :** İki uçlu bir eleman olan Şekil 3.7 deki kondansatörün uçlarına e potansiyel farkı uygulanır akım i, kondansatörün kapasitesi C (farad) olmak üzere, ideal kapasite elemanında q akım yükü, e potansiyel farkı ile orantılı olup

$$q=C\,e \tag{3.3}$$

(q: Coulomb, C: Farad, e: volt)

$$\text{veya } i=C\,de/dt \tag{3.4}$$

dir.

Şekil 3.7.

Denklem (3.7) den

$$e=(1/C)\,i\,dt+e_0 \tag{3.5}$$

olur.

Kapasite elemanına ait blok diyagramı Şekil 3.8 dedir.

Kapasite elemanında depolanan enerji.

$$E=\int_0^t e\,i\,dt \tag{3.6}$$

Denlem 3.7 yardımıyla

$$E=1/2\,C\,e^2 \tag{3.7}$$

dir ve uç değişkeninden ötürüdür. Bu enerji tersinirdir ve kapasite elemanından geri alınabilir.

Şekil 3.8.

3. — Endüktans elemanı :

Bir helisel sargıdan geçen bir i akımının meydana getirdiği manyetik alan Lenz Kanununa göre değişen akıma karşı bir potansiyel farkı meydana getirir. İdeal bir endüktif eleman için

$$L\, di/dt = e \tag{3.8}$$

dir.

Şekil 3.9.

Denklem 3.8 e göre endüktans elemanı için blok diyagramı Şekil 3.10 dadır.

Şekil 3.10.

Endüktans elemanının depoladığı enerji

$$E=\int_0^t e\,i\,dt$$

Denklem (3.8) yardımıyle

$$E=\frac{L\,i^2}{2} \tag{3.9}$$

dir. Depolanan bu enerji iç değişkenden ötürüdür ve tersinirdir, elemandan geri alınabilir.

3.4 MEKANİK SİSTEM ELEMANLARI

Basit mekanik elemanlar yay, torsiyon yayı, damper, rotasyon damperi, kütle ve atalet momenti'dir.

1 — **İdeal Yay Elemanı :** Katı cisimler kuvvet tesiri ile deformasyon yaparlar. Kütlesi ihmal edilebilir ve bir ucu tesbit edilmiş yaya bir F kuvveti tesir ederse, ideal bir yayda F kuvveti ile bu kuvvetten ötürü meydana gelen x uzaması (deformasyonu) birbiriyle orantılıdır. Orantı katsayısı k ya yay katsayısı denir.

Şekil 3.11.

B noktasının A noktasına nazaran hızı

$$x'=\frac{1}{k}\,\frac{dF}{dt} \tag{3.10}$$

ve hıza bağlı olarak kuvvet

$$F=k\int_0^t x'\,dt+F_0 \tag{3.11}$$

Şekil 3.12.

olur. Yayın deformasyonu ile yapılan iş

$$W=\int_0^x F\,dx=\frac{1}{2}kx^2 \tag{3.12}$$

dir.

Böylece ideal bir yay için potansiyel enerji

$$E_p=\int_0^x F\,dx \tag{3.13}$$

$$E_p=\frac{1}{2k}F^2=\frac{1}{2}kx^2 \tag{3.14}$$

olur. Denklem (3.14) den görüldüğü üzere yayda depolanan enerji yaya tesir eden kuvvete bağlıdır. Ayrıca bir yaya verilen iş, kuvveti tekrar sıfıra indirmek suretiyle geri alınabilir.

Kuvvet altında deformasyon yapan her eleman yay karakterindedir ve hiç olmazsa muayyen bir çalışma bölgesi için ideal yay olarak ele alınabilir.

Şekil 3.13 de yay elemanı olarak çalışan bir kapsül görülmektedir.

Şekil 3.13.

2 — İdeal Damper (Viskoz Sürtme) Elemanı :

Kütlesi ve yay etkisi bulunmayan ve viskoz sürtme kuvvetlerinin hâkim olduğu ideal elemana damper denir. Viskoz akışa ait Newton Kanunu

$$\tau = \eta \, dv/dy \tag{3.15}$$

Şekil 3.14.

gözönüne alınırsa akışkan tabakaları arasındaki τ kayma gerilmesinin dv/dy den ibaret kayma oranı ile orantılı olduğu ve orantı katsayısı η nın da dinamik viskozite katsayısı adını aldığı bilinmektedir. Böylece sürtme kuvvetinin izafı hızla orantılı olması viskoz sürtme olarak tanımlanır.

Böylece Şekil 3.14 deki ideal damper elemanı için

$$F = b\dot{x} \tag{3.16}$$

dür.

b (kg san/m) ye söndürme katsayısı denir. Sürtme ile ilgili kuru sürtme veya cisimlerin sıvı veya gazlar içindeki hareketinden ortaya çıkan lineer olmayan sürtme şekilleri de Şekil 3.15 de görülmektedir.

Şekil 3.15.

$$W=\int_{x_1}^{x_2} F dx=\int_{t_1}^{t_2} F x' dt=b\int_{t_1}^{t_2} x'^2 dt \qquad (3.17)$$

dir.

Bu işin daima pozitif olmasından ötürü dampere dış kuvvet dolayısıyle verilen bu iş geri alınmaz.

Dinamik sistemlerde enerjinin yutulması ve titreşimlerin söndürülmesi bakımından damper önemli bir elemandır.

3 — İdeal Kütle Elemanı :

Her mekanik elemanın bir kütlesi vardır. Şekli karışık olan bir katı cismin kütlesini bir yerde toplu olarak göstermekle yığılmış parametreli bir eleman elde edilir.

Bir m kütlesine $\vec{F}$ kuvveti tesir eder ve sabit veya sabit hızla hareket eden bir referans sistemine göre ivme $\vec{\gamma}$ alınırsa

$$\vec{F}=m\vec{\gamma} \qquad (3.18)$$

dır. Şadece bir x ekseni istikametinde öteleme hareketi yapan bir kütle için

$$F=F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=mx'' \tag{3.19}$$

yazılabilir.

$$F=m\frac{dx'}{dt} \tag{3.20}$$

olduğundan hız

$$x'=\frac{1}{m}\int_0^t F\,dt+x'_0 \tag{3.21}$$

dir. Burada x'_0, $t=0$ anındaki hızdır.

Öteleme hareketi yapan bir kütleye F kuvveti tesir eder, hız x' olursa

$$E'=Fx' \tag{3.22}$$

bağıntısı ile belirli olarak kütleye güç verilir veya alınır.

Kütleye verilen iş

$$W_{1,2}=\int_0^t Fx'dt \tag{3.23}$$

dir. Bu iş hızı x' değerinden sıfıra düşürmekle geri alınır. Böylece bir kütlenin bir iç enerjisi olan kinetik enerjisi

Şekil 3.16.

$$E_k=\int_0^t Fx'dt=\frac{1}{2}mx'^2 \tag{3.24}$$

dir. Görüldüğü gibi kütle hızı dolayısıyle enerjiyi depolamakta ve bu enerji hızı küçülterek geri alınmaktadır.

4 — Döner Elemanlar :

Öteleme hareketinde olduğu gibi dönme hareketi yapan elemanlarda da benzer olarak yay (torsiyon yayı), damper ve atalet momenti ile gösterilebilecek ideal elemanlar tanımlamak kabildir.

a — Torsiyon yayı

Döndürme momenti M(kg m), dönme açısı θ (radyan), yay katsayısı k olmak üzere

$$M=k\theta \tag{3.25}$$

dır.

Şekil 3.17.

$$\text{Hız } \omega=\dot{\theta}=\frac{1}{k}\,\frac{dM}{dt} \tag{3.26}$$

dir.

$$\text{Buna göre } M=k\int_0^t \omega dt+M_o \tag{3.27}$$

olur. Torsiyon yayında depolanan potansiyel enerji

$$E_p = \int_{\theta}^{0} M d\theta = \frac{1}{2k} M^2 = \frac{1}{2} k\theta^2 \qquad (3.28)$$

dir.

Bu enerji M momentini küçülterek geri alınabilir.

b — Rotasyon damperi

Hidrolik kavrama gibi viskoz sürtmenin hâkim olduğu elemanlarda, ideal (lineer) hal için ω izafî hız ile orantılı bir moment elde edilir.

$$M = b\omega = b\theta' \qquad (3.29)$$

dır.

Söndürme katsayısı b Kgm. sec/rad. boyutundadır.

Dampere verilen güç

Şekil 3.18.

$$G=b\omega^2=M^2/b>0 \tag{3.30}$$

dır. Ve öteleme yapan lineer damperde olduğu gibi bu güç geri alınamaz.

c — Bir eksen etrafında dönen kütle

Bir eksen etrafında dönen kütle, bir atalet momentiyle gösterilerek yığılmış parametreli bir ideal eleman elde edilir.

Şekil 3.19.

Dönen kütlenin, dönme ekseni etrafındaki atalet momenti J, açısal ivme $d\omega/dt=d^2\theta/dt^2$ ve döndürme momenti M ise

$$M=J\frac{d^2\theta}{dt^2}=J\frac{d\omega}{dt} \tag{3.31}$$

dir. Dönen kütleye verilen iş

$$W=\int_t^0 M\omega dt \tag{3.32}$$

dır. Bu elemanda kinetik enerji olarak depolanan enerji

$$E_k=\int_0^t M\omega dt=\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{3.33}$$

olur. Atalet momenti açısal hızdan ötürü enerji depoladığından açısal hızı düşürmek yoluyla bu enerji geri alınabilir.

3.5 BASİT HİDROLİK ELEMANLAR

Hidrolik sistemlerde basınç (p) uç değişkeni, debi (Q) iç değişkenidır. Genellikle basınç sebep, debi sonuçtur. Ancak deplasmanlı tipten dişli, paletli ve pistonlu pompalarda debi sebep, basınç sonuç olur.

Hidrolik sistemler depo, boru, sukbe ve valf gibi elemanları ihtiva eder.

Hidrolik Direnç Elemanı :

Hidrolik sistemlerde akışı zorlaştırıp sınırlayan her eleman direnç olarak gözönüne alınabilir. Bu bakımdan valf, sukbe, kapiler boru (küçük çaplı uzun boru), gözenekli tapa dirençtir.

a — Laminer akış:

Şekil 3.20 de gösterilmiş bulunan deponun ucundaki kapiler borudaki laminer akışta debi ile basınç (sıvı yüksekliği) arasındaki bağıntıyı Hagen-Poisenille formülü verir.

Şekil 3.20.

r : boru çapı
L : boru uzunluğu
η : dinamik viskozite
g : yer çekimi ivmesi
h : depodaki sıvı yüksekliği
Q : debi

olmak üzere

$$Q=\frac{r^4}{8\eta}\,\frac{\rho gh}{L} \qquad (3.34)$$

veya

$\rho gh=p$ (basınç farkı)

ile

$$Q=\frac{\pi r^4}{8\eta}\ \frac{p}{L} \tag{3.35}$$

dir.

Uç ve iç değişkenlerine bağlı olarak ve Denklem (3.1) deki direnç tarifine göre hidrolik direnç

$$R_H=\frac{dh}{dQ}=\frac{8\eta L}{\pi r^4 \rho g}=\text{sabit} \tag{3.36}$$

veya

$$R_H=\frac{dp}{dQ}=\frac{8\eta L}{\pi r^4}=\text{st} \tag{3.37}$$

olup

$$\begin{aligned} h&=R_H Q \\ p&=R_H Q \end{aligned} \tag{3.38}$$

yazılabilir.

(Elektriksel sistemdeki $e=R\,i$ bağıntısı ile benzerliğe dikkat). Şu halde R_H hidrolik direnci laminer akışta Şekil 3.22 de görüldüğü üzere lineerdir.

Şekil 3.21.

Şekil 3.22.

Gözenekli malzemeden yapılmış ve borulara yerleştirilmiş direnç elemanı da lineerdir (Şekil 3.21).

b — Türbelanslı akış:

Borulardaki akışlarda Reynolds sayısı 2000 in üstünde olur ve akış türbülanslı halde ise (Şekil 3.23).

Şekil 3.23.

C : akış katsayısı (0,6—0,8)

A : geçit alanı

olmak üzere

$$Q=CA\sqrt{2gh} \tag{3.39}$$

dır. Veya $p_1-p_2=p$ (basınç farkı) ile

$$Q=CA\sqrt{\frac{2g}{\gamma}p} \tag{3.40}$$

Türbülanslı akışta hidrolik direnç Denklem (3.39) dan

$$R_H=dh/dQ=2h/Q \tag{3.41}$$

olur. Görüldüğü gibi bu halde direnç elemanı sabit (lineer) olmayıp basınç farkı ile değişmektedir. Şekil 3.24 de Türbülanslı akış için basıncın debiye bağlı olarak değişmesi görülmektedir. Eğrinin herhangi bir noktasındaki teğetin eğimi o çalışma durumuna tekabül eden direnci verir. Çalışma noktası etrafında küçük ayrılmalar gözönünde tutulursa hidrolik direnç

$$R_H=dh/dQ=\Delta h/\Delta Q\cong st \tag{3.42}$$

kabul edilebilir.

Şekil 3.24.

Şekil 3.25 de hidrolik direnç elemanı için blok diyagramı gösterilmiştir.

Şekil 3.25.

Şekil 3.26.

Hidrolik Kapasite Elemanı :

Hidrolik sistemlerde açık veya basınçlı, depo ve hidrolik akümülatörler basınçtan ötürü enerji depolayan kapasite elemanlarıdır.

Şekil 3.26 deki depo alttaki besleme borusundan Q debisi ile beslenirse yer çekimine karşı depodaki sıvı seviyesinin (basıncın) yükseltilmesinden ötürü enerji depo edilir. Depo için süreklilik denklemi

$$Q=\frac{d}{dt}(\rho Ah) \tag{3.43}$$

olup burada ρ (sıkıştırılamaz akışkan için sabit) ve serbest alan sabit olmak üzere

$$Q=A\,dh/dt \tag{3.44}$$

ve

$$p_{2,1}=\rho gh$$

ile

$$Q=\left(\frac{A}{\rho g}\right)\frac{dp}{dt} \tag{3.45}$$

dir. Bu bağıntıda uç ve iç değişkenleri gözönüne alınır ve

$$C_H=A/\rho g$$

hidrolik kapasite olarak alınırsa

$$Q=C_H\,dp/dt \tag{3.46}$$

elde edilir.

Denklem (3.46) Elektriksel kapasite eleman için Denklem (3.4) de verilmiş olan bağıntısının aynıdır.

Sabit kesitli depodaki sıvının hacmi

$$V=A\,h$$

$$h=\frac{p_{2,1}}{\rho g} \tag{3.47}$$

$$V=\frac{A}{\rho g}\,p_{2,1} \tag{3.48}$$

veya

$$V = C_H p_{2,1} \tag{3.49}$$

bulunur.

Hidrolik kapasite elemanında depolanan potansiyel enerji

$$E = \int pQdt \tag{3.50}$$

$$Q = C_H \frac{dp}{dt} \tag{3.51}$$

yardımıyle

$$E_p = \frac{C_H p^2_{1,2}}{2} \tag{3.52}$$

dir. Denklem (3.49) yardımıyle depolanan enerji

$$E_p = \frac{V^2}{2C_H} \tag{3.53}$$

olur ve bu enerjinin depodaki sıvının hacmi ve seviyesine bağlı olduğu görülür.

Şekil 3.27 de hidrolik kapasite elemanına ait blok diyagramı görülmektedir.

Şekil 3.27.

Hidrolik Endüktans (Inertans) :

Hidrolik sistemlerde elektriksel endüktans etkisine benzer bir etki akışkanın ivmelenmesinden ortaya çıkmaktadır. Borularda ani debi değişmelerinin meydana geldiği hallerde kendini gösteren bu etkiyi izah için kesit alanı A, uzunluğu L olan bir borudan geçen sıkıştırılamaz ve sürtmesiz (ideal) bir akışkanın boru uçlarındaki $p = p_2 - p_1$ basınç farkından ötürü ivmelendiği gözönüne alınırsa

Şekil 3.28.

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}$$

Newton Kanununa göre

Kuvvet $F=Ap$

Kütle $m=\rho AL$

İvme $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{1}{A}\dfrac{dQ}{dt}$

olduğundan

$$pA=\rho AL\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} \tag{3.54}$$

veya

$$p=\frac{\rho L}{A}\frac{dQ}{dt} \tag{3.55}$$

$$L_H=\rho L/A$$

hidrolik endüktansı gösterirse

$$p=L_H\,dQ/dt \tag{3.56}$$

bulunur. Bu bağıntı elektriksel endüktans elemanı için Denklem (3.8) de gösterilmiş olan

$$e=L\,di/dt$$

bağıntısının aynıdır.

İvmelenmeden ötürü boruda depolanan akışkanın kinetik enerjisi

$$E_k=\int_0^t pQdt \tag{3.57}$$

Denklem (3.56) yardımıyle

$$E_k = \frac{L_H Q^2}{2} \tag{3.58}$$

bulunur.

Şekil 3.29 da hidrolik endüktans elemanı ve buna ait blok diyagramı gösterilmiştir.

Şekil 3.29.

3.6 BASİT TERMİK ELEMANLAR

Termik sistemlerde uç değişkeni sıcaklık farkı, iç değişken ise ısı debisi olarak gözönüne alınırsa Termik Direnç ve Termik Kapasiteyi elektriksel ve hidrolik sistemlerdekine benzer şekilde tanımlamak kabil olmaktadır. Ancak enerji depolanması ile ilgili konuda termik sistemde analojiden ayrılma vardır. Çünkü iç değişken olan ısı debisi aynı zamanda termik enerjiden ibarettir.

Termik direnç :

Malzemelerin ısı geçirgenlikleri çok farklı olmaktadır. Isı geçirgenliği düşük olan malzeme yalıtkan olarak kullanılır. Termik sistemlerde durum idealize edilerek ve termik kapasitesi olmayan (kabili ihmal) ve ısı akımını güçleştiren elemana termik direnç demek kabildir.

Katı cisimlerde iletimle ısı yayılması halinde, ısı debisi Fourier kanununa göre

$$q = -kA\frac{\theta_2 - \theta_1}{x} \tag{3.59}$$

dir.

Isı enerjisinin yayılması sıcaklık farkı ile olur.

Burada

q : Isı debisi, Kcal/san.

k : Isı iletim katsayısı, kcal/san m°C

A : alan, m²

$\theta_2 - \theta_1/x$: ısı gradyanı

dır. Termik direnç olarak

$$R_T = \frac{\theta_{2,1}}{q}$$

tanımlanırsa

Şekil 3.30.

$$R_T = x/kA$$

olur.

Taşınım yoluyla ısı yayılması halinde h (kg cal/°C san m²) ısı taşınım katsayısı olmak üzere

$$q = hA(\theta_2 - \theta_1) \tag{3.60}$$

dır ve

$$R_T = 1/hA \tag{3.61}$$

bulunur. Gerek ısı iletim katsayısı k ve gerekse ısı taşınım katsayısı h sıcaklıkla değiştiklerinden termik direnç sabit değildir ve ideal dirençten ayrılma vardır.

Işınım yoluyle ısı yayılmasında Stefan-Boltzmann kanununa göre ısı debisi sıcaklığın 4 ncü kuvveti ile orantılı olarak değişmektedir. Bu halde R_T direnci lineer direnç durumundan büyük ayrılma göstermektedir.

Şekil 3.31 de termik direnç elemanı için blok diyagramı gösterilmiştir.

Şekil 3.31.

Termik Kapasite Elemanı :

Katı, sıvı ve gaz olmak üzere her maddenin iç enerjinin depolanmasını sağlayan ve kütle ile özgül ısı çarpımına eşit bir termik kapasitesi bulunmaktadır.

Şekil 3.32 deki yalıtılmış m kütlesine q termik debisi verilirse özgül ısı C_p ve üniform sıcaklık θ olmak üzere

Şekil 3.32.

$$C_p m \, d\theta/dt = q \tag{3.62}$$

$$C_T = C_p m$$

termik kapasiteyi göstermektedir. Buna göre

$$C_T \frac{d\theta}{dt} = q \tag{3.63}$$

uç ve iç değişkenler bakımından elektriksel sisteme ait

$$C \frac{de}{dt} = i \tag{3.64}$$

bağıntısının aynıdır.

Şekil 3.33 de termik kapasite elemanına ait blok diyagramı gösterilmektedir.

Termik sistemlerde endüktans elemanı bulunmamaktadır.

Şekil 3.33.

3.7 BASİT ELEMANLARDA ENERJİ DEPOLANMASI

İncelenmiş bulunan elektriksel mekanik, hidrolik ve termik sistemlere ait basit elemanların enerji depolanması bakımından benzerlikleri Tablo 3.2 de belirtilmiştir.

3.8 GENELLEŞTİRİLMİŞ EMPEDANS

Basit elemanların seri veya paralel bağlanmalarıyle eleman grupları oluşur. Eleman gruplarının incelenmesinde uç değişkeni ile iç değişkenini birbirine

Tablo 3.2

Uç değişkeni ile Enerji depolanması	İç değişkeni ile Enerji depolanması	Enerji yutan elemanlar
Kütle $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	Yay $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{k}$	Damper $G = b \cdot v^2 = \frac{F^2}{b}$
Atalet Momenti $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$	Torsiyon Yayı $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{k}$	Rotatif Damper $G = b \cdot \omega^2 = \frac{M^2}{b}$
Elektrik Kapasite $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^2$	Endüktans $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$	Direnç $G = \frac{e^2}{R} = R \cdot i^2$
Hidrolik Kapasite $\mathcal{E}_H = \frac{1}{2} \cdot C \cdot p^2$	Hidrolik Endüktans $\mathcal{E}_H = \frac{1}{2} \cdot L_H \cdot Q^2$	Hidrolik Direnç $G = \frac{1}{R_H} \cdot p^2$
Termik Kapasite $\int q \, dt = C_T \cdot \theta$	$G = q$	Termik Direnç $G = q = \frac{1}{R_T} \cdot \theta$

$$E = Z\,I \tag{3.65}$$

olarak bağlayan bağıntıda

E : Elektriksel, mekanik, hidrolik uç değişkeni

I : İç değişkeni

Z : Empedans

olarak tanımlanmıştır.

Empedans kavramı elektriksel devreler için geliştirilmiş olup, diğer sistemlere de Bölüm 3.2 de incelenmiş bulunan analoji çerçevesinde oluşturulmuştur.

Seri Bağlama :

Elektrik sisteme ait basit elemanlardan direnç, kapasite ve endüktans elemanlarını Şekil 3.34 de gösterildiği gibi seri olarak bağlayalım.

Şekil 3.34.

1-4 uçları arasına E potansiyel farkı uygulanırsa direnç, kapasite ve endüktans elemanların uçlarındaki potansiyel farkları E_R, E_C, E_L olmak üzere

$$E=E_R+E_C+E_L \tag{3.66}$$

dir.

I akımı ise bu basit elemanlarda aynıdır. Bundan ötürü

$$E_R=IR\,,\ E_C=\frac{1}{Cs}\,I\,,\ E_L=LsI$$

olduğundan

$$E=(R+Ls+1/Cs)I \tag{3.67}$$

yazılabilir.

$$Z=R+Ls+1/Cs \tag{3.68}$$

seri bağlamaya ait empedans olup

$$E=Z\,I \tag{3.69}$$

dir ve sebep - sonuç bağıntısında uç ve iç değişkene göre blok diyagram da Şekil 3.35 de gösterilmiştir.

Şekil 3.35.

Fiziksel sistemlere ait eleman gruplarında seri bağlama halinde iç değişken (akım, kuvvet, hidrolik debi, termik debi) aynı kalmakta ve gruba ait empedans basit elemanların empedansları toplamı olmaktadır.

Paralel Bağlama :

Şekil 3.36 da gösterildiği gibi paralel bağlamada uç değişkeni aynı olmaktadır.

Şekil 3.36.

İç değişken için

$$I = I_R + I_L + I_C \tag{3.70}$$

veya

$$I = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs\right) E \tag{3.71}$$

buradan da

$$E = \frac{1}{(1/R) + (1/Ls) + Cs} I \tag{3.72}$$

yazılabilir. Paralel bağlama halinde empedans

$$E = Z I \tag{3.73}$$

$$Z = \frac{1}{(1/R) + (1/Ls) + Cs} \tag{3.74}$$

olmaktadır.

Muhtelif fiziksel sistemlerde eleman grupları için empedansların hesaplanmasına yardımcı olmak üzere Tablo 3.3 de basit elemanlara ait fiziksel bağıntılar toplu bir şekilde gösterilmiştir.

Tablo 3.3

	Direnç	Endüktans	Kapasite
Elektriksel Sistem	R $e = i.R$	L $e = Lsi$	C $e = \frac{1}{Cs} i$
Mekanik Sistem	Doğrusal damper $x' = \frac{1}{b} F$ Döner damper $\theta' = \frac{1}{b} M$	Doğrusal yay $x' = \frac{1}{k} sF$ Torsiyon yayı $\theta' = \frac{1}{k} sM$	Kütle $x' = \frac{1}{ms} F$ Atalet $\theta' = \frac{1}{Js} M$
Hidrolik Sistem	Q Q $p = R_H Q$	Q $p = L_H sQ$	Q $p = \frac{1}{C_H s} Q$
Termik Sistem	θ_2 θ_1 $\theta = R_T q$	—	q θ $\theta = \frac{1}{C_T s} q$

Tablo 3.3 yardımıyle elektriksel, mekanik, hidrolik ve termik sistemlere ait analog devreleri kurmak kabildir. Örnek olarak elektriksel sistemde direnç, endüktans ve kapasitenin (kondansatör) seri bağlanmasının mekanik sistemdeki eşdeğeri Şekil 3.37 de gösterilmiştir.

Elektriksel sistem

$$Z = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

Mekanik sistem

$$Z = \frac{1}{b} + \frac{1}{k}s + \frac{1}{ms}$$

$$R = \frac{1}{b}$$

$$L = \frac{1}{k}$$

$$C = m$$

$$x' = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{k}s + \frac{1}{ms}\right)F$$

Elektriksel analog devre

Şekil 3.37.

Paralel bağlama için Şekil 3.38 a daki sistem Şekil 3.38 b dekine eşdeğerdir. Çünkü uç değişken hız, kütle, yay ve damper uçlarında aynıdır. Bu şekil ise mekanik empedansın yazılması bakımından kolaylık sağlamaktadır.

$$Z=\frac{1}{b+(k/s)+ms} \tag{3.75}$$

dir.

$$x^{\cdot}=ZF \tag{3.76}$$

olur.

Tablo 3.3 deki fiziksel bağıntı tablosunu uç ve iç değişkenlerden türetilecek diğer değişkenleri de gözönüne alarak genişletmek mümkündür. Gerçekten uç değişken olarak hız $x^{\cdot}$ yerine yer değiştirme x alınırsa $x^{\cdot}$ için bulunmuş mekanik empedansın entegre edilmesi gerekir. Böylece seri bağlamada

$$x=\left(\frac{1}{ms^2}+\frac{1}{bs}+\frac{1}{k}\right)F \tag{3.77}$$

Şekil 3.38.

Paralel bağlama için

$$x=\frac{1}{ms^2+bs+k}F \tag{3.78}$$

bulunur.

Problemler :

Şekil 3.38 deki elektriksel sistemin empedansını bulunuz.

R_1 ve C_1 kendi aralarında paralel olduğundan empedans

$$Z_1=\frac{1}{(1/R_1)+C_1s}=\frac{R_1}{R_1C_1s+1}$$

Toplam sistemin empedansı

Şekil 3.39.

$$Z = Z_1 + R_2$$

$$Z = \frac{R_1 + R_2(R_1C_1s+1)}{R_1C_1s+1} \tag{3.79}$$

$$E_1 = I\,Z \;,\; E_2 = I\,R_2$$

$$E_2 = \frac{R_2}{Z}\,E_1 \tag{3.80}$$

$$\frac{R_2}{Z} = \frac{R_2(R_1C_1s+1)}{R_1+R_2(R_1C_1s+1)} \tag{3.81}$$

blok diyagramı Şekil 3.40 daki gibi bulunur.

Şekil 3.40.

Şekil 3.41 deki mekanik sistemde elemanlar-iç değişken F kuvveti elemanlarda aynı olduğundan seri bağlanmıştır.

$$Z = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{bs}\right)$$

$$Z = \frac{bs+k}{kbs}$$

$$x = \frac{bs+k}{kbs}\,F \tag{3.82}$$

Şekil 3.41.

Blok diyagramı Şekil 3.41 b deki gibidir.

Şekil 3.42 deki mekanik sistemde k_1 yayı, kendi aralarında paralel bağlı k_2 yayı, b damperi ve m kütlesiyle seri bağlıdır. Deplasmanlar bahis konusu olduğundan eşdeğeri Şekil 3.42 b olur ve

Şekil 3.42.

$$x=\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{ms^2+bs+k_2}\right)F \tag{3.83}$$

$$x=\left(\frac{ms^2+bs+k_1+k_2}{k_1(ms^2+bs+k_1)}\right)F \tag{3.84}$$

$$y=\frac{1}{ms^2+bs+k_2}F \tag{3.85}$$

dir.

Denklem (3.85) ve (3.84) ü taraf tarafa bölerek y'yi x cinsinden de hesaplamak kabildir. Şekil 3.42 deki mekanik sistemin elektriksel analoğu Şekil 3.43 de gösterilmiştir.

Şekil 3.43.

4. TRANSFER FONKSİYONU, BLOK DİYAGRAMI VE İŞARET AKIŞ DİYAGRAMI

4.1 GİRİŞ

Kontrol sistemleri, genellikle, çok sayıda elemana sahiptir. Bir kontrol sistemini oluşturan dinamik elemanların davranış özelliklerini ve bu elemanların arasındaki fonksiyonel bağıntıyı göstermek için «blok diyagramları» kullanılır. Blok diyagramları, kontrol sistemlerinin incelenmesinde ve dizayn edilmesinde önemli yararlar sağlar. Herbir dinamik eleman «blok» adı verilen dikdörtgen bir şekil ile gösterilerek içine o elemanın dinamik davranışını temsil eden ve «transfer fonksiyonu» (TF) adı verilen matematik bir sembol yazılır. Bloklar birbirine bilgi akış yönünü gösteren yönlenmiş doğru parçaları ile bağlanır. Böylece sistemin fonksiyonel işleyişini belirten bir diyagram elde edilir. Bu bakımdan, soyut matematik denklemler yazmak yerine blok diyagramlarının kullanılması, kontrol sistemlerinin incelenmesinde ve sebep - sonuç bağıntılarının gözönünde canlandırılmasında çok elverişli olmaktadır. Ayrıca, blok diyagramları, sistemlerin fiziksel yapıları ile ilgili olmayıp, fonksiyonel işleyişi gösterdiğinden birbirinden farklı fiziksel yapıdaki sistemlerin aynı blok diyagramına sahip olması mümkündür. Bu da ilâve bir inceleme kolaylığı sağlar.

Çok girişli ve çok çıkışlı kontrol sistemlerinde ve çeşitli geri besleme çevrimlerinin birbirini etkilediği durumlarda, kısaca, karmaşık kontrol sistemlerinde blok diyagramlarını kullanarak inceleme yapmak ve özellikle sebep-sonuç bağıntılarını elde etmek için «indirgeme» metodunu uygulamak zorlaşabilir. Bu gibi durumlarda, «işaret akış diyagramları»nın kullanılması yararlı olmaktadır. İşaret akış diyagramları için S. J. Mason tarafından geliştirilmiş bulunan «kazanç formülü» ile, «indirgeme» işlemine gerek kalmaksızın sistem değişkenleri arasındaki sebep-sonuç bağıntısı kolayca elde edilebilir. Ne var ki, işaret akış diyagramı metodu sadece doğrusal sistemlere veya doğrusal denklemlerle ifade edilebilen sistemlere uygulanabilir. Buna karşılık, blok diyagramı metodu doğrusal olmayan sistemler için de kullanılmaktadır.

4.2 TRANSFER FONKSİYONU

Doğrusal sabit katsayılı diferansiyel denklemlerle ifade edilen kontrol sistemlerinin giriş-çıkış bağıntılarının belirtilmesinde geniş ölçüde Transfer Fonksiyon'ları kullanılmaktadır.

Bir doğrusal sabit katsayılı sistemin Transfer Fonksiyonu (TF), başlangıç şartları sıfır kabul edilerek, sistemin çıkışının (cevap fonksiyonunun) Laplace dönüşümünün sistemin girişinin (ikaz fonksiyonunun) Laplace dönüşümüne oranı olarak tanımlanır.

Doğrusal, sabit katsayılı bir sistemi ifade eden diferansiyel denklem

$$a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots\dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t)$$

$$= b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots\dots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} \qquad (4.1)$$

olsun. Burada, $c(t)$ çıkış değişkeni, $r(t)$ giriş değişkenidir. $a_0, a_1, \dots a_n$ ve $b_0, b_1, \dots b_m$ sabit katsayılardır. $n \geqslant m$ dir.

(4.1) diferansiyel denklemi ilgili sistemin girişi $r(t)$ ile çıkışı $c(t)$ arasındaki temel bağıntıyı vermektedir. Giriş değeri ve başlangıç şartları belli ise, çıkış değeri $c(t)$ (4.1) diferansiyel denklemi çözülerek elde edilebilir. Doğrusal sistemlerin incelenmesinde çok yaygın şekilde kullanılan Transfer Fonksiyonu'nu elde etmek için sıfır başlangıç şartları kabulü ile, (4.1) diferansiyel denkleminin heriki tarafının Laplace dönüşümü alınarak

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) C(s) =$$

$$= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} + b_m) R(s) \qquad (4.2)$$

bulunur.

$$TF = G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \qquad (4.3)$$

olarak Transfer Fonksiyonu elde edilir.

Denklem (4.3)'e göre $C(s) = G(s) \cdot R(s)$ dir ve ilgili blok diyagramı Şekil 4.1 de gösterilmiştir.

Şekil 4.1 Bir sistemin giriş-çıkış bağıntısını gösteren blok diyagramı.

Bir sistemin Transfer Fonksiyonu, o sisteme ait dinamik karakteristiklerin tamamını ihtiva eder. Ancak, sistem doğrusal, sabit katsayılı diferansiyel denklemle modellenebilir olmalıdır. Bu halde transfer fonksiyonu, bir sistemin çıkış değişkenini giriş değişkenine bağlıyan diferansiyel denklem üzerinde yapılan işlemle elde edilen ve sistemin diferansiyel denklemlerinin gerçek çözümlerinin bulunmasına gerek kalmadan, belirli analiz ve dizayn metodlarının uygulanmasına imkân veren matematiksel bir modeldir. Transfer fonksiyonu sistemin kendisine ait özelliklerin hepsine sahiptir ve giriş değişkeninin büyüklüğünden ve yapısından bağımsızdır. Birbirinden farklı fiziksel sistemlerin transfer fonksiyonu aynı olabilir, zira transfer fonksiyonları sistemlerin fiziksel yapıları hakkında bilgi ihtiva etmez. Fakat giriş değişkenini çıkış değişkenine bağlamak için gerekli birimleri ihtiva eder. Bir sistemin transfer fonksiyonu biliniyor ise, çeşitli giriş değişkenlerine cevapları incelenerek sistemin davranış özellikleri (kişiliği) belirlenir. Bir sistemin transfer fonksiyonu bilinmiyor ise, belirli giriş fonksiyonları deneysel olarak uygulanır ve elde edilen cevaplar incelenerek transfer fonksiyonu deneysel olarak bulunabilir.

Örnek 4.1

Bir sistemin transfer fonksiyonunu elde etmeye basit bir örnek olarak basit bir mekanik sistem ele alınsın, Şekil 4.2.

Şekil 4.2 Basit mekanik sistem.

Şekil 4.2 de gösterilen ve yaylanma katsayısı k olan bir yay, sönümleme katsayısı b olan bir damper ve kütlesi m olan bir kütle elemanlarından oluşan bir serbestlik dereceli basit mekanik sistem f(t) kuvvetine maruz kalınca x(t) yer değişimini yapmaktadır. Bu sisteme Newton'un ikinci kanunu uygulanarak

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t) \tag{4.4}$$

elde olunur. Burada f(t) kuvveti giriş değişkenini x(t) yer değişimi ise çıkış değişkenini göstermektedir. (4.4) diferansiyel denklemi giriş değişkenini çıkış değişkenine bağlayan temel denklemdir. Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınarak, başlangıç şartları sıfır kabul edilmek suretiyle,

$$ms^2X(s)+bsX(s)+kX(s)=F(s) \tag{4.5}$$

bulunur. Buradan

$$(ms^2+bs+k)X(s)=F(s)$$

ve sisteme ait transfer fonksiyonu

$$TF=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Transfer fonksiyonu, çıkış değişkeninin Laplace dönüşümünün, X(s), giriş değişkenin Laplace dönüşümüne, F(s), oranı olarak elde edilmiştir. Şekil 4.3 ilgili blok diyagramını göstermektedir.

Şekil 4.3 Basit mekanik sisteme (Şekil 4.2) ait blok diyagramı ve transfer fonksiyonu.

4.3 Blok diyagramı

Blok diyagramları bu bölümün girişinde belirtildiği üzere kontrol sistemlerinin incelenmesinde basitlik ve kullanışlılık sağlar. Blok diyagramları ile kontrol sistemlerini oluşturan çeşitli elemanların birbirlerine fonksiyonel olarak nasıl bağlı olduklarını ve sebep-sonuç bağıntılarını basit ve

açık bir şekilde göstermek mümkündür. Blok diyagramlarının kullanılması geneldir. Doğrusal olmayan sistemlere de uygulanabilir. Doğrusal sistemlere uygulandığında sistemde blok diyagramı cebri kullanılarak, pekçok doğrusal elemandan oluşan sistemin bütününe ait transfer fonksiyonu elde edilebilir.

Bir blok diyagramında ilgili sisteme ait bütün değişkenler birbirlerine blok elemanlar üzerinden bağlıdır. Böyle bir blok eleman Şekil 4.4 gösterilmiştir.

Şekil 4.4 Bir blok eleman.

Şekil 4.4 de görüldüğü gibi blok eleman bir dikdörtgen ile gösterilir ve içine temsil ettiği bileşene ait transfer fonksiyonu yazılır. Giriş ve çıkış değişkenlerini belirten oklar blok elemana yönlenmiş ve blok elemanı terk eder şekilde gösterilir. Okların yönü bilgi akışının yönüdür ve bilgi sadece oklarla belirtilen yönde geçer. Şekil 4.4 deki blok içine yazılmış bulunan G(s) transfer fonksiyonu Laplace dönüşümü şartlarında tanımlanmıştır ve Laplace oparatörü s'nin cebirsel bir fonksiyonudur. G(s), başlangıç şartları 0 olmak kaydıyla çıkış değişkeninin Laplace dönüşümü Y(s)'nin giriş değişkeninin Laplace dönüşümü X(s)'e oranı olarak tanımlanır.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \tag{4.7}$$

Buradan, «Dinamik Eleman» bağıntısı adı verilen ve çıkış ile giriş değişkenlerini birbirine bağlayan bağıntı elde edilir.

$$Y(s)=G(s)X(s)$$

Çıkış değişkeni, giriş değişkeni ile transfer fonksiyonunun cebirsel çarpımına eşittir. Çıkış değişkeninin fiziksel boyutu, giriş değişkeninin ve blok transfer fonksiyonunun fiziksel boyutlarının çarpımıdır.

Giriş değişkenine, giriş büyüklüğü, ikaz veya sebep, çıkış değişkenine ise çıkış büyüklüğü, cevap veya sonuç isimleri de verilir.

Bir sistemin blok diyagramı, o sistemi oluşturan elemanları temsil eden blok elemanların birbirlerine sistem içindeki bilgi akış yönünü gösterecek şekilde bağlanmasıyla kolayca elde edilir. Böylece bulunan ve sistemin tamamını temsil eden genel blok diyagramının incelenmesinden sistemin fonksiyonel çalışması, fiziksel sistemin kendisinin doğrudan incelenmesine göre, çok daha kolay bir şekilde anlaşılabilmektedir. Ayrıca, sistemi oluşturan elemanların herbirinin sistemin genel davranışı üzerindeki etkisini görmek de mümkündür. Blok diyagramları, sistemlerin dinamik davranışları ile ilgili gerekli bilgileri verir, fakat sistemlerin fiziksel yapıları ile ilgili herhangi bir bilgi ihtiva etmez. Diğer bir deyişle, blok diyagramları fiziksel yapıdan arınmıştır. Bu bakımdan, birbirinden fiziksel yapıca farklı çeşitli sistemlerin blok diyagramı tamamen aynı olabilir. Blok diyagramları ile ilgili diğer bir husus, blok diyagramlarının sistemin enerji kaynağını açıkça göstermemesidir. Blok diyagramları sadece sistemin elemanları arasındaki bilgi akışı yönü belirtir, blok diyagramı üzerinde bulunan okların enerji akışı ile ilgisi yoktur. Bir sistemin, inceleme maksatlarına uygun olarak, değişik blok diyagramları çizilebilir, yani bir sistemin çizilecek blok diyagramı tek (unique) değildir.

Sistemlerin blok diyagramlarını elde etmek için «cebirsel toplama elemanı» ve «ayrılma noktası» tanımlarına ihtiyaç vardır. Cebirsel toplama elemanı üzerine X işareti konmuş küçük bir daire ile temsil edilir, Şekil 4.5.

$E(s) = R(s) - C(s)$ $\quad$ $E(s) = R(s) - C(s) + D(s)$

Şekil 4.5 Cebirsel toplama (karşılaştırma) elemanı örnekleri.

Cebirsel toplama elemanını terkeden büyüklüğün değeri, cebirsel toplama elemanına gelen büyüklüklerin cebirsel toplamına eşittir. Cebirsel

toplama işlemi ile bu elemana giriş yapan büyüklükler birbirleri ile karşılaştırılmaktadır. Bu bakımdan cebirsel toplama elemanına «karşılaştırma elemanı» da denir. Karşılaştırma elemanında karşılaştırılacak büyüklüklerin fiziksel cinsleri ve birimleri aynı olmalıdır. Büyüklüklerin işaretleri onları temsil eden okların ucuna yazılmalıdır.

«Ayrılma noktası», genel blok diyagramına ait bir değişkenin (sinyalin) o diyagramı oluşturan bloklara veya toplama elemanlarına etkitilmesi gerektiğinde değişken üzerinden ayrılma yapılan noktaya verilen isimdir, Şekil 4.6.

Şekil 4.6 Blok diyagramında karşılaştırma elemanı ve ayrılma noktası.

4.4 Kapalı Çevrim Blok Diyagramı

Otomatik kontrol sistemleri ile ilgili olarak, kontrol büyüklüğünün referans değeriyle karşılaştırmak için geri beslenmesi ile kapalı çevrim elde edilir. Böylece kontrol büyüklüğü kontrol işlemi üzerinde etkili olmaktadır. Böyle bir çevrim blok diyagramına «kapalı çevrim blok diyagramı» denir. Kapalı çevrim blok diyagramına ait en basit örnek Şekil 4.7 de gösterilmiştir.

Şekil 4.7 Birim dönüşlü kapalı çevrim.

Şekil 4.7 kapalı çevrim kavramını açık bir şekilde belirtmektedir. Kontrol büyüklüğü (çıkış büyüklüğü) olan C(s) geriye beslenerek referans değeri (giriş büyüklüğü) R(s) ile karşılaştırılmaktadır. Fark olarak bulunan $E(s)=R(s)-C(s)$, G(s) transfer fonksiyonunu haiz blok elamanın girişini teşkil eder ve $C(s)=G(s)E(s)$ olarak yazılan dinamik eleman bağıntısı ile sistem cevabı C(s) elde edilir. Geri besleme ile C(s) büyüklüğü doğrudan doğruya karşılaştırma elemanına gönderilerek R(s) ile karşılaştırılmaktadır. C(s) nin bu şekilde aynen geri beslenmesine «birim dönüş» denir. Böylece, Şekil 4.7 birim dönüşlü bir kapalı çevrim blok diyagramını göstermektedir.

Ancak C(s) çıkış büyüklüğünün geri beslenmesi için önce ölçülüp değerlendirilmesi gerekir. Bu halde işin içine ölçü organı girer. Ölçme organının da bir dinamiği vardır. Ölçme organının dinamiği H(s) transfer fonksiyonu ile temsil edilir. Ölçme organını geri besleme kolu üzerindeki yerinde gösteren kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 4.8 de verilmiştir. Ölçme organının dinamiğinin kapalı çevrimin genel davranışını etkileyeceği şüphesizdir.

Şekil 4.8 Kapalı çevrim blok diyagramı.

Burada B(s) ölçülmüş C(s) dir. B(s) nin fiziksel cinsi C(s) den farklı olabilir. Fakat karşılaştırma elemanında cebrik toplanacak olan B(s) ve R(s) nin fiziksel cinsleri aynı olmak zorundadır. Geri besleme kolu üzerinde $B(s)=H(s).C(s)$ dir. $H(s)=1$ ise Şekil 4.7 deki birim dönüşlü kapalı çevrim elde edilir ve $B(s)=C(s)$ olur.

Açık çevrim transfer fonksiyonu :

Geri besleme sinyali B(s) nin hata sinyali E(s) ye oranına açık çevrim transfer fonksiyonu denir.

Blok diyagramı cebri uygulanarak:

$C(s)=G(s)E(s)$

$B(s)=H(s)C(s)$, $C(s)$ yerine konarak

$B(s)=H(s)G(s)E(s)$

buradan açık çevrim transfer fonksiyonu $=B(s)/E(s)=G(s)H(s)$ olarak bulunur.

İleri besleme transfer fonksiyonu :

$R(s)$ den itibaren $C(s)$ ye kadar ileri giden yola, ileri besleme yolu denir. Bu yol üzerindeki blok diyagramı elemanlarına ileri besleme elemanları adı verilir. İleri besleme transfer fonksiyonu şu şekilde tanımlanır.

İleri besleme transfer fonksiyonu$=C(s)/E(s)=G(s)$ (4.10)

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu :

Kapalı çevrimli bir sistemde $C(s)$ yi $R(s)$ ye bağlayan transfer fonksiyonuna «kapalı çevrim transfer fonksiyonu» denir. Kontrol sistemlerinde $R(s)$ referans değeri girişini, $C(s)$ ise kontrol büyüklüğü çıkışını gösterir. Şekil 4.8 deki blok diyagramından:

$$C(s)=G(s)E(s)$$

$$E(s)=R(s)-B(s)$$

$$B(s)=H(s)C(s)$$

yerlerine yazılarak

$$C(s)=G(s)[R(s)-H(s)C(s)]$$

$$C(s)=G(s)R(s)-G(s)H(s)C(s)$$

buradan

$$C(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s) \qquad (4.11)$$

veya kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{4.12}$$

olur. Kapalı çevrim transfer fonksiyonunun şeklinden, kapalı çevrimli sistemin dinamiğinin, kapalı çevrimi oluşturan ileri besleme ve geri besleme elemanlarının dinamiklerine bağlı olduğu görülmektedir. Denklem (4.11) ise çıkış büyüklüğü C(s) nin hem kapalı çevrim transfer fonksiyonuna hem de giriş değeri R(s) ye bağlı olduğunu göstermektedir.

Kapalı çevrimli bir sistemin bozucu etkiyi de içeren genel şekli :

Kontrol sistemlerinde, kontrol büyüklüğünün olması istenen değeri referans değeri ile tespit edilir. Referans değeri bir kontrol sisteminin giriş değeridir; fakat tek giriş değeri değildir. Kontrol sistemlerinde, kontrol büyüklüğünü referans değerinden saptırmaya çalışan ve sisteme çeşitli yerlerden etkiyebilen bir veya birkaç bozucu büyüklük bulunabilir. Bozucu büyüklük de kontrol sisteminin bir giriş değeridir. Örnek olarak bir odanın ısıtma kontrolunun yapılmasında, odanın sıcaklığı kontrol büyüklüğüdür. Oda sıcaklığının olması istenen değeri referans değeri ile tespit edilir. Isıtma sistemi termostatlı cinsten ise referans değeri termostat üzerindeki bir düğme döndürülerek istenen değere getirilir. Böylece ısıtma kontrol sisteminin referans girişi sağlanmış olur. Dış ortam sıcaklığı da odanın ısıtılması üzerinde etkiyebilir. Dış ortam sıcaklığı kontrol sisteminin dışındadır, oda sıcaklığına bozucu etki yapmaktadır. Dış ortam sıcaklığı sisteme bozucu büyüklük girişini teşkil eder.

Bozucu büyüklük etkisini içeren bir kapalı çevrim Şekil 4.9 da gösterilmiştir. $G_1(s)$ e kontrol organı $G_2(s)$ ye kontrol edilen sistem ve H(s) ye ölçme organı olarak bakılabilir.

Şekil 4.9 Bozucu büyüklük içeren kapalı çevrim.

R(s) referans girişi, D(s) ise bozucu girişi göstermektedir. C(s) çıkış değeri, hem R(s) girişinden hem de D(s) girişinden etkilenecektir. İncelenen sistemlerin lineer olması (veya lineerleştirilmiş olması) nedeniyle süperpozisyon ilkesi geçerlidir. Bu ilkeye göre, önce R(s) nin C(s) yi etkilemesi bulunur; R(s) nin etkisi yok kabul edilip D(s) nin C(s) yi etkilemesi hesaplanır. R(s) ve D(s) nin birlikte etkilemeleri halinde toplam etki, R(s) ve D(s) nin teker teker yaptıkları etkilerin toplamıdır. Şekil 4.9 daki blok diyagramına blok diyagramı cebri uygulanırsa R(s) ve D(s) nin etkilerine bağlı olarak C(s) elde edilir. Yukarıda açıklanan lineerlik özelliğinden ötürü R(s) ve D(s) nin etkileri cebrik toplam şeklinde ortaya çıkar.

$$C(s)=[R(s)-H(s)C(s)]G_1(s)G_2(s)+D(s)$$

$$C(s)=G_1(s)G_2(s)R(s)-G_1(s)G_2(s)H(s)C(s)+D(s)$$

$$C(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) \qquad (4.13)$$

Denklem (4.13) çıkış değeri C(s) nin R(s) ye ve D(s) ye nasıl bağlı olduğunu gösterir. R(s) veya D(s) girişlerinden biri etkimediği zaman kendisiyle ilgili terim ortadan kalkar.

Şekil 4.9 diyagramı üzerindeki $G_2(s)$ kontrolu sağlanan sistemi gösteriyorsa olduğu gibi almak gerekir. Fakat $G_1(s)$ kontrol organı ve H(s) ölçme organı uygun şekilde seçilecektir. Burada, denklem (4.13) bir önemli hususa dikkati toplar. $G_1(s)$ ve H(s) transfer fonksiyonları uygun seçilerek

$$|G_1(s)H(s)|\gg 1 \text{ yapılırsa } |G_1(s)G_2(s)H(s)|\gg 1$$

olacaktır.

Bu ise bozucu büyüklük D(s) ile ilgili terimin ortadan kalkmasını sağlar. Bu halde referans girişe ait kapalı çevrim transfer fonksiyonu da, $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ den bağımsız olur ve

$$\frac{C(s)}{R(s)}\cong\frac{1}{H(s)}$$

şeklini alır. Eğer kapalı çevrim birim dönüşlü ise, $H(s)=1$, $C(s)=R(s)$ olacaktır. Böylece kapalı çevrim hatası da sıfır olur, $E(s)\cong 0$.

Bir otomatik kontrol sisteminden istenen, hatanın mümkün olduğu kadar küçültülmesidir. O halde, kabaca, $G_1(s)G_2(s)H(s)$ in kazancının,

veya $G_2(s)$'e dokunulamıyor ve $H(s) \cong 1$ kabul edilirse, $G_1(s)$ nin kazancının büyük seçilmesinin $E(s)$ hatasının küçülmesi açısından önemi ortaya çıkmaktadır. Ancak, kazancın fazla büyütülmesinin başka zararları (sistemin kararsızlığa yönelişi gibi) vardır ve ileride tartışılacaktır.

Açıklama

$G(s) = KA(s)/B(s)$ şeklindeki bir transfer fonksiyonu ile ifade edilen bir sistemde K=sabit sayısına o sistemin veya transfer fonksiyonunun kazancı denir.

4.5 BLOK DİYAGRAMLARININ İNDİRGENMESİ

Bir fiziksel sistemin blok diyagramı, fiziksel modelin karmaşıklığına bağlı olarak, iç içe çevrimlerden oluşmuş hayli karmaşık bir görünümde bulunabilir. Bu durumda, blok diyagramı cebri uygulanarak karmaşık blok diyagramı basit eşdeğerine indirgenebilir. Böylece, sistemin sebep-sonuç (giriş-çıkış) bağıntısını veren genel transfer fonksiyonu girişi sebep, çıkışı sonuç olan tek bir blok içinde gösterilmiş olur. Bu genel transfer fonksiyonu, kapalı çevrimli kontrol sistemleri için «kapalı çevrim transfer fonksiyonu» dur. Blok diyagramlarının indirgenmesinde kullanılan dönüştürme kurallarının önemli bir kısmı Tablo 4.1 de verilmiştir. Tablo 4.1 de verilen kurallar blok diyagramı cebri uygulanarak elde edilmiştir. Blok diyagramlarının indirgenmesinde genel olarak, toplama ve ayrılma noktalarının yerlerini uygun şekilde değiştirmek, toplama noktalarının yerlerini kendi aralarında uygun şekilde değiştirmek, ve böylece elde edilen herbir geribesleme çevrimi yerine eşdeğeri tek bir blok yazmak esastır.

Bir blok diyagramının basitleştirilmesinde

1. İleri besleme kolundaki transfer fonksiyonlarının çarpımı aynı kalmalıdır.
2. Çevrim boyunca transfer fonksiyonlarının çarpımı aynı kalmalıdır.

Örnek 4.2

Blok diyagramlarının basite indirgenmesini bir örnek üzerinde göstermek için Şekil 4.10 daki çok çevrimli geri beslemeli bir kontrol sistemine ait blok diyagramı ele alınsın.

Tablo 4.1 Blok diyagramı dönüştürme kuralları

	Esas diyagram	Eşdeğer diyagram
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tablo 4.1 (devamı)

	Esas diyagram	Eşdeğer diyagram
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Şekil 4.10 Çok çevrimli bir kontrol sistemine ait blok diyagramı.

Şekil 4.10 daki blok diyagramında $G_2G_3H_1(s)$ çevrimi, $G_3G_4H_2(s)$ çevrimi ve $G_1G_2G_3G_4H_4(s)$ çevrimi negatif geri besleme çevrimleridir; $G_3G_4H_3(s)$ çevrimi ise pozitif geri besleme çevrimidir.

Blok diyagramlarının indirgenmesinde küçük geri besleme çevrimlerinin yerlerine indirgenmiş eşdeğerlerin konması için Tablo 4.1 deki 8 no. lu dönüştürme kuralı uygulanır. Ancak, daha önce diyagramın 8 no.lu kuralın uygulanabileceği şekle getirilmesi gerekir. Bu amaçla da diğer dönüştürme kurallarından faydalanılır. Şekil 4.10 daki blok diyagramı ile ilgili olarak, önce 6 no.lu kural uygulanarak G_3 ile G_4 blokları arasındaki sinyal ayrılma noktası G_4 bloğunun ardına kaydırılıp Şekil 4.11 a elde edilir. Böylece, $G_3G_4H_2$ negatif geri besleme çevrimi ile $G_3G_4H_3$ pozitif geri besleme çevrimleri ortaya çıkar. Bu çevrimleri teker teker ve sıra ile 8 no.lu kurala göre indirgemek mümkün olmakla beraber doğrudan doğruya 10 no.lu kural uygulanarak Şekil 4.11 b elde edilir. 8 no.lu kural uygulanarak şekil 4.11 c ve negatif geri besleme kolu üzerinde H_1/G_4 transfer fonksiyonu bulunan çevrimi indirgemek için yine 8 no.lu kural uygulanarak Şekil 4.11 d ve aynı şekilde devam edilerek sonuçta Şekil 4.11 e elde edilir. Şekil 4.10 da verilen hayli karmaşık blok diyagramı, giriş değişkeni (burada referans değeri) R(s) ile çıkış değişkeni (burada kontrol büyüklüğü) C(s) yi birbirine bağlayan temel bağıntıyı (transfer fonksiyonunu veya burada kapalı çevrim transfer fonksiyonunu) açıkça gösterecek şekilde bir tek blok haline indirgenmiştir, Şekil 4.11 e. İndirgeme

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Şekil 4.11 Şekil 4.10 daki blok diyagramının indirgenmesi.

işlemleri yapılırken ve Tablo 4.1 de kolaylık için s operatörü gösterilmemiştir, kısaca G(s) yerine G, H(s) yerine H, X(s) yerine X, R(s) yerine R v.b. yazılmıştır.

Şekil 4.10 daki blok diyagramını indirgeme işleminin sonunda elde edilen ve Şekil 4.11 e deki blok içinde verilmiş bulunan kapalı çevrim transfer fonksiyonunun payı R(s) girişini C(s) çıkışına götüren ileri besleme kolu üzerindeki elemanların transfer fonksiyonlarının çarpımına eşittir.

$$PAY = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

Bu kapalı çevrim transfer fonksiyonunun paydası ise 1 eksi herbir çevrim üzerindeki elemanların transfer fonksiyonlarının çarpımının toplamı şeklindedir.

PAYDA = 1 − ΣHerbir çevrim üzerindeki elemanların transfer fonksiyonlarının çarpımı

$$PAYDA = 1 - (-G_2G_3H_1 - G_3G_4H_2 + G_3G_4H_3 - G_1G_2G_3G_4H_4)$$

$$PAYDA = 1 + G_2G_3H_1 + G_3G_4H_2 - G_3G_4H_3 + G_1G_2G_3G_4H_4$$

4.6 FİZİKSEL SİSTEMLERİN BLOK DİYAGRAMLARININ VE ÇIKIŞI GİRİŞE BAĞLAYAN TRANSFER FONKSİYONLARININ ELDE OLUNMASI

Bir fiziksel sistemin blok diyagramının elde olunması için, önce sistemi teşkil eden herbir bileşene ait dinamik davranışı belirleyen temel denklem yazılır. Sonra gerekirse lineerleştirme yapılıp Laplace dönüşümü uygulanır. Buradan ilgili blok diyagramına geçilir. Daha sonra «indirgeme» yoluyla giriş değişkeni ile çıkış değişkeni arasındaki transfer fonksiyonu elde edilebilir. Transfer fonksiyonunu blok diyagramını çizmeden elde etmek elbette mümkündür. Uygun olan yapılır.

Elektriksel sistem :

Elektriksel direnç :

a) Şekil 4.12 de gösterilen elektriksel direnç göz önüne alınsın. Direnç elemanının iki ucu arasındaki voltaj farkı nedeniyle, şekilde $e_2 > e_1$ kabul edilmiştir, direnç üzerinden bir i akımı akar. Burada voltaj farkı sebep (giriş) ve akım sonuçtur (çıkıştır).

Şekil 4.12 Elektriksel direnç.

$$e = e_2 - e_1 = R\,i \tag{4.14}$$

Laplace dönüşümü alınarak

$$E(s) = R\,I(s) \tag{4.15}$$

elde olunur. Çıkış büyüklüğü olan akıma göre yazılırsa:

$$I(s) = \frac{1}{R}\,E(s) \tag{4.16}$$

olur. Buradan ilgili blok diyagramı Şekil 4.13 olarak bulunur.

Şekil 4.13 Direnç elemanının blok diyagramı.

Direnç elemanın transfer fonksiyonu ise Şekil 4.13 daki blok içine yazılmış olduğu gibi

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{R} \tag{4.17}$$

olmaktadır. R direnci, burada ideal direnç olarak kabul edildiği için sabit olup 1/R sabit bir sayıdır. Transfer fonksiyonu sabit bir sayı olan eleman veya sisteme «orantı elamanı» tipindedir denir.

b) **Elektriksel kapasite:**

Şekil 4.14 de gösterilen ideal elektriksel kapasite için temel bağıntı

$$i = C\frac{de}{dt} \tag{4.18}$$

şeklindedir. Burada $e = e_2 - e_1 (e_2 > e_1)$ dir.

Şekil 4.14 Elektriksel kapasite elemanı.

Başlangıç şartları sıfır olmak kaydı ile (4.18) bağıntısının Laplace dönüşümü alınarak

$$I(s) = C\,s\,E(s) \tag{4.19}$$

bulunur.

(4.19) bağıntısını aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür ve böyle yazmanın bazı yararları vardır:

$$E(s) = \frac{1}{Cs}\,I(s) \tag{4.20}$$

E(s) çıkış olarak alındığında transfer fonksiyonu

$$\frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{4.20}$$

olur ve ilgili blok diyagramı Şekil 4.15 de gösterilmiştir.

Şekil 4.15 Elektriksel kapasitenin blok diyagramı.

1/s integral alma işlemini gösterir. O halde blok diyagramına bakılarak, elektriksel kapasite elemanının giriş akımının integralini aldığı hemen söylenebilir. Transfer fonksiyonu benzer şekilde olan elemanlara «kapasite elemanı» tipindedir denir. Bütün «kapasite elemanları» giriş büyüklüğünün integralini alarak çıkış büyüklüğünü verirler.

c) **RC devresi :**

Şekil 4.16 daki RC devresi alınsın. Bir elektriksel

Şekil 4.16 RC devresi.

direnç ile bir elektriksel kapasite elemanı seri olarak bağlıdır. Seri bağlı olmanın özelliği iç değişken i akımı her elemanda aynıdır. Uç değişken e voltajı ise $e=e_r+e_C$ şeklindedir. Buradan $e_R=e-e_C$ olup

$$i=\frac{e-e_c}{R} \tag{4.21}$$

$$e_c=\frac{\int i\,dt}{C} \tag{4.22}$$

RC devresinin denklemleridir. Başlangıç şartlarının sıfır olması kaydı ile Laplace dönüşümü alınarak sırasıyla

$$I(s)=\frac{E(s)-E_c(s)}{R} \tag{4.23}$$

$$E_c(s)=\frac{I(s)}{Cs} \tag{4.24}$$

elde olunur. Denklem (4.23) e ait blok diyagramı Şekil 4.17 de ve Denklem (4.22) ye ait blok diyagramı Şekil 4.18 de verilmiştir. İkisi birleşti-

rilerek elde olunan sisteme ait genel blok diyagramı ise Şekil 4.19 a da gösterilmiştir. Şekil 4.19 a blok diyagramının indirgenmesiyle Şekil 4.19 b

Şekil 4.17.

Şekil 4.18.

elde olunur. Şekil 4.19 b de, $\tau = RC$ olarak alınmıştır. τ zaman boyutundadır ve «zaman sabiti» adını alır.

(a)

(b)

Şekil 4.19 RC devresinin blok diyagramı.

$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{4.25}$$

şeklinde ortaya çıkan sistem transfer fonksiyonu için zaman sabiti tipindedir denir ve zaman domeninde birinci mertebeden sabit katsayılı bir diferansiyel denklemi gösterir. Bu bakımdan, zaman sabiti tipinde bir sistem (veya diğer deyişle zaman sabiti elemanı) birinci mertebeden bir sistemdir.

d) **RLC devresi:**

Seri bağlı bir RLC devresi Şekil 4.20 de gösterilmiştir.

Şekil 4.20 RLC devresi.

Seri bağlı bu sistemde yine iç değişken i akımı her elemanda aynıdır ve uç değişken voltaj ise

$$e = e_R + e_L + e_c$$

şeklindedir. Devreyi teşkil eden elemanlarla ilgili temel bağıntılar

$$e_R = R\,i \tag{4.26}$$

$$e_L = L\frac{di}{dt} \tag{4.27}$$

$$e_c = \frac{\int i\,dt}{C} \tag{4.28}$$

şeklindedir. Laplace dönüşümü ile

$$E_R(s) = R\,I(s) \tag{4.29}$$

$$E_L(s) = L\,s\,I(s) \tag{4.30}$$

$$E_c(s) = \frac{I(s)}{Cs} \tag{4.31}$$

ve

$$E(s) = E_R(s) + E_L(s) + E_C(s) \tag{4.32}$$

olur. Denklem (4.29) ilâ Denklem (4.32) için blok diyagramları sırasıyla Şekil 4.21 a, b ve c de gösterilmiştir.

Şekil 4.21 İlgili blok diyagramları.

RLC devresinin genel blok diyagramı ise Şekil 4.22 de verilmiştir.

Şekil 4.22 RLC devresinin blok diyagramı.

Şekil 4.22 diyagramı indirgenerek önce Şekil 4.23 a ve sonra Şekil 4.23 b elde olunur.

Şekil 4.23 RLC devresinin indirgenmiş blok diyagramı.

Şekil 4.23 b deki $LC=T^2$, T=karakteristik zaman

$$\left(T=\frac{1}{\omega_n},\ \omega_n=\text{Doğal frekans}\right)$$

ve

$RC=2\zeta T$ veya $RC=2\zeta/\omega_n$, (ζ=Söndürme oranı)

yazılarak Şekil 4.24 a veya Şekil 4.24 b elde olunur.

Şekil 4.24.

Görüldüğü gibi RLC devresinin transfer fonksiyonu

$$\frac{E_c(s)}{E(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \tag{4.33}$$

veya

$$\frac{E_c(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{4.34}$$

şeklindedir ve zaman domeninde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemle ifade edilir. Bu bakımdan ikinci mertebe sisteme bir örnek teşkil eder. Söndürme oranına bağlı olarak sistem titreşebileceğinden, transfer fonksiyonu denklem (4.33) veya (4.34) gibi olan fiziksel elemanlara «titreşim elemanı» ismi de verilir.

Mekanik sistem :

Mekanik yay bir orantı elemanı, hareket halindeki kütle ise kapasite elemanı (integratör) olarak düşünülebilir.

a) Şekil 4.25 de gösterilen dönen kütle ve rotasyon damperi ele alınsın. Burada giriş büyüklüğü M momenti çıkış büyüklüğü

Şekil 4.25 Döner kütle ve rotasyon damperi.

ise $\omega = d\theta/dt$ açısal hızıdır. Burada θ açısal yer değiştirme ve t zamandır. İlgili denge denklemi Newton Kanunu ile belirlenir:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - B\omega \tag{4.35}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} + B\omega = M \tag{4.36}$$

B ile bölerek

$$\frac{J}{B}\frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{M}{B} \tag{4.37}$$

$J/B = \tau$: zaman sabiti olarak tanımlanır. Gerçekten J nin boyutunun FLT^2 ve B nin boyutunun FLT olduğu dikkate alınırsa τ nun boyutunun zaman boyutunda olduğu görülür. Böylece

$$\tau\frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{M}{B} \tag{4.38}$$

olur. Başlangıç şartları sıfır olması kaydı ile Laplace dönüşümü alınarak

$$(\tau s + 1)\,\Omega(s) = \frac{M(s)}{B} \tag{4.39}$$

elde edilir. Buradan transfer fonksiyonu

$$\frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{1/B}{\tau s+1} \tag{4.40}$$

dir. İlgili blok diyagramı Şekil 4.26 da gösterilmiştir.

Şekil 4.26 Blok diyagramı.

Denklem (4.40) ve Şekil (4.26) dan transfer fonksiyonunun zaman sabiti tipinde olduğu görülmektedir. Zaman sabitini belirleyen transfer fonksiyonu $(1/\tau s+1)$ dir. Payında bulunan $1/B$ terimi ise girişteki Moment'in boyutu ile çıkıştaki açısal hızın boyutu arasındaki gerekli dengeyi sağlamaktadır.

b) Şekil 4.27 de gösterilen öteleme yapan mekanik sistem gözönüne alınsın.

Şekil 4.27 Öteleme yapan mekanik sistem.

Burada hareketin denge denklemi yazılırsa

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F \tag{4.41}$$

tarafları k ile bölerek ve başlangıç şartları sıfır kabulu ile Laplace dönüşümü alınarak

$$\frac{m}{k}s^2X(s)+\frac{b}{k}sX(s)+X(s)=\frac{F(s)}{k} \tag{4.42}$$

bulunur.

Burada: $T^2=(m/k)$, $T=\sqrt{(m/k)}$: karakteristik zaman

$2\zeta T=(b/k)$, $\zeta=(b/2\sqrt{mk})$: Söndürme oranı

tanımları yapılarak

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1/k}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \tag{4.43}$$

transfer fonksiyonu elde edilir. Yine, 1/k nın görevi giriş çıkış arasındaki boyut farkını dengelemektedir. İlgili blok diyagramı Şekil 4.28 de verilmiştir.

Şekil 4.28 Blok diyagramı.

Evvelce yapıldığı gibi ω_n doğal frekans olmak üzere $T=1/\omega_n$ olduğu yazılırsa (4.43) transfer fonksiyonu Denklem (4.44) şeklini alır:

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{(1/k)\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{4.44}$$

Görülür ki, denklem (4.43) veya (4.44) ile verilen transfer fonksiyonu titreşim elemanı tipindedir.

Hidrolik seviye sistemleri :

Basınçlı sıvı kullanan ve makinalarda hidrolik kuvvet ve hareketlerle ilgili hidrolik sistemlerden ayrı olarak, endüstriyel prosesler içinde, borularla birbirine bağlı depolardan oluşan ve borularda sıvı akışı ile depolarda sıvı seviyesi kontrolu ile ilgilenen sistemlere «seviye kontrol sistemleri» denir. Borularda sıvı akışı Reynolds sayısına bağlı olarak laminer ($Re<2000$) veya türbülanslı ($Re>3000$) olabilir. Türbülanslı akışla ilgili sistemlere ait davranış denklemleri lineer değildir ve incelenmek için lineerleştirilmesi gerekir.

a) **Hidrolik kapasite :**

Şekil 4.29 da gösterilen ve içine bir borudan sıvı akan hidrolik depo ele alınsın. Giren depi depo içinde birikmekte

Şekil 4.29 Hidrolik depo.

ve h seviyesinin yükselmesine sebep olmaktadır. h seviyesine seviye basıncı denebilir. h seviye basıncı ile p basıncı arasında

$$p=\rho ghA/A=\rho gh$$

bağıntısı vardır. Burada ρ sıvının yoğunluğu ve g yerçekim ivmesi olup sıkıştırılamayan sıvı için (ρg) sabittir. Şekil 4.29 daki depo sistemi için denge denklemi yazılırsa

$$q_H=A\frac{dh}{dt} \tag{4.45}$$

bulunur. Bu ifadede A, silindirik kabul edilen deponun sabit kesit alanıdır ve buna hidrolik kapasite denir, o halde: $C_H = A$ dır. Laplace dönüşümü ile (4.45) bağıntısından

$$Q_H(s) = C_H s\, H(s) \tag{4.46}$$

elde olunur. Buradan ise seviye

$$H(s) = \frac{1}{C_H s} Q_H(s) \tag{4.47}$$

olarak elde olunur. Transfer fonksiyonu

$$\frac{H(s)}{Q_H(s)} = \frac{1}{C_H s} \tag{4.48}$$

dir. İlgili blok diyagramı Şekil 4.30 da verilmiştir.

Şekil 4.30 Hidrolik kapasitenin blok diyagramı.

Bir «kapasite elemanı» örneği olan hidrolik depoda sistem cevabı olan seviye, giriş büyüklüğü olan hidrolik debinin integrali olarak ortaya çıkmaktadır.

b) **Hidrolik zaman sabiti :**

Şekil 4.31 deki sıvı seviye sistemi gözönüne alınsın.

q_g : Giriş debisi

$q_ç$: Çıkış debisi

h : Seviye

C_H : Hidrolik kapasite

R_H : Hidrolik direnç

Şekil 4.31 Çıkışı olan hidrolik depo.

Şekil 4.31 deki deponun bir öncekinden farkı bir direnç (vana) üzerinden dışa akışın olmasıdır. Vananın direnci R_H ile gösterilmiştir. Sıvı akışı laminer ise sistem lineerdir. Sıvı akışı türbülanslı ise sistem lineer değildir, fakat inceleme için lineerleştirilir. Kendiliğinden lineer olan veya lineerleştirilmiş olan Şekil 4.31 sistemi için diferansiyel denklem

$$C_H \frac{dh}{dt} = q_g - q_c \tag{4.49}$$

şeklindedir. R_H direnci üzerinden olan q_c akışını h seviye basıncı sağlar ve R_H hidrolik direnci

$$R_H = \frac{h}{q_c} \tag{4.50}$$

dır. Buradan

$$q_c = \frac{h}{R_H}$$

yerine konarak

$$C_H \frac{dh}{dt} = q_g - \frac{h}{R_H} \tag{4.51}$$

ve düzenleyerek

$$R_H C_H \frac{dh}{dt} + h = R_H q_g \tag{4.52}$$

diferansiyel denklemi elde olunur. Laplace dönüşümü alınarak (başlangıç şartları sıfır kabulu ile),

$$(R_H C_H s + 1) H(s) = R_H Q_g(s) \tag{4.53}$$

olur. $\tau = R_H C_H$ dönüşümü, τ yine zaman sabiti, yapılarak

$$H(s) = \frac{R_H}{\tau s + 1} Q_g(s) \tag{4.54}$$

ve buradan transfer fonksiyonu

$$\frac{H(s)}{Q_g(s)} = \frac{R_H}{\tau s + 1} \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilir. İlgili blok diyagramı Şekil 4.32 dedir.

Şekil 4.32 Hidrolik zaman sabiti elemanının blok diyagramı.

Eğer transfer fonksiyonu giriş debisi ile seviye arasında alınmak yerine, giriş debisi ile çıkış debisi arasında gösterilmek istenirse (4.50) bağıntısından yararlanılarak $H(s)=R_H Q_ç(s)$ yazmak yeter. $H(s)$ ifadesi (4.55) ifadesinde yerine konarak

$$\frac{Q_ç(s)}{Q_g(s)} = \frac{1}{\tau s+1} \tag{4.56}$$

bulunur. Buna ait blok diyagramı ise Şekil 4.33 de gösterilmiştir.

Şekil 4.33 (4.56) ifadesinin blok diyagramı.

c) Şekil 4.34 de gösterilen birbirine boru ile bağlı çift depolu sistemi ele alalım. Burada depolar birbirleri üzerinde etkili olmaktadır.

Şekil 4.34 Birbirini etkileyen iki depolu sıvı seviye sistemi.

Şekil 4.34 deki sistem için denge denklemleri yazılırsa

$$q_1=\frac{h_1-h_2}{R_1} \tag{4.57}$$

$$C_1\frac{dh_1}{dt}=q_g-q_1 \tag{4.58}$$

$$q_2=\frac{h_2}{R_2} \tag{4.59}$$

$$C_2\frac{dh_2}{dt}=q_1-q_2 \tag{4.60}$$

Başlangıç şartları sıfır kabulü ile Laplace dönüşümleri alınarak

$$Q_1(s)=\frac{H_1(s)-H_2(s)}{R_1} \tag{4.61}$$

$$C_1sH_1(s)=Q_g(s)-Q_1(s) \tag{4.62}$$

$$Q_2(s)=\frac{H_2(s)}{R_2} \tag{4.63}$$

$$C_2sH_2(s)=Q_1(s)-Q_2(s) \tag{4.64}$$

elde olunur. (4.61) ilâ (4.64) bağıntıları blok diyagramı ile Şekil 4.35 ilâ Şekil 4.38 de ayrı ayrı gösterilmiştir.

Şekil 4.35.

Şekil 4.36.

Şekil 4.37.

Şekil 4.38.

Şekil 4.35 ilâ 4.38 blok diyagramları şekil 4.39 da toplu şekilde verilmiştir.

Şekil 4.39.

Şekil 4.39 daki $H_1(s)-H_2(s)$ toplama noktasını $(1/C_1s)$ bloğu önüne ve $H_2(s)$ deki sinyal ayrılma noktasını $(1/R_2)$ bloğunun ardına kaydırarak (Tablo 4.1 kural 7 ve 6) Şekil 4.40 elde olunur.

Şekil 4.40.

Şekil 4.40 daki küçük negatif geri besleme çevrimleri indirgenerek Şekil 4.41 bulunur.

Şekil 4.41.

Şekil 4.41 de indirgenebilir ve Şekil 4.42 elde olunur:

Şekil 4.42.

Blok diyagramı çizilip indirgenerek giriş debisi $Q_g(s)$i çıkış debisi $Q_2(s)$ ye bağlayan transfer fonksiyonu, Şekil 4.42 deki blok içinde yazılı olduğu gibi,

$$\frac{Q_2(s)}{Q_g(s)} = \frac{1}{(R_1C_1R_2C_2)s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_2C_1)s+1} \tag{4.65}$$

şeklinde elde olunur. Burada

$$\tau_1 = R_1C_1 \text{ ve } \tau_2 = R_2C_2$$

yazılarak

$$\frac{Q_2(s)}{Q_g(s)} = \frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2+R_2C_1)s+1} \tag{4.66}$$

olur.

Isıl Sistem :

Şekil 4.43 de gösterilen su ısıtma sistemi ele alınsın.

Şekil 4.43 Su ısıtma sistemi.

Burada : θ_g : Su giriş sıcaklığı, °C

$\theta_ç$: Su çıkış sıcaklığı, °C

W : Kütlesel su debisi, kg/san

m : Depo içindeki su kütlesi, kg

c : Suyun özgül ısısı, J/kg °C

C_T : Isıl kapasite, J/°C

R_T : Isıl direnç, °C san/J

q : Isı debisi, J/san.

olarak alınsın. Deponun mükemmel yalıtıldığı ve dışa ısı kaçağı olmadığı ve depo içindeki suyun sıcaklığının uniform olduğu kabul edilmektedir. Giriş suyu sıcaklığı sabit olsun. Isıtıcının verdiği ısı ani olarak q_g kadar artsın. Su çıkışı ile dışarıya $q_ç$ kadar ısı atılsın. Bu sırada çıkış suyu sıcaklığında θ kadar bir değişme olacaktır. Böylece,

dışarı atılan ısı : $q_ç = Wc\theta$

ısıl kapasite : $C_T = mc$

ısıl direnç : $R_T = (\theta/q_ç) = (1/Wc)$

dir. Isıl denge denklemi yazılırsa,

$$C_T \frac{d\theta}{dt} = q_g - q_ç \tag{4.67}$$

$q_ç$ nin yerine θ/R_T yazılarak

$$RC_T \frac{d\theta}{dt} + \theta = R_T q_g \tag{4.68}$$

elde edilir. Burada $\tau = RC_T$: zaman sabiti denerek ve Laplace dönüşümü alınarak

$$(\tau s + 1)\theta(s) = R_T Q_g(s) \tag{4.69}$$

ve buradan

$$\frac{\theta(s)}{Q_g(s)} = \frac{R_T}{\tau s + 1} \tag{4.70}$$

sisteme ait transfer fonksiyonu olarak bulunur. Verilmiş bulunan birimler ile τ nun yine zaman boyutunda (burada saniye) olduğu açıktır. Sistem yine bir «zaman sabiti elemanı» olup ilgili blok diyagramı Şekil 4.44 de verilmiştir.

Şekil 4.44 Şekil 4.43 ün blok diyagramı.

Şekil 4.44 Şekil 4.43 ün blok diyagramı.

4.7 İŞARET AKIŞ DİYAGRAMI

İşaret akış diyagramları, blok diyagramları gibi, sistemlerin sebep - sonuç bağıntılarını göstermek için kullanılır. Bilhassa, evvelce de belirtildiği gibi kontrol sistemlerinde geri besleme çevrim sayısının fazla olması halinde blok diyagramlarını tek çevrime indirgemek ve buna bağlı olarak kapalı çevrim transfer fonksiyonunu hesaplamak zorlaşmaktadır. İşaret akış diyagramları, blok diyagramlarına göre, daha basit inceleme imkânı sağlayan bir yöntemdir ve özellikle karmaşık kontrol sistemlerinde sistem değişkenleri arasındaki bağıntıların bulunmasında ve kapalı çevrim transfer fonksiyonunun elde edilmesinde kolaylık sağlar.

Bir işaret akış diyagramı bir doğrusal cebrik denklem takımının değişkenleri arasındaki sebep-sonuç (giriş-çıkış) bağıntılarını verir. Bu bakımdan kontrol sistemlerini akış diyagramları ile inceleyebilmek için, önce sistem davranışını belirleyen diferansiyel denklemlerin cebrik denklemler haline dönüştürülmesi gerekir. Bunun için, Laplace dönüşümü kullanılarak kompleks değişken s'e göre cebrik denklemler elde edilir.

Bir işaret akış diyagramında değişkenler düğüm noktası denilen küçük yuvarlaklar ile gösterilir. Düğüm noktaları birbirine kol adı verilen ve sebep-sonuç bağıntısını belirten ok işareti ile yönlendirilmiş doğru parçaları ile bağlanır. Her bir kol üzerine kol kazancı (veya geçiş fonksiyonu) yazılır. Basit bir denklemle ifade edilebilen bir doğrusal sistem gözönüne alınsın:

$$x_2 = a_{12} x_1 \tag{4.71}$$

Burada x_1: giriş büyüklüğü ve x_2: çıkış büyüklüğü a_{12}: iki değişken arasındaki kazanç veya geçiş fonksiyonudur.

Denklem (4.71) e ait işaret akış diyagramı Şekil 4.45 de gösterilmiştir.

Şekil 4.45 $x_2 = a_{12} X_1$ denklemine ait işaret akış diyagramı.

Şekil 4.45 de x_1 düğüm noktası giriş değişkenini (sebep), x_2 düğüm noktası çıkış değişkenini (sonuç) temsil etmektedir. İki değişkeni birleştiren kol üzerinde ok işareti ile bilgi akış yönü ve kol kazancı (geçiş fonksiyonu) a_{12} gösterilmiştir. Bilgi akışı sadece okla gösterilen yöndedir.

Akış diyagramlarının kullanılmasında yararlı olacak tanımlar aşağıda verilmiştir.

Giriş düğüm noktası (Bağımsız düğüm veya Kaynak) :

Sadece kendini terkeden kolları olan düğüm noktasıdır. Bağımsız değişkene tekabül eder. Şekil 4.45 de x_1 düğüm noktası bir giriş düğüm noktasıdır.

Çıkış düğüm noktası (Bağımlı düğüm veya kuyu) :

Sadece kendine gelen kolları vardır. Bağımlı bir değişkene tekabül eder. Şekil 4.45 de x_2 düğümü bir çıkış düğüm noktasıdır.

Karmaşık düğüm noktası :

Kendine gelen ve kendini terkeden kolları olan düğüm noktasıdır. Şekil 4.46 da x_2 ve x_3 düğümleri birer karmaşık düğüm noktasıdır.

Şekil 4.46 İşaret akış diyagramı.

Bazen x_2 ve x_3 karmaşık düğüm noktaları birer çıkış düğüm noktası olarak dikkate alınmak istenir. Bu amaçla ilâve x_2 ve x_3 düğüm noktaları ile birim kazançlı birer kol ilâve edilir, Şekil 4.47.

Ayrıca cebrik denklem takımına $x_2=x_2$ ve $x_3=x_3$ denklemleri ilâve edilir.

Şekil 4.47 Şekil 4.46 daki işaret akış diyagramının yeniden düzenlenmiş şekli.

Yol : Oklar yönünde gidilerek geçilen kolların birbirine bağlı grubudur. Düğümlerden bir defadan fazla geçilmezse bu «açık yol» dur. Yol aynı düğümde sona ererse bu «kapalı yol» dur.

İleri giden yol : Giriş düğüm noktasından başlayan ve çıkış düğüm noktasına giden açık yoldur.

Çevrim : Kapalı bir yoldur. Başlangıç ve bitim düğüm noktası aynıdır; diğer bütün düğümler sadece bir defa geçilir, Şekil 4.48.

Şekil 4.48 Çevrim örnekleri.

Yol kazancı : Yol üzerinde ilerlerken karşılaşılan yol kazançlarının çarpımıdır.

İleri giden yol kazancı : İleri giden yol kazancıdır.

Çevrim kazancı : Çevrimin yol kazancıdır.

İşaret akış diyagramı cebri ile ilgili olarak belli başlı kurallar şunlardır :

1. İşaret akış diyagramları sadece lineer sistemlere uygulanır.
2. Düğüm noktaları değişkenleri temsil eder.
3. İşaret akışı kollar üzerinde okla gösterilen yöndedir.
4. Bağımlı değişken (sonuç veya çıkış büyüklüğü), bağımsız değişken (sebep veya giriş büyüklüğü) ile kol kazancının çarpımına eşittir, Şekil 4.45 ve Denklem 4.71.

İşaret akış diyagramı işlemleri :

İşaret akış diyagramının kurallarına uygun olacak şekilde aşağıdaki işlemler yapılabilmektedir.

1. Bir düğüm noktası ile temsil edilen bir değişkenin değeri, o düğüme giriş yapan bütün sinyallerin toplamına eşittir. Örnek olarak, Şekil 4.49 da x_1 düğüm noktasının değeri, x_1'e giriş yapan kollarla temsil edilen bütün sinyallerin toplamına eşittir.

Şekil 4.49 x_1 Düğüm noktası.

giriş yapan kollarla temsil edilen bütün sinyallerin toplamına eşittir.

$$x_7 = a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 + a_{51}x_5 + a_{61}x_6 \tag{4.72}$$

2. Düğüm noktasıyla temsil edilen değişkenin değeri düğümü terkeden bütün kollarla nakledilir.

$$\begin{aligned} x_7 &= a_{17}x_1 \\ x_8 &= a_{18}x_1 \end{aligned} \tag{4.73}$$

3. Seri bağlı kollar yerine eşdeğeri alınabilir, Şekil 4.50.

Şekil 4.50 Seri bağlı kolların indirgenmesi.

4. Aynı yönde paralel bağlı kollar yerine eşdeğeri alınabilir, Şekil 4.51.

Şekil 4.51 Paralel bağlı kolların indirgenmesi.

5. Bir karmaşık düğüm noktası ortadan kaldırılabilir, Şekil 4.52.

Şekil 4.52 Karmaşık düğüm noktasının yok edilişi.

6. Bir çevrim ortadan kaldırılıp eşdeğeri kullanılabilir, Şekil 4.53.

Şekil 4.53 Bir çevrimin ortadan kaldırılması.

Şekil 4.53 de solda gösterilen çevrimli diyagramdan

$$x_3 = bx_2 \ , \ x_2 = ax_1 + cx_3$$

Buradan

$$x_3 = abx_1 + bcx_3 \tag{4.74}$$

ve buradan da

$$x_3 = \frac{ab}{1-bc} x_1 \tag{4.75}$$

elde edilir.

Denklem (4.74), Şekil 4.53 de ortada gösterilen ve bc kazançlı öz çevrime sahip işaret akış diyagramına tekabül etmektedir. Öz çevrimin ortadan kaldırılması ile kazancı ab/(1—bc) olan en sağdaki diyagram ve buna tekabül eden Denklem (4.75) elde edilir.

Doğrusal sistemlerin işaret akış diyagramları :

İşaret akış diyagramları doğrusal sistemlerin incelenmesinde geniş ölçüde kullanılmaktadır. İşaret akış diyagramları doğrusal sistemi temsil eden denklemlerden veya doğrudan doğruya fiziksel sistem üzerinden elde edilebilir. Örnek olarak bir doğrusal sistemi temsil eden aşağıdaki denklem takımı dikkate alınsın:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + b_1u_1 \tag{4.76}$$

$$x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u_2 \tag{4.77}$$

Burada u_1 ve u_2 giriş değişkenlerini, x_1 ve x_2 ise çıkış değişkenlerini göstermektedir.

Denklem (4.76) nın işaret akış diyagramı Şekil 4.54 a da, Denklem (4.77) nin işaret akış diyagramı ise Şekil 4.54 b de gösterilmiştir. Şekil 4.54 c ise a ve b diyagramlarının birleştirilmesiyle elde edilmiştir ve sistemin tamamını temsil eden işaret akış diyagramıdır.

Şekil 4.54 Denklem (4.76) ve (4.77) nin işaret akış diyagramı.

Kontrol sistemlerinin işaret akış diyagramları :

Bazı basit kontrol sistemlerine ait blok diyagramları ve tekabül eden işaret akış diyagramları Şekil 4.55 de gösterilmiştir.

Şekil 4.55 Blok diyagramları ve tekabül eden işaret akış diyagramları.

İşaret akış diyagramları için Genel Kazanç Formülü (Mason Kazanç Formülü) :

Gerek blok diyagramları ve gerekse işaret akış diyagramlarından, basit haller dışında, giriş-çıkış bağıntılarını analitik olarak elde etmek kolay değildir. Mason tarafından verilmiş olan Genel Kazanç Formülü kullanılarak işaret akış diyagramının basit bir incelemesi ile bu giriş-çıkış bağıntısı kolayca elde edilebilir.

Giriş ve çıkış değişkenleri arasındaki Genel Kazanç formülü :

$$T=\frac{X_{çıkış}}{X_{giriş}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta} \qquad (4.78)$$

Burada $X_{çıkış}$: Çıkış düğüm noktası değişkeni

$X_{giriş}$: Giriş düğüm noktası değişkeni

Δ : Diyagramın determinantı

Δ=1—(bütün farklı çevrim kazançlarının toplamı) + (temassız çevrimlerin kazançlarının ikişer ikişer çarpımlarının toplamı) — (temassız çevrimlerin kazançlarının üçer üçer çarpımlarının toplamı) +...

P_k : k. ıncı ileri giden yola ait yol kazancı

Δ_k : k. ıncı ileri giden yola temas etmeyen işaret akış diyagramına ait Δ

n : İleri giden yolların toplam sayısı

Genel kazanç formülü sadece bir giriş düğüm noktası ile bir çıkış düğüm noktası arasında uygulanabilir ve aşağıda özetlenen uygulama adımlarından oluşur:

1. İlgilenilen işaret akış diyagramına ait giriş düğüm noktası ile çıkış düğüm noktası arasındaki ileri giden yollar bulunur ve bu yollara ait P_k ileri giden yol kazançları yazılır.
2. Diyagramdaki kapalı çevrimler belirlenir ve bunlara ait L_i çevrim kazançları yazılır.

3. Birbirine temas etmeyen kapalı çevrimler tespit edilir.
4. Genel kazanç formülündeki Δ ifadesi hesaplanır.
5. İleri giden yolların herbiri için, yola temas eden çevrimlere ait kazançlar Δ ifadesinden çıkarılarak Δ_k ifadeleri elde edilir.
6. Genel kazanç formülü uygulanır.

Bu tanımlara bakarak zor bir uygulama yöntemi ile karşı karşıya olunduğu sanılırsa da birkaç örnek yaptıktan sonra işin kolay olduğu anlaşılır.

Örnek 4.3 : İlk örnek olarak geri beslemeli kontrol çevrimi gözönüne alınsın, Şekil 4.56.

Şekil 4.56 Geribeslemeli kontrol çevrimi.

1. R(s) girişi ile C(s) çıkışı arasında bir tek ileri giden yol vardır ve ileri giden yol kazancı

$$P_1 = G(s)$$

dir.

2. Bir kapalı çevrim vardır ve çevrim kazancı

$$L_1 = -G(s)H(s)$$

dir.

3. Tek kapalı çevrim bulunduğundan temas etmeyen çevrimler yoktur.
4. $\Delta = 1 - (L_1) = 1 - [-G(s)H(s)] = 1 + G(s)H(s)$
5. $\Delta_1 = 1$
6. Genel kazanç formülünde yerine konarak

$$T=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{G(s)1}{1+G(s)H(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Örnek 4.4 : Blok diyagramı ile tekabül eden işaret akış diyagramı Şekil 4.57 de gösterilmiş bulunan ve bir ek ileri besleme ile üç geri besleme kolu bulunan kontrol sistemine ait C(s)/R(s) kapalı çevrim transfer fonksiyonu Genel Kazanç formülü uygulanarak elde edilsin.

Şekil 4.57 İki ileri ve üç geri besleme kolu olan bir kontrol sistemine ait blok diyagramı ve işaret akış diyagramı.

R(s) girişinden C(s) çıkışına giden iki adet ileri giden yol var. O halde :

$$P_1=G_1G_2G_3G_4G_5G_6$$

$$P_2=G_1G_2G_7G_6$$

Beş adet kapalı çevrim olup kazançları :

$L_1 = -G_4H_1$

$L_2 = -G_2G_7H_2$

$L_3 = -G_2G_3G_4G_5H_2$

$L_4 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3$

$L_5 = -G_1G_2G_7G_6H_3$

İki adet temas etmeyen çevrim var: L_1 ile L_2 ve L_1 ile L_3.

Böylece :

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1L_2 + L_1L_3)$$

$$\Delta = 1 - (-G_4H_1 - G_2G_7H_2 - G_2G_3G_4G_5H_2 - G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3 - \\ - G_1G_2G_7G_6H_3) + [(-G_4H_1 - G_2G_7H_2) + (-G_4H_1 - G_1G_2G_7G_6H_3)]$$

$$\Delta = 1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3 + \\ + G_1G_2G_7G_6H_3 + G_4H_1(G_2G_7H_2 + G_1G_2G_7G_6H_3)$$

Çevrimlerin hepsi 1. ileri giden yola temas ediyor.

O halde: $\Delta_1 = 1$

Çevrimlerden sadece L_1 çevrimi 2. ileri giden yola temas etmiyor. O halde :

$$\Delta_2 = 1 - (L_1)$$

$$\Delta_2 = 1 - (-G_4H_1) = 1 + G_4H_1$$

Genel Kazanç formülünde yerine konarak:

$$T = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k\Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6 1 + G_1G_2G_6G_7(1 + G_4H_1)}{\Delta}$$

bulunur.

4.8 ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

P4.1 Şekil 4.58 de şematik olarak gösterilen hız kontrol sisteminde motor çıkış milinin hızında artma olursa hızdaki bu değişme dişli grubu üzerinden ağırlıklı regülatör milinin ω açısal hızının artmasına sebep olur ve merkezkaç kuvvet etkisiyle yay sıkıştırılır ve bilezik e hatası kadar yukarı çıkar. Böylece 4 yollu piston valfın tiji de yukarı çıkarak çift tesirli silindir pistonunun üst yüzeyinin basınçlı yağ ile temasını sağlar. Sonuç olarak motor yakıt besleme vanasında kısılma meydana gelir ve motorun hızı düşer. Bu sistemin blok diyagramını çizerek $Y(s)/E(s)$ transfer fonksiyonunu bulun.

Şekil 4.58 Hız kontrol sistemi.

Çözüm : Hızın artmasıyla ağırlıklı regülatör bileziği e kadar yukarı çıkınca manivelâ kol etkisiyle 4 yollu piston valf tiji x kadar yukarı çıkar.

$$x=\frac{a}{a+c}\,e-\frac{c}{a+c}\,z$$

Laplace dönüşümü ile (başlangıç şartları sıfır) :

$$X(s)=\frac{a}{a+c}\,E(s)-\frac{c}{a+c}\,Z(s) \qquad (1)$$

çift tesirli silindir pistonunun aşağı inerken süpürdüğü hacim A dy/dt, yer değişimi ile orantılı hacimsel debi girişine eşittir.

$$A\,\frac{dy}{dt}=CA_v\sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_b-p)}\ ;\ A_v=\pi dx \text{ (valf geçiş kesiti)}$$

$$A\,\frac{dy}{dt}=K_1x$$

Laplace dönüşümü ile (başlangıç şartları sıfır) :

$$A\,s\,Y(s)=K_1X(s)$$

$$Y(s)=\frac{K\,X(s)}{s} \qquad (2)$$

Burada $K=K_1/A$ olarak alınmıştır.

Diğer taraftan z yerdeğişimi ile ilgili kuvvet dengesi yazılırsa

$$kz=b\,\frac{d(y-z)}{dt}$$

Laplace dönüşümü ile (başlangıç şartları sıfır) :

$$k\,Z(s)=b\,s\,Y(s)-b\,s\,Z(s)$$

$$Z(s)=\frac{b\,s}{bs+k}\,Y(s) \qquad (3)$$

Blok diyagramı çizilsin :

Şekil 4.59 da gösterilen blok diyagramından kapalı çevrim transfer fonksiyonu elde edilir :

Çözüm : Hızın artmasıyla ağırlıklı regülatör bileziği e kadar yukarı çıkınca manivelâ kol etkisiyle 4 yollu piston valf tiji x kadar yukarı çıkar.

$$x=\frac{a}{a+c}\,e-\frac{c}{a+c}\,z$$

Laplace dönüşümü ile (başlangıç şartları sıfır) :

$$X(s)=\frac{a}{a+c}\,E(s)-\frac{c}{a+c}\,Z(s) \qquad (1)$$

çift tesirli silindir pistonunun aşağı inerken süpürdüğü hacim A dy/dt, yer değişimi ile orantılı hacimsel debi girişine eşittir.

$$A\,\frac{dy}{dt}=CA_v\sqrt{\frac{2g}{\gamma}(p_o-p)}\ ;\ A_v=\pi dx \text{ (valf geçiş kesiti)}$$

$$A\,\frac{dy}{dt}=K_1x$$

Laplace dönüşümü ile (başlangıç şartları sıfır) :

$$A\,s\,Y(s)=K_1X(s)$$

$$Y(s)=\frac{K\,X(s)}{s} \qquad (2)$$

Burada $K=K_1/A$ olarak alınmıştır.

Diğer taraftan z yerdeğişimi ile ilgili kuvvet dengesi yazılırsa

$$kz=b\,\frac{d(y-z)}{dt}$$

Laplace dönüşümü ile (başlangıç şartları sıfır) :

$$k\,Z(s)=b\,s\,Y(s)-b\,s\,Z(s)$$

$$Z(s)=\frac{b\,s}{bs+k}\,Y(s) \qquad (3)$$

Blok diyagramı çizilsin :

Şekil 4.59 da gösterilen blok diyagramından kapalı çevrim transfer fonksiyonu elde edilir :

Şekil 4.59 Hız kontrol sisteminin blok diyagramı.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a}{a+c} \frac{K/s}{1+\frac{c}{a+c}\frac{bs}{bs+k}\frac{K}{s}}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a}{a+c} \frac{K}{(a+c)(bs+k)s+cbKs} \qquad (4)$$

P4.2 Bir hidrolik sistemde silindirik iki depo Şekil 4.60 da gösterildiği konumda yerleştirilmiştir. Üstteki depoya giren debi q_g, alttaki depoyu terkeden debi $q_ç$ dir. Üst depodaki seviye h_1 alt depodaki seviye h_2 ile gös-

Şekil 4.60 2 depolu hidrolik sistem.

Şekil 4.59 Hız kontrol sisteminin blok diyagramı.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a}{a+c} \frac{K/s}{1+\frac{c}{a+c}\frac{bs}{bs+k}\frac{K}{s}}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a}{a+c} \frac{K}{(a+c)(bs+k)s+cbKs} \tag{4}$$

P4.2 Bir hidrolik sistemde silindirik iki depo Şekil 4.60 da gösterildiği konumda yerleştirilmiştir. Üstteki depoya giren debi q_g, alttaki depoyu terkeden debi $q_ç$ dir. Üst depodaki seviye h_1 alt depodaki seviye h_2 ile gös-

Şekil 4.60 2 depolu hidrolik sistem.

terilmiştir. Depoların çıkış borularında R_1 ve R_2 dirençleri bulunmaktadır. Depo kesit alanları sırasıyla A_1 ve A_2 dir. Alttaki deponun h_2 seviyesini üst depoya giren debi q_g'ye bağlayan transfer fonksiyonunu elde edin.

Çözüm: Depolardan dışarı akış çıkış borularındaki hidrolik dirençler üzerinden olmaktadır. Hidrolik direnç, burada seviyedeki değişmenin çıkış debisindeki değişmeye oranı olarak tanımlanır. Böylece,

$$R_H = \frac{dh}{dq}$$

dır. Seviye ile çıkış debisi arasındaki bağıntı çıkış borusu içindeki akışın laminer akış veya türbülanslı akış oluşuna göre farklıdır.

Çıkış borusu içindeki akış laminer ise rejim halinde çıkış debisi depo seviyesi ile orantılıdır, yani

$$q = Kh$$

Burada,

q : rejim halindeki çıkış debisi, m^3/s

K : Katsayı, m^2/s

h : rejim halindeki seviye, m

dir. Laminer akış için direnç

$$R_H = \frac{dh}{dq} = \frac{h}{q} = \text{sabit}$$

dir. Laminer akışta direnç sabittir ve elektriksel dirence benzerdir.

Çıkış borusu içindeki akış türbülanslı ise, rejim halinde çıkış debisi ile depo seviyesi arasında

$$q = K\sqrt{h}$$

bağıntısı vardır. Burada,

q : rejim halindeki çıkış debisi, m^3/s

K : katsayı, $m^{2,5}/s$

h : rejim halindeki seviye, m.

Türbülanslı akış için direnç

$$R_H = \frac{dh}{dq} = \frac{2h}{q}$$

dur. Burada direnç sabit olmayıp debi ve seviyeye bağlı olarak değişmektedir. Türbülanslı akış direnci kullanılarak q ile h arasındaki bağıntı doğrusallaştırılabilir:

$$q = \frac{2h}{R_H}$$

Burada, R_H sabit kabul edilmektedir.

Şekil 4.61 de türbülanslı akışa ait h—q eğrisi verilmiştir. Eğri üzerindeki herhangi bir nokta çalışma noktası ise, bu çalışma noktasından ayrılmalar küçük olduğu takdirde bu noktadan geçen teğetin eğimi hidrolik direnç R_H olarak alınır ve sabittir. Böylece çalışma noktası doğrusallaştırma sağlanmış olur.

Şekil 4.61 Türbünlanslı akış için h-q eğrisi.

Bu açıklamadan sonra problemin çözümüne geçilebilir. Akış laminer, veya türbülanslı ise çalışma noktası civarında doğrusallaştırılmış kabul edilecektir.

Böylece hidrolik direnç

$$R_H = \frac{h}{q} = \text{sabit} \qquad (1)$$

olarak alınacaktır.

Şekil 4.60 daki sistem için, üstteki depo ile ilgili olarak

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q_g - q_a \tag{2}$$

yazılır. Depolar silindirik olup depo kesit alanları hidrolik kapasite olarak alınacaktır. $C_1 = A_1$ ve $C_2 = A_2$.

Ayrıca,

$$q_a = \frac{h_1}{R_1} \tag{3}$$

yerine koyarak

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q_g - \frac{h_1}{R_1}$$

$$R_1 C_1 \frac{dh_1}{dt} = R_1 q_g - h_1$$

Başlangıç şartlarının sıfır olduğu kabul edilerek Laplace dönüşümü alınır ve düzenlenirse

$$R_1 C_1 s H_1(s) + H_1(s) = R_1 Q_g(s)$$

$$H_1(s) = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} Q_g(s)$$

$R_1 C_1 = \tau_1$ diyerek

$$H_1(s) = \frac{R_1}{\tau_1 s + 1} Q_g(s) \tag{4}$$

elde edilir.

Alttaki depo için benzer şekilde

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_a - q_c$$

$$q_c = \frac{h_2}{R_2} \tag{5}$$

olup, q_a ve q_c yerlerine konarak

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

Başlangıç şartlarının sıfır kabulü ile Laplace dönüşümü alınarak ve düzenlenerek

$$R_2C_2sH_2(s)+H_2(s)=\frac{R_2}{R_1}H_1(s)$$

bulunur.

$$R_2C_2=\tau_2$$

diyerek

$$(\tau_2s+1)H_2(s)=\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1}{\tau_1s+1}Q_e(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_e(s)}=\frac{R_2}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)} \qquad (6)$$

bulunur.

P4.3 Şekil 4.62 deki blok diyagramı ile temsil edilen kontrol sistemine ait kapalı çevrim transfer fonksiyonunu blok diyagramı indirgeme yöntemiyle elde edin.

Şekil 4.62 Blok diyagramı.

Çözüm : Şekil 4.62 deki blok diyagramının indirgenmesi için önce G_2 bloğunun önündeki sinyal ayrılma noktası Tablo 4.1 deki 6 numaralı kural kullanılarak G_2 bloğunun arkasına alınır ve Kural 1 kullanılarak G_2 bloğunun önündeki cebirsel toplama noktalarının yerleri aralarında değiştirilirse Şekil 4.63 a elde edilir. Şekil 4.63 a da görülen blok diyagramında G_2 ve H_2 bloklarını haiz kapalı çevrim için Tablo 4.1 deki 8 numaralı kural uygulanarak ve H_1/G_2 bloğunu ihtiva eden paralel kollar indirgenerek

Şekil 4.63 b elde edilir. Şekil 4.63 b de görülen blok diyagramına 8 numaralı kuralın uygulanması ile Şekil 4.63 c elde edilir. Benzer olarak Şekil 4.63 c ye 3 ve 8 numaralı kuralların uygulanmasıyla sisteme ait C(s)/R(s) transfer fonksiyonu elde edilmiş olur, Şekil 4.63 d.

Şekil 4.63 Şekil 4.62 deki blok diyagramının indirgenmesi.

P4.4 Şekil 4.64 de blok diyagramı görülen kontrol sistemine ait işaret akış diyagramını çizip, Mason formülü ile C(s)/R(s) kapalı çevrim transfer fonksiyonunu elde ediniz.

Şekil 4.64 Blok diyagramı.

Çözüm : Şekil 4.64 de blok diyagramı verilen sisteme ait işaret akış diyagramı Şekil 4.65 de görülmektedir.

Şekil 4.65 Şekil 4.64 de verilen blok diyagramının işaret akış diyagramı.

R(s) girişinden C(s) çıkışına giden iki adet ileri giden yol vardır. O halde

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

$$P_2 = G_4$$

Beş adet kapalı çevrim olup kazançları :

$L_1 = G_1G_2H_1$

$L_2 = -G_2G_3H_2$

$L_3 = -G_1G_2G_3H_3$

$L_4 = -1G_4H_3$

$L_5 = -G_4H_2G_2H_1$

Temassız çevrim yok. Böylece

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$

$\Delta = 1 - (G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3H_3 - G_4H_3 - G_2G_4H_1H_2)$

$\Delta_1 = 1 \ , \ \Delta_2 = 1$

Mason formülü uygulanarak

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} \quad \frac{G_1G_2G_3 1 + G_4 1}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3H_3 + G_2G_4H_1H_2 + G_4H_3}$$

P4.5 Şekil 4.66 da blok diyagramı verilmiş olan sisteme ait işaret akış diyagramını çizip Mason formülü ile C(s)/R(s) kapalı çevrim transfer fonksiyonu elde edin.

Şekil 4.66 Blok diyagramı.

Çözüm : Sistemin işaret akış diyagramı şekil 4.67 de görülmektedir.

Şekil 4.67 Şekil 4.66 da verilen blok diyagramının işaret akış diyagramı.

R girişinden C çıkışına giden dört adet ileri giden yol var.

$P_1 = G_1G_2$

$P_2 = G_3G_4$

$P_3 = G_1G_2(-1)G_3G_4$

$P_4 = G_3G_4(+1)G_1G_2$

$P_3 = -P_4$ olup $P_3 + P_4 = 0$

Üç adet kapalı çevrim var. Bunların kazançları :

$L_1 = G_1G_2(-1)$

$L_2 = G_3G_4(-1)$

$L_3 = G_1G_2(-1)G_3G_4(+1)$

Temassız çevrim yok.

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$

$\Delta = 1 - (-G_1G_2 - G_3G_4 - G_1G_2G_3G_4)$

$\Delta = 1 + G_1G_2 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_4$

$\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 1$, $\Delta_4 = 1$

Mason formülü uygulanarak:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=T(s)=\frac{\sum_{k=1}^{4} P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4}{\Delta}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=T(s)=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_1G_2+G_3G_4}{1+G_1G_2+G_2G_3+G_1G_2G_3G_4}$$

5. GEÇİCİ REJİM CEVABI

5.1 GİRİŞ

Otomatik kontrol sistemlerinin biri «geçici rejim» diğeri «sürekli rejim» olmak üzere iki davranışı vardır. Geçici rejim, sistemin belli bir başlangıç durumundan bir nihai duruma kadar olan davranışıdır. Sürekli rejim ise, sistemin zaman sonsuza uzanıyorken koruduğu davranış şeklidir. Otomatik kontrol sistemlerinin gerek geçici rejim cevapları ve gerek sürekli rejim cevapları incelenmekle uygun davranışa sahip olup olmadıkları ve daha iyi davranış elde edebilmek için neler yapılabileceği ortaya çıkar. Bu bölümde «geçici rejim cevabı» üzerinde durulmaktadır.

Otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesi için gerekli olan matematik modellerin elde olunması Bölüm (4) de anlatılmıştır. Lineer, veya belirli bir çalışma noktası civarında lineerleştirilmiş, otomatik kontrol sistemlerinin transfer fonksiyonları

a. Orantı elemanı tipinde; $T.F. = K = \text{sabit},$

b. Kapasite elemanı tipinde; $T.F. = \dfrac{1}{Cs},$

c. Zaman sabiti elemanı tipinde; $T.F. = \dfrac{1}{\tau s + 1},$

d. Titreşim elemanı tipinde; $T.F. = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

veya bunların çeşitli kombinezonları şeklinde olmaktadır. Örnek olarak, birinci mertebeden bir sistem demek olan bir zaman sabiti elemanı ile ikinci mertebeden bir sistem anlamındaki bir titreşim elemanının bir araya gelmesi ile üçüncü mertebeden bir sistem ortaya çıkar, Şekil 5.1.

Şekil 5.1 Üçüncü mertebeden sistem.

Şekil 5.1 deki sistemi Şekil 5.2 deki gibi göstermek mümkündür. Böylece şu önemli sonuç belirlenmektedir: karmaşık bir sistemin davranışı incelenirken, o sistemi oluşturan basit bileşenlerin davranışları incelenip toplam sonuç için bir araya getirilebilir.

Şekil 5.2 Şekil 5.1 in değişik gösterilişi.

Orantı, kapasite, zaman sabiti ve titreşim elemanları için çeşitli fiziksel sistem örnekleri Bölüm (4.6) da verilmiştir. Bu elemanların davranış özellikleri yani belirli girişlere karşı ne cevap verdikleri bilinirse, bu elemanlarla yalın halde karşılaşıldığında veya bu elemanlardan ibaret bileşenlere ayrılabilecek karmaşık sistemlerle uğraşıldığında sonucu elde etmek ve hatta sonucu önceden kestirmek mümkündür. Esasen sistemlerin blok diyagramları ile incelenmesinin büyük yararlarından biri budur; sistemin blok diyagramına bakarak sonuç davranış hakkında fikir yürütmek imkânı vardır.

Bir sistemin cevabı (davranış şekli) hem o sistemin transfer fonksiyonuna hem de giriş (ikaz) fonksiyonuna bağlıdır. Aynı sistemin farklı giriş fonksiyonlarına cevabının farklı olacağı açıktır. O halde, teknikte karşılaşılabilinen çeşitli giriş (ikaz) fonksiyonlarına göre sistem cevaplarının incelenmesi gerekir. Ne var ki, uygulamada, genel olarak, kontrol sistemlerinin girişleri önceden kolaylıkla saptanabilecek belirli fonksiyonlar olmamakta, çoğunlukla gelişigüzel (random) esaslı girişler kendini göstermektedir. Sadece bazı özel hallerde giriş fonksiyonu (giriş sinyali) analitik şekilde ifade edilebilecek cinsten olur. Örnek olarak, bir bina sıcaklığının termostatlı bir kontrol sistemiyle kontrol edilmesinde, istenilen

değerin (refans değeri) değiştirilmesi, yani yeni bir sıcaklık değerine ayarlanması için termostat üzerinde bir düğme döndürülür; böylece kontrol sisteminin girişine bir basamak fonksiyonu uygulanmış olur. Diğer bir örnek, şablonla çalışan otomatik kontrollu bir torna tezgâhında, şablon eğrisi, kontrollu sistemin giriş değeridir ve şekli önceden bilinmektedir. Özel hal örneklerini artırmak mümkündür.

Kontrol sistemlerinin incelenmesi ve bunu takiben dizayn edilmesinde çeşitli kontrol sistemlerinin davranış şekillerinin karşılaştırılması esastır. Bu bakımdan uygulamada her zaman rastlanmasa bile, sistemlerin deney için bazı tipik giriş fonksiyonları ile zorlanması (ikaz edilmesi) âdet olmuştur. Bu giriş fonksiyonları

a. Basamak fonksiyonu,

b. Rampa fonksiyonu,

c. Impuls fonksiyonu,

d. Sinüs fonksiyonu

olarak seçilir. Bu basit giriş fonksiyonlarının matematik tanımları Bölüm (2.4) de etraflı şekilde verilmiş bulunmaktadır. Bir kontrol sisteminin ani bir girişe (referans veya bozucu olarak) maruz kalması halinde, inceleme için kullanılacak olan giriş fonksiyonunun tipi «basamak»dır. Eğer kontrol sistemine tedricen artan bir giriş bahis konusu ise, kontrol sistemi «rampa» girişe göre incelenir. Şok şeklinde bir girişe maruz kalan kontrol sistemi ise «impuls» giriş ile incelenecek demektir. Sistemlerin geçici rejim davranışlarının incelenmesinde giriş fonksiyonu olarak basamak, rampa ve impuls fonksiyonlarından biri (fiziksel zorlama şekline uygun olan biri) kullanılır. Geçici rejim incelemesinde kullanılan bu fonksiyonların birbirleriyle ilişkili olan bir özelliği de, basamak fonksiyonunun rampa fonksiyonunun türevi; impuls fonksiyonunun ise basamak fonksiyonunun türevi oluşudur. Sinus fonksiyonu ise sistemlerin sürekli (daimi) rejim davranışlarının incelenmesinde yararlı olmaktadır.

Bir kontrol sisteminin, zaman domeninde, biri «geçici rejim» diğeri «sürekli rejim» olmak üzere iki davranışı vardır. Geçici rejim, bir sistemin belli bir başlangıç durumundan bir nihai duruma kadar olan davranışıdır. Sürekli rejim ise, o sistemin zaman sonsuza uzanıyorken koruduğu davranış şeklidir. Zaman domeninde, sisteme ait temel diferansiyel denklem çözüldüğü zaman, sağ tarafsızın çözümü geçici rejimle, özel çözüm ise sürekli rejimle ilgilidir.

Aşağıda, çeşitli sistemlerin belirli girişlere cevapları incelenecektir. Sistem transfer fonksiyonu «orantı elemanı» tipinde ise giriş fonksiyonu sabit orantı sayısı ile çarpılarak cevap elde edilecek demektir. Eğer, orantı sayısı K(=sabit) ise ve giriş fonksiyonu $X(s) = ALu(t)$, (A=sabit) , şeklinde bir basamak fonksiyonu ise cevap $Y(s) = (KA) . Lu(t)$ olur. Yani cevap değeri, yüksekliği K çarpanı kadar değişmiş ama, yine bir basamak fonksiyonudur. Eğer girişe, $X(s) = A/s^2$, $[x(t) = At]$, şeklinde eğimi A olan bir rampa uygulanırsa, cevap değeri yine bir rampadır, sadece rampanın eğimi K çarpanı kadar değişerek (KA) olur. Sistemin transfer fonksiyonunun «kapasite elemanı» tipinde olması halinde, transfer fonksiyonu 1/Cs şeklinde olup, çıkış değeri (cevap) giriş fonksiyonunun integralini alacak şekildedir. Kapasite elemanının «basamak» girişe cevabı bir «rampa» fonksiyonudur.

5.2 ZAMAN SABİTİ ELEMANININ GEÇİCİ REJİM CEVABI

Evvelce belirtildiği gibi, zaman sabiti elemanı diferansiyel denklemi birinci mertebeden olan bir sistemi göstermektedir. Zaman sabiti elemanı, Bölüm (4.6) da örnekleri verilmiş olduğu üzere, fiziksel olarak, bir RC devresini, bir kütle-damper ikilisini, dışa çıkışlı bir hidrolik depoyu veya ısıtma sistemini temsil ediyor olabilir.

Zaman sabiti elemanının transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{5.1}$$

şeklindedir. τ zaman sabitidir ve zaman boyutundadır. İlgili blok diyagramı kapalı çevrimli olarak Şekil 5.3 de indirgenmiş (basit) olarak Şekil 5.4 de gösterilmiştir.

Şekil 5.3 Kapalı çevrim transfer fonksiyonu zaman sabiti tipinde olan sistemin blok diyagramı.

Şekil 5.4 Zaman sabiti elemanının indirgenmiş blok diyagramı.

Zaman sabiti elemanının girişine birim-basamak, birim-rampa, ve birim-impuls uygulanarak cevap davranışı incelenecektir. Fiziksel sistem cinsi ne olursa olsun, transfer fonksiyonu zaman sabiti tipinde olan sistemlerin aynı «giriş»e «cevapları» aynıdır. Cevap elde edildikten sonra sistemin fiziksel cinsine göre yorum yapılır.

Zaman sabiti elemanının basamak cevabı

Basamak olarak, $r(t)=u(t)$ birim basamak fonksiyonu alınacaktır. $L[u(t)]=1/s$ dir. O halde Denklem (5.1) den

$$C(s)=\frac{1}{\tau s+1}\,\frac{1}{s} \tag{5.2}$$

elde edilir. Denklem (5.2) basit kesirlere ayrılıp sabitler değerlendirilerek (bak. Bölüm 2.11),

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{\tau}{\tau s+1} \tag{5.3}$$

elde olunur. Denklem (5.3) deki sağ tarafın ikinci teriminin pay ve paydası τ ile bölünerek

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(1/\tau)} \tag{5.4}$$

bulunur. Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$c(t)=1-e^{-t/\tau} \tag{5.5}$$

elde olunur. Cevap davranışı, zaman domeninde, t ye değerler vererek elde olunur:

$t=0$ için $c(t)=1-1=0$

$t=\tau$ » $c(t)=1-1/e=0{,}632$

$t=2\tau$	için	$c(t)=1-1/e^2=0{,}865$
$t=3\tau$	»	$c(t)=1-1/e^3=0{,}950$
$t=4\tau$	»	$c(t)=1-1/e^4=0{,}982$
$\vdots$		$\vdots$
$t=\infty$	»	$c(t)=1-1/e^{\infty}=1{,}0$

Zaman sabiti elemanının, birim basamak girişe cevabının, başlangıç anında sıfır olduğu, bir zaman sabiti sonra erişeceği nihai değerin % 63,2 sine vardığı, 4 zaman sabiti zaman geçince % 2 den küçük hata ile nihai değerine eriştiği görülmektedir. Sistemin zaman sabiti τ ne kadar küçükse sistemin cevabı o kadar hızlı olacak ve nihai değere erişme zamanı o kadar azalacaktır. Denklem (5.5) ile verilen cevap eğrisi için başlangıç teğetinin eğimi de önemlidir. Eğrinin başlangıç noktasındaki teğetinin eğimi

$$\left.\frac{d\,c(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}\,e^{-t/T}\right|_{t=0} = \frac{1}{T} \tag{5.6}$$

dır. Basamak girişi ve üstel olan cevap eğrisi Şekil 5.5 de gösterilmiştir.

Şekil 5.5 Zaman sabiti elemanının birim basamak girişe cevabı.

Transfer fonksiyonu zaman sabiti tipinde olan elemanlara uygulamada hayli rastlanır. Nihai değere erişmek için 4τ zaman beklemek zarureti gecikme getirmektedir. Bu nedenle zaman sabiti elemanına «birinci mertebeden gecikme» adı da verilir.

Ölçme cihazlarının önemli bir bölümünün transfer fonksiyonu zaman sabiti elemanı tipindedir. Böyle bir ölçme cihazının girişinde (yani ölçülecek fiziksel büyüklükte) bir basamak değişmesi olduğu zaman doğru cevabı (ölçülen fiziksel büyüklüğün değerini) öğrenebilmek için en az cihazın zaman sabitinin 4 katı olan bir zaman süresi beklemek gerekir. Örnek olarak, bir tıp termometresinin transfer fonksiyonu zaman sabiti elemanı tipindedir. Çevre sıcaklığındaki termometreyi alıp vücut sıcaklığını öğrenmek üzere koltuk altına yerleştirmekle termometrenin girişine ani olarak (vücut sıcaklığı - çevre sıcaklığı) yüksekliğinde bir sıcaklık basamağı uygulanmış demektir. Bu tıp termometresinin zaman sabiti $\tau=30$ san. ise, vücut sıcaklığının derecesini doğru olarak öğrenebilmek için en az $4\times30=120$ san. (2 dakika) beklemek gerekir.

Zaman sabiti elemanının rampa cevabı

Rampa fonksiyonu olarak, $r(t)=t$ birim rampa fonksiyonu uygulansın. $L[t]=1/s^2$ dir. Böylece Denklem (5.1) den

$$C(s)=\frac{1}{\tau s+1}\,\frac{1}{s^2} \tag{5.7}$$

elde edilir. Denklem (5.7) basit kesirlere ayrılarak ve sabitler hesaplanarak (bak Bölüm 2.11),

$$C(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{\tau}{s}+\frac{\tau^2}{s+1} \tag{5.8}$$

bulunur. Buradan

$$C(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{\tau}{s}+\frac{\tau}{s+(1/\tau)} \tag{5.9}$$

yazılıp, ters Laplace dönüşümü alınarak

$$c(t)=t-\tau+\tau e^{-t/\tau} \tag{5.10}$$

elde olunur.

Zamanla, t büyürken, $\tau e^{-t/\tau}$ terimi, ortadan silinir ve geriye sadece $c(t)=t-\tau$ doğrusu kalır. Yeteri kadar zaman geçince cevap eğrisinin, τ kadar gecikmeyle, giriş eğrisi olan $r(t)=t$ doğrusuna paralel bir değişim

gösterdiği anlaşılmaktadır. $c(t)=t-\tau$ doğrusu, aslında Denklem (5.10) ile verilen cevap eğrisinin asimptotudur. Cevap ile giriş arasındaki fark, yani hata $e(t)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t)-c(t) \\ &= t-[t-\tau-\tau e^{-t/\tau}] \\ &= \tau(1-e^{-t/\tau}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

olur. t sonsuza giderken $e^{-t/\tau}$ terimi sıfıra yaklaşır ve böylece hata

$$e(t\to\infty)=\tau$$

olur. t sonsuza giderken mevcud kalan hataya daimi rejim (sürekli rejim) hatası denir :

$$e_{DR}=\tau \tag{5.12}$$

Şüphesiz, sistemin zaman sabiti ne kadar küçükse çıkış değeri (cevap), giriş değerini o kadar yakından izler; diğer deyişle e_{DR} o oranda küçük olur. Ancak zaman sabitini sıfır almak mümkün olamayacağına göre küçük de olsa daima bir e_{DR} mevcuttur. Birim rampa girişi ve sistem cevabını gösteren diyagram Şekil 5.6 da verilmiştir.

Şekil 5.6 Zaman sabiti elemanının birim rampa cevabı.

gösterdiği anlaşılmaktadır. $c(t)=t-\tau$ doğrusu, aslında Denklem (5.10) ile verilen cevap eğrisinin asimptotudur. Cevap ile giriş arasındaki fark, yani hata $e(t)$ hesaplanırsa

$$e(t)=r(t)-c(t)$$
$$=t-[t-\tau-\tau e^{-t/\tau}]$$
$$=\tau(1-e^{-t/\tau}) \qquad (5.11)$$

olur. t sonsuza giderken $e^{-t/\tau}$ terimi sıfıra yaklaşır ve böylece hata

$$e(t\to\infty)=\tau$$

olur. t sonsuza giderken mevcud kalan hataya daimi rejim (sürekli rejim) hatası denir :

$$e_{DR}=\tau \qquad (5.12)$$

Şüphesiz, sistemin zaman sabiti ne kadar küçükse çıkış değeri (cevap), giriş değerini o kadar yakından izler; diğer deyişle e_{DR} o oranda küçük olur. Ancak zaman sabitini sıfır almak mümkün olamayacağına göre küçük de olsa daima bir e_{DR} mevcuttur. Birim rampa girişi ve sistem cevabını gösteren diyagram Şekil 5.6 da verilmiştir.

Şekil 5.6 Zaman sabiti elemanının birim rampa cevabı.

Bu sonuca, ölçme cihazları açısından bakıldığı zaman, transfer fonksiyonu zaman sabiti elemanı tipinde olan bir ölçme cihazı ile tedricen değişen bir fiziksel büyüklük ölçülmek istendiğinde, cihaz cevabının (cihazın çıkış değerinin) cihazın zaman sabitine bağlı olarak girişi «dinamik hata» kadar farkla izleyeceği ve e_{DR} dinamik hatasının daima mevcud olacağı anlaşılmaktadır.

Zaman sabiti elemanının impuls cevabı

Birim impuls $\delta(t)$ giriş olarak uygulansın. $L[\delta(t)]=1$ dir. Denklem (5.1) den

$$C(s)=\frac{1}{\tau s+1}\,1 \tag{5.13}$$

elde edilir. Buradan

$$C(s)=\frac{(1/\tau)}{s+(1/\tau)} \tag{5.14}$$

yazılır ve ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t)=\frac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau} \tag{5.15}$$

bulunur. Cevap eğrisi c(t) Şekil 5.7 de gösterilmiştir.

Şekil 5.7 Zaman sabiti elemanının birim impuls cevabı.

Bu sonuca, ölçme cihazları açısından bakıldığı zaman, transfer fonksiyonu zaman sabiti elemanı tipinde olan bir ölçme cihazı ile tedricen değişen bir fiziksel büyüklük ölçülmek istendiğinde, cihaz cevabının (cihazın çıkış değerinin) cihazın zaman sabitine bağlı olarak girişi «dinamik hata» kadar farkla izleyeceği ve e_{DR} dinamik hatasının daima mevcud olacağı anlaşılmaktadır.

Zaman sabiti elemanının impuls cevabı

Birim impuls $\delta(t)$ giriş olarak uygulansın. $L[\delta(t)]=1$ dir. Denklem (5.1) den

$$C(s)=\frac{1}{\tau s+1}\,1 \tag{5.13}$$

elde edilir. Buradan

$$C(s)=\frac{(1/\tau)}{s+(1/\tau)} \tag{5.14}$$

yazılır ve ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t)=\frac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau} \tag{5.15}$$

bulunur. Cevap eğrisi $c(t)$ Şekil 5.7 de gösterilmiştir.

Şekil 5.7 Zaman sabiti elemanının birim impuls cevabı.

5.3 TİTREŞİM ELEMANININ GEÇİCİ REJİM CEVABI

Titreşim elemanı, diferansiyel denklemi ikinci mertebeden olan sisteme verilen addır. Bölüm (4.6) da incelenmiş olduğu üzere elektriksel RLC devresinin, mekanik yay-kütle-damper sisteminin, v.s. transfer fonksiyonları hep titreşim elemanı tipindedir. Titreşim elemanının transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \tag{5.16}$$

veya $T=1/\omega_n$ yazılarak

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{5.17}$$

şeklindedir. Burada, T=karakteristik zaman, ω_n=doğal frekans, ζ=söndürme oranıdır. Titreşim elemanının kapalı çevrimli blok diyagramı 5.8 de, indirgenmiş blok diyagramı ise Şekil 5.9 da verilmiştir.

Şekil 5.8 Kapalı çevrim transfer fonksiyonu titreşim elemanı tipinde olan sistemin blok diyagramı.

Şekil 5.9 Titreşim elemanının indirgenmiş blok diyagramı.

Titreşim Elemanının Basamak Cevabı

Titreşim elemanının Denklem (5.17) ile verilen transfer fonksiyonu tekrar yazılsın:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{5.17}$$

5.3 TİTREŞİM ELEMANININ GEÇİCİ REJİM CEVABI

Titreşim elemanı, diferansiyel denklemi ikinci mertebeden olan sisteme verilen addır. Bölüm (4.6) da incelenmiş olduğu üzere elektriksel RLC devresinin, mekanik yay-kütle-damper sisteminin, v.s. transfer fonksiyonları hep titreşim elemanı tipindedir. Titreşim elemanının transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \tag{5.16}$$

veya $T=1/\omega_n$ yazılarak

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{5.17}$$

şeklindedir. Burada, T=karakteristik zaman, ω_n=doğal frekans, ζ=söndürme oranıdır. Titreşim elemanının kapalı çevrimli blok diyagramı 5.8 de, indirgenmiş blok diyagramı ise Şekil 5.9 da verilmiştir.

Şekil 5.8 Kapalı çevrim transfer fonksiyonu titreşim elemanı tipinde olan sistemin blok diyagramı.

Şekil 5.9 Titreşim elemanının indirgenmiş blok diyagramı.

Titreşim Elemanının Basamak Cevabı

Titreşim elemanının Denklem (5.17) ile verilen transfer fonksiyonu tekrar yazılsın:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{5.17}$$

Denklem (5.17) den görüldüğü gibi titreşim elemanı tipindeki sistemin ζ ve ω_n olmak üzere iki parametresi vardır ve sistemin geçiş rejimindeki davranışı karakteristik denklemin sıfırlarından (veya transfer fonksiyonunun pollerinden) incelenebilir, (bak Bölüm 2.11). Burada karakteristik denklem

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \tag{5.18}$$

dır. Karakteristik denklemin kökleri (sıfırları) ise

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\sqrt{\zeta^2\omega_n^2-\omega_n^2}$$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_n$$

dir. Söndürme oranı ζ nın alacağı değerlere göre karakteristik denklem kökleri (veya transfer fonksiyonunun polleri) kompleks eşlenik veya gerçel olabilir.

Eğer $0<\zeta<1$ ise: $s_{1,2}$ kökleri kompleks eşlenik olup s düzleminin sol tarafındadır. Sistem cevabı geçici rejimde sönümlü titreşim yapar. Bu hale «az sönümlü hal» denir.

Eğer $\zeta=1$ ise: $s_{1,2}$ kökleri gerçel ve eşittir. Bu hale «kritik sönümlü hal» denir. Titreşim yoktur.

Eğer $\zeta>1$ ise: $s_{1,2}$ kökleri gerçeldir. Bu hale «fazla sönümlü hal» denir. Titreşim yoktur. Sönüm fazlalığı nedeniyle sistem cevabı yavaştır.

Eğer $\zeta=0$ ise: $s_{1,2}$ kökleri imajiner eşleniktir ve imajiner eksen üzerindedir. Hiç sönüm olmadığından sistem cevabı sönümsüz serbest titreşim yapar.

Titreşim elemanının basamak cevabını incelemek üzere girişine $r(t)=u(t)$ (veya $R(s)=1/s$) birim basamak fonksiyonu uygulansın. Böylece

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)s} \tag{5.19}$$

elde olunur. Tablo 2.1 yardımıyla ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{Sin}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \tag{5.20}$$

bulunur. Denklem (5.20) çeşitli ζ değerleri için şekil 5.10 da çizilmiştir. Yatay eksen olarak boyutsuz değişken $(\omega_n t)$ alınmıştır, $(\omega_n$ doğal fre-

Şekil 5.10 Titreşim elemanının birim basamak cevabı.

kans olup 1/zaman boyutundadır). Denklem (4.20) de ω_n ve t nin yalnızca $(\omega_n t)$ çarpımı şeklinde ortaya çıkması, yatay eksenin $(\omega_n t)$ boyutsuz değişkenine göre alınmasını mümkün kılmaktadır. ω_n doğal frekansı doğrudan doğruya sistem cevabının hızını tayin eder. Eğer, ζ sabit tutularak ω_n meselâ iki misli artırılırsa, sistemin cevap hızı iki kat artar. Çünkü $(\omega_n t)$-nin aynı değerine, ve keza c(t) nin aynı değerine, bir önceki zamanın yarısında erişilir. Şekil 5.10 dan ζ büyüdükçe sistem cevabının yavaşladığı, fakat titreşimin giderek ortadan kalktığı görülmektedir. Hızlı fakat titreşimli bir cevap için ise ζ nın küçük olması yani «az sönümlü sistem» seçilmesi gerekir. ζ nın en uygun değerinin 0,5 ile 0,8 arasında olduğu kabul edilir. Transfer fonksiyonu titreşim elemanı tipinde olan ölçme cihazlarında söndürme oranı $\zeta=0{,}6$ ilâ 0,7 olarak sağlanmaktadır.

Titreşim elemanının rampa cevabı

Titreşim elemanının birim rampa cevabını elde etmek üzere Denklem (5.17) de $R(s)=1/s^2$ yazılsın. Böylece

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\,\frac{1}{s^2} \tag{5.21}$$

elde olunur. Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$c(t)=t-\frac{2\zeta}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot \operatorname{Sin}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad (5.22)$$

bulunur. Cevap eğrisi $c(t)$ nin $0<\zeta<1$ (az sönümlü hal) için değişimi Şekil 5.11 de gösterilmiştir. Şekil 5.11 de birim rampa olan giriş fonksiyonu da çizilmiştir. Daima (sürekli) rejimde mevcud olan hata

$$e_{DR}=[r(t)-c(t)]_{t=\infty}=[t-c(t)]_{t=\infty}$$

ve buradan

$$C_{DR}=\frac{2\zeta}{\omega_n} \quad (5.23)$$

olarak bulunur.

Şekil 5.11 Titreşim elemanının birim rampa cevabı. ($0<\zeta<1$ hali için)

Titreşim elemanının impuls cevabı

Birim impuls cevabını elde etmek için Denklem (5.17) de $R(s)=1$ yazılır. Böylece

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot 1 \quad (5.24)$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$c(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{Sin}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) \quad (5.25)$$

elde edilir. Denklem (5.25) den $c(t)$ yerine $c(t)/\omega_n$ nin $(\omega_n t)$ değişkenli absis ekseni üzerine çizilmesinin uygun olacağı görülmektedir. Şekil 5.12 de $0<\zeta\leq 1$ için $c(t)/\omega_n$ eğrileri $(\omega_n t)$ absis ekseni üzerine çizilmiştir.

Şekil 5.12 Titreşim elemanının birim impuls cevabı.
($0<\zeta\leq 1$ için)

6. KONTROL ORGANI TİPLERİ

6.1 GİRİŞ

Bu bölümden önceki bölümlerde, fiziksel sistemlerin matematik modellerinin nasıl elde edileceği (Bölüm 3) ve matematik modeli belli olan sistemlerin otomatik kontrol açısından önemli olan çeşitli geçici rejim davranışları (Bölüm 5) incelenmiş bulunmaktadır.

Böylece, kapalı çevrimli bir otomatik kontrol sisteminin çevrim üzerindeki çeşitli elemanlarının davranışları artık incelenebilir. Ancak, çevrim üzerinde bulunan kontrol organının endüstride mevcut tipleri hakkında bir miktar konuşmak gerekir. Bu yapıldıktan sonra kapalı çevrimle kontrolun nasıl sağlanabildiği incelenecektir.

Kapalı çevrimli otomatik kontrol sisteminin blok diyagramı Şekil 6.1 de gerekli açıklamaları yapabilmek için tekrar verilmiştir.

Şekil 6.1 Kapalı çevrimli kontrol.

Kontrol büyüklüğünün kontrol edilebilmesi için diğer bir deyişle istenilen değere (referans değerine) getirilebilmesi için mevcut kontrol hatasının küçültülmesi mümkünse sıfır yapılması amacıyla bir kontrol organına ihtiyaç vardır. Kontrol organı hatayı giriş olarak alır ve hatanın

şekline ve kendi transfer fonksiyonuna bağlı olarak bir karar hazırlar. Hazırlanan karar bir kumanda sinyali şeklinde son kontrol elemanına gönderilir. Böylece, fiziksel olarak meselâ bir vana açılır-kapanır veya bir elektrik motorunun çalışması gibi bir hareket sağlanır, öyleki kontrol edilen sistem girişinde hatayı küçültecek değişme meydana gelmiş olur. Hatanın elde edilebilmesi için referans değeri ile ölçülen kontrol büyüklüğünün karşılaştırılması gerekir. Çoğu defa karşılaştırma elemanı kontrol organının içindedir. Bu bölümde endüstriyel kontrol organı tipleri üzerinde durulacaktır. Endüstriyel kontrol organlarının görevlerini yapabilmesi için, gerektiğinde, dıştan sağlanan enerji elektriksel, pnömatik veya hidrolik cinsten olur. Böylece alınan enerji tipine göre kontrol organlarını elektronik kontrol organı, pnömatik kontrol organı veya hidrolik kontrol organı diye sınıflandırmak mümkündür. Hangi sınıftan kontrol organının seçileceğini kontrol edilen sistemin yapısı, çalışma şartları, emniyet, ekonomiklik, güvenirlik, hassasiyet, kolay sağlama, ağırlık ve boyutlar gibi pek çok etken belirler. Örnek olarak tekstil fabrikalarında ve rafinerilerde emniyet için elektriksel sistemler kullanılmamakta, kullanılması temiz ve emniyetli olan, basınçlı hava ile çalışan pnömatik kontrol organları tercih edilmektedir.

Fiziksel cinsi ne olursa olsun kontrol organları dinamik davranışları bakımından iki ana sınıfa ayrılır:

1. İkili çalışan kontrol organları
2. Sürekli çalışan kontrol organları

Bir kontrol organının dinamik davranışı, doğrudan doğruya kontrol sisteminin tipini ve etkinliğini belirler.

6.2 İKİLİ KONTROL ORGANI

İkili kontrol, on-off kontrol veya bang-bang kontrol isimleri ile de anılmaktadır. İkili kontrol organı sadece iki belirli konumda bulunur; kontrol organı ya devrede veya devrede değildir. İkili kontrol organı nispeten basit ve ucuz olması nedeniyle endüstride ve evlerdeki kontrol sistemlerinde oldukça fazla kullanılır. Isıtma, havalandırma ve soğutma sistemlerinde geniş uygulama alanı vardır. Basitleştirilmiş bir örnek Şekil 6.2 de gösterilmiştir. Bu bir ısıl sistem örneğidir.

Temas termometresinin temas yerleri (kontakları) istenilen sıcaklık değerine göre ayarlanır. Depo içindeki sıvı sıcaklığı yükselince termomet-

Şekil 6.2 Bir depo içindeki sıvı sıcaklığının ikili kontrol ile sabit tutulması.

re içinde genleşen civa kontakları örter, böylece solenoid devresini kapatır. Elektrik enerjisi alan solenoid şalteri açar ve ısıtıcı devre dışı kalır. Depo içindeki sıvı soğuyarak sıcaklığı istenilen sıcaklığın altına düşünce temas termometresi içindeki cıva sütunu aşağı iner, solenoid devresi açılır; bir yay etkisi ile ısıtıcı devresinin şalteri kapanır ve ısıtıcı devreye girer. Böylece depo içindeki sıvı sıcaklığı bir θ_{mak} ile bir θ_{min} arasında muhafaza edilir.

İkili kontrol için diğer bir örnek olarak Şekil 6.3 de gösterilen hidrolik seviye kontrolu alınsın. Depodaki seviyeyi ölçen bir şamandıra bir elektrik şalteri kapatıp açmakta ve böylece solenoid valf devresine elektrik enerjisi verilmekte veya kesilmektedir. Bir solenoid içinde yumuşak demirden bir çubuk bulunan bir sargıdır ve elektrik enerjisi alınca bir manyetik alan yaratarak bir elektromagnet şeklinde çalışmaktadır. Sıvı giriş borusu üzerinde bulunan solenoid valf elektrik devresi açıkken tam açıktır. Sıvı seviyesi yükselir ve bir h_{mak} değerine erişirse şalter elektrik devresini kapatır. Böylece solenoid valf kapanarak giriş debisi kesilir. Sıvı seviyesi düşünce şalter devreyi açar, solenoid valf tam açılır ve giriş debisi maksimum değerinde mevcuddur. Görüldüğü gibi giriş debisi ya vardır veya yoktur. Şamandıra kolunda yatak sürtünmeleri yoksa ve elektriksel kontaklar ark yapmıyorsa devreye giriş ve çıkış ani olur, Şekil 6.4.

Şekil 6.3 Hidrolik seviyenin ikili kontrolu.

Şekil 6.4 İkili kontrol davranışı.

Fakat uygulamada şamandıra kolunun yataklarında sürtünmeler vardır. Bu nedenle seviye istenilen değere erişir erişmez, şamandıra yükselerek şalteri kapatamaz ve seviyenin bir miktar daha yükselmesi gerekir. Seviye alçaldığı zaman da yine sürtünmeler yüzünden, şamandıra istenen seviyenin altına indikten sonra şalter açılır ve depoya sıvı debisi girmeye başlar. Bu yüzden, elektrik devresinin kapanışı ve açılışı arasında bir histeresis meydana gelir. Buna «diferansiyel aralık» adı verilir. Diferansiyel aralık Şekil 6.5 de gösterilmiştir. Burada açıklanan diferansiyel aralık istenmeden kendiliğinden ortaya çıkar. Fakat çok defa, ikili kontrol organı

Şekil 6.5 Diferansiyel aralık.

sık sık devreye girerek, çabuk aşınmasın diye diferansiyel aralık kasıtlı olarak sağlanır. Diferansiyel aralığın bulunmaması veya çok küçük olması halinde ikili kontrol organı devamlı şekilde titreşim yaparak (ya açık - ya kapalı) devrede bulunur ve cihazın ömrü kısa olur. Isıtma veya soğutma sistemlerinde kullanılan termostatların kullanma yerine bağlı olarak daima bir diferansiyel aralıkları vardır. Termostat diferansiyel aralık içinde duyarsızdır. Örnek olarak, bir termostatda diferansiyel aralık ± 1 °C ise ve termostat 60 °C ye ayarlı ise, termostat ancak 61 °C ve 59 °C sıcaklıklarda harekete geçer; 59 ile 61 °C arasında hareketsizdir.

Yine depoda su seviyesi kontrolu (Şekil 6.3) örneğine dönülürse, diferansiyel aralıktan dolayı seviye tam istenen yükseklikte tutulamaz, fakat bir h_{min} ile bir h_{mak} arasında devamlı değişir. Seviyenin değişmesi Şekil 6.6 da gösterilmiştir.

Şekil 6.6 Hidrolik seviyenin ikili kontrolunda seviyenin değişmesi.

Genellikle sistemde mevcut ölü zaman etkileri yüzünden diferansiyel aralık aşılır. Örnek olarak alınan hidrolik depoda, sıvı besleyen borunun boyu solenoid valfdan depoya kadar uzunca ise, şamandıra h_{mak} yüksekliğine çıkıp valfı kapattığı halde boru içindeki sıvı depoya akmaya ve seviyeyi biraz daha yükseltmeye devam eder. Seviyenin alçalması halinde de, seviye h_{min}'a inip şamandıra solenoid valfı açtığı halde borudaki nakil gecikmesi (ölü zaman) yüzünden depodaki seviye h_{min} yüksekliğinin biraz altına indikten sonra depoya sıvı debisi gelmeye başlar. Bu yüzden, $h_{mak}-h_{min}$ olarak tanımlanan diferansiyel aralık. ölü zaman etkileriyle daha geniş olur. Isıl sistemlerde de benzer durum ortaya çıkar. Bir odanın ısıtılmasında radyatörler kullanılıyorsa, radyatörlerin ısıl kapasitesi yüzünden ölü zaman etkisi kendini gösterir.

Bir ikili kontrol organı Şekil 6.7 deki gibi gösterilir.

Şekil 6.7 İkili kontrol organının blok diyagramı.

İkili kontrol sistemleri basit ve ucuz olmalarına karşılık lineer olmayan ve incelenmeleri kolayca yapılamayan sistemlerdir.

6.3 SÜREKLİ KONTROL ORGANI

Sürekli kontrol organı devamlı olarak devrededir, devamlı olarak hatayı küçültücü kumanda sağlar.

Şekil 6.8 Kontrol organının blok diyagramı.

Endüstride bulunan kontrol organlarının tipleri, kontrol organının $G_k(s)$ transfer fonksiyonu ile ortaya çıkar. Endüstriyel kontrol organlarında çeşitli kombinezonlarla çeşitli kontrol tiplerini oluşturan 3 etki vardır. Bu etkiler :

1. Orantı etki
2. İntegral etki
3. Diferansiyel etki

dir. Bu etkilerin davranış özellikleri aşağıda açıklanmıştır.

Orantı etki (P etki)

Orantı etkide kontrol organının girişi olan hata bir sabit sayı ile çarpılarak çıkış elde edilir, Şekil 6.9.

Şekil 6.9 Orantı etkinin blok diyagramı.

O halde,

$$m(t) = K\,e(t)$$

veya

$$M(s) = K\,E(s)$$

dir. Orantı etkinin transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K$$

dır. K değerine orantı sayısı ve kazanç denir.

İntegral etki (I etki)

İntegral etki giriş değeri olan hatanın integralini alır. Böylece

$$m(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

veya

$$M(s) = \frac{1}{\tau_i s} E(s)$$

dinamik eleman bağıntısı sağlanır. Burada τ_i integral zaman adını taşır, zaman boyutundadır. Blok diyagramı Şekil 6.10 da gösterilmiştir.

Şekil 6.10 İntegral etkinin blok diyagramı.

İntegral etkinin transfer fonksiyonu,

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1}{\tau_i s}$$

dir. İntegral etkiye bazen «reset» etki adı da verilir, ve bu deyim daha çok proses kontrol sistemlerinde kullanılır.

Diferansiyel etki (D etki)

Diferansiyel etki hatanın türevini alır. Böylece

$$m(t) = \tau_d \frac{d\,e(t)}{dt}$$

veya

$$M(s) = \tau_d\, s\, E(s)$$

olur. τ_d diferansiyel zamandır ve zaman boyutundadır. Transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \tau_d\, s$$

dir. Blok diyagramı Şekil 6.11 de gösterilmiştir.

Şekil 6.11 Diferansiyel etkinin blok diyagramı.

Proses kontrol sistemlerinde diferansiyel etkiye bazen «rate» etki adı verilir.

Diferansiyel etki hatanın türevini almaktadır ve sabit kalan hata üzerinde etkinliği yoktur. Hata girişi sabit ise diferansiyel etkinin sağlayacağı kumanda sıfır kumandadır. Bu yüzden, kontrol organlarında diferansiyel etki tek başına kullanılmaz. Diferansiyel etki, değişmekte olan hata üzerinde etkilidir; hata daha değişmeye başlıyorken derhal harekete geçer. Bu nedenle, diferansiyel etki bir «önceden seziş» olarak kabul edilir.

Endüstriyel kontrol organı tipleri, P etki, I etki ve D etkinin uygun bir şekilde bir araya getirilmesiyle oluşmaktadır.

6.4 Endüstriyel kontrol organı tipleri

Kontrol organı tipi, kontrol edilen bütün sisteme adını verir. Kontrol organının tipi, örnek olarak, orantı ise kontrol edilen sisteme «orantı kontrollu sistem» denir.

Orantı tipi (P tipi) kontrol organı

Kontrol etki tek başına kullanılarak P tipi kontrol organı elde edilir.

$$m(t) = K\,e(t)$$

$$M(s) = K\,E(s)$$

Transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K \tag{6.1}$$

dır. Blok diyagramı Şekil 6.12 de verilmiştir.

Şekil 6.12 P kontrol organı.

P kontrol normal olarak kararlı bir çalışma oluşturur. Daima bir daimi rejim hatası (offset) mevcuddur. K kazancı artırılarak bu hata küçültülebilir. Fakat K çok büyürse sistem davranışı kararsız olabilir.

P kontrol organının hatada birim basamak değişmesi olduğu zaman nasıl bir kumanda hazırladığı, cevabının ne olduğu, Şekil 6.13 de gösterilmiştir.

Şekil 6.13 P kontrol organının basamak cevabı.

İntegral tipi (I tipi) kontrol organı

Bazı hallerde I etki tek başına kullanılarak I tipi kontrol organı elde edilir.

$$m(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t)\,dt$$

$$M(s) = \frac{1}{\tau_i s} E(s)$$

Transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1}{\tau_i s} \tag{6.2}$$

dir. Blok diyagramı Şekil 6.14 de verilmiştir.

Şekil 6.14 I Kontrol organı.

I kontrol sistemdeki hatayı sıfır yapar. Fakat, I kontrol yavaş bir kontrol sağlar. Yavaş olmasının nedeni sisteme 90° derece faz gecikmesi getirmesidir.

I kontrol organının birim basamak girişe cevabı Şekil 6.15 de gösterilmiştir.

Şekil 6.15 I kontrol organının basamak cevabı.

Orantı + İntegral tipi (PI tipi) kontrol organı.

PI tipi kontrol organının cevabı

$$m(t)=K\,e(t)+\frac{K}{\tau_i}\int_0^t e(t)\,dt$$

veya

$$M(s)=K\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)E(s)$$

şeklindedir. Transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)}=K\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right) \qquad (6.3)$$

olur. Burada, K orantı kazancı τ_i ise integral zamandır. Transfer fonksiyonundan anlaşılacağı üzere K kazancının ayarlanması integral kısmıda etkiler. PI kontrol organının blok diyagramı Şekil 6.16 verilmiştir.

Şekil 6.16 PI kontrol organı.

PI kontrol, P ve I kontrolu birleştirir. Sistemde daimi rejim hatası sıfırdır.

PI kontrol organının birim basamak girişe cevabı Şekil 6.17 de gösterilmiştir.

Şekil 6.17 PI kontrol organının basamak cevabı.

Orantı + Diferansiyel tipi (PD tipi) kontrol organı.

PD kontrol organının cevabı,

$$m(t) = K\,e(t) + K\,\tau_d \frac{d\,e(t)}{dt}$$

veya

$$M(s) = K(1+\tau_d s)E(s)$$

şeklindedir. Transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K(1+\tau_d s) \qquad (6.4)$$

olur. Burada, K orantı kazancı, τ_d ise diferansiyel zamandır. Kontrol organı üzerinde K kazancının ayarlanmasından, diferansiyel kısım da etkilenmektedir. Blok diyagramı Şekil 6.18 de verilmiştir.

Şekil 6.18 PD kontrol organı.

PD kontrol, D etkiden dolayı hızlı bir çalışma sağlar. D etki sisteme 90° faz avansı getirir. Ancak sistemde sıfır yapılamayan bir daimi rejim hatası mevcuddur.

PD kontrol organının birim basamak girişe cevabı Şekil 6.19 da gösterilmiştir.

Şekil 6.19 PD kontrol organının basamak cevabı.

Orantı + İntegral + Diferansiyel tipi (PID tipi) kontrol organı

P, I ve D etkilerin bir araya gelmesiyle oluşur. Herbir etkinin davranış özelliklerine sahiptir.

$$m(t) = K\,e(t) + \frac{K}{\tau_i}\int_0^t e(t)\,dt + K\,\tau_d\,\frac{d\,e(t)}{dt}$$

veya

$$M(s) = K\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)E(s)$$

dir. Transfer fonksiyonu

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right) \qquad (6.5)$$

şeklindedir. Burada, K orantı kazancı, τ_i integral zaman ve τ_d diferansiyel zamandır. K nın ayarlanması kontrol organının integral ve diferansiyel kısımları üzerinde de etkili olur. Blok diyagramı Şekil 6.20 de verilmiştir.

Şekil 6.20 PID kontrol organı.

PID kontrol organı, hızlı ve daimi rejim hatası sıfır olan bir kontrol sağlar. K, τ_i ve τ_d katsayılarının uygun ayarlanması ile iyi bir kontrol sağlamak mümkün olabilir.

PID kontrol organının birim basamak cevabı Şekil 6.21 de gösterilmiştir.

Şekil 6.21 PID kontrol organının basamak cevabı.

7. KAPALI ÇEVRİMLİ KONTROL

7.1 GİRİŞ

Kapalı çevrimli otomatik kontrol sistemlerinin blok diyagramı Şekil 7.1 de gösterilmiştir.

Şekil 7.1 Kapalı çevrimli kontrol blok diyagramı.

Kontrol büyüklüğü C(s) yı rererans girişi R(s) ve bozucu giriş D(s) ye bağlayan temel bağıntı Bölüm 4.4 de etraflıca açıklanan şekilde elde edilir.

$$C(s)=\frac{G_k(s)G_s(s)}{1+G_k(s)G_s(s)H(s)}R(s)+\frac{N(s)}{1+G_k(s)G_s(s)H(s)}D(s) \quad (7.1)$$

Sistemdeki kontrol hatası E(s), $E(s)=R(s)-C(s)H(s)$ ifadesinden hesaplanır.

$$E(s)=\frac{1}{1+G_k(s)G_s(s)H(s)}R(s)-\frac{N(s)}{1+G_k(s)G_s(s)H(s)}D(s) \quad (7.2)$$

Gerek kontrol büyüklüğü C(s) ve gerek hata E(s), referans değeri R(s) ve bozucu büyüklük D(s) ile ilgili birer terime sahiptir. Proses kontrol sistemlerinde referans değeri uzun müddet sabit tutulur, ve elde olu-

nan ürünün kalitesinin bozucu etkenlere rağmen referans değerinde olması istenir. O halde proses kontrol sistemlerinde, kontrol sistemlerinin bozucu değişmelerine cevabı önem kazanır. Bozucuların bir kontrol sistemine etkimeleri çevrimin çeşitli yerlerinde olabilir. Bozucu etkinin yeri Şekil 7.1 dekine göre değişikse veya birden fazla bozucu etki değişik noktalardan kontrol çevrimine etkiyorsa Denklem (7.1) ve (7.2) biraz değişik olacaktır. Ancak, her defasında Bölüm 4.4 de verilen bilgilere dayanarak C(s) ve E(s) ifadeleri kolayca bulunur.

Proses kontrol sistemlerindeki çalışma şekline karşılık, servomekanizmalarda (yani konum, hız veya ivmenin kontrol edildiği kontrol sistemlerinde), genellikle, değiştirilen referans değeri R(s) için kontrol sistemlerinin cevabı araştırılır.

7.2 ÖLÇME ORGANININ ETKİSİ

Kapalı çevrimli çalışmada kontrol büyüklüğü C(s) ölçülmekte ve ölçme sonucu kontrol hatasını elde etmek üzere geri beslenmektedir. Ölçme işlemini yapan ve geri besleme kolu üzerinde bulunan ölçme organının da H(s) gibi bir transfer fonksiyonu vardır. $H(s)=1$ ise sisteme «birim dönüşlü» denir ve C(s) değeri aynen geri beslenir. Birim dönüşlü sistemler, hesap kolaylığı için kâğıt üzerinde ilk incelemeleri yaparken kullanılırlarsa da, uygulamada transfer fonksiyonu bire eşit olan bir ölçme organı yoktur. Ölçme organının transfer fonksiyonu kontrol çevriminin dinamik davranışını etkiler. Uygulamadaki ölçme organlarının transfer fonksiyonları en çok :

Zaman sabiti tipinde, $H(s)=1/(\tau s+1)$ veya titreşim elemanı tipinde,

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

olur. Kazanç herzaman 1 olmaz. K_δ gibi bir kazanca sahip ve zaman sabiti tipindeki bir ölçme organının transfer fonksiyonu $H(s)=K_\delta/(\tau s+1)$ şeklindedir.

Bir otomatik kontrol sisteminin dizayn edilmesinde ölçme organının seçilmesi büyük öneme sahiptir.

7.3 ZAMAN SABİTİ TİPİNDEKİ BİR SİSTEMİN ORANTI KONTROLU

Kontrol edilen sistem zaman sabiti tipinde olsun : $G_s(s)=\beta/(\tau s+1)$. Burada β kontrol edilen sisteme ait sabittir, kontrol edilen sistemin kazancı veya proses kazancı adını taşır.

Kontrol organı orantı (P) tipinde olsun. Kontrol organının transfer fonksiyonu $G_k(s)=K$ dır. Yani, sadece orantı kazancı K mevcuddur.

Kontrol organının çıkışı bir valfa kumanda edebilir. Valfın kazancı da β proses kazancı içinde mütalâa edilmiş olsun. Ayrıca, $N(s)=\alpha/(\tau s+1)$ şeklinde bir bozucu transfer fonksiyonu bulunsun. İlgili blok diyagramı Şekil 7.2 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi kapalı çevrim birim dönüşlüdür, $H(s)=1$ alınmıştır. Denklem (7.1) ile verilen kontrol edilen büyüklük $C(s)$ ifadesinde G_k , G_s , $N(s)$ ve $H(s)$ yerine Şekil 7.2 deki blok diyagramından karışıklıkları yazılırsa

Şekil 7.2 Zaman sabiti elemanının orantı kontrolu.

$$C(s)=\frac{K\dfrac{\beta}{\tau s+1}}{1+K\dfrac{\beta}{\tau s+1}}R(s)+\frac{\dfrac{\alpha}{\tau s+1}}{1+K\dfrac{\beta}{\tau s+1}}D(s)$$

elde olunur. Düzenleyerek,

$$C(s)=\frac{K\beta}{\tau s+1+K\beta}R(s)+\frac{\alpha}{\tau s+1+K\beta}D(s)$$

ve paydalar $(1+K\beta)$ parantezine alınarak

$$C(s)=\frac{K\beta}{(1+K\beta)\left(\frac{\tau}{1+K\beta}s+1\right)}R(s)+\frac{\alpha}{(1+K\beta)\left(\frac{\tau}{1+K\beta}s+1\right)}D(s)$$

olur.

$\tau_k=\tau/(1+K\beta)$: kontrollu sistemin zaman sabiti yazılarak

$$C(s)=\frac{K\beta}{(1+K\beta)(\tau_k s+1)}R(s)+\frac{\alpha}{(1+K\beta)(\tau_k s+1)}D(s) \qquad (7.3)$$

elde olunur. Bu bağıntının birinci terimi referans değişmeleri ile, ikinci terimi ise bozucu büyüklük değişmeleri ile ilgilidir. Lineer veya çalışma bölgesi civarında lineerleştirilmiş sistemlerle uğraşıldığından, (7.3) bağıntısının birinci ve ikinci terimlerinin kontrol büyüklüğü C(s) üzerindeki etkileri ayrı ayrı incelenebilir. Önce birinci terim alınsın.

$$C(s)=\frac{K\beta}{(1+K\beta)(\tau_k s+1)}R(s)$$

dir. Referans değerinde $r(t)=u(t)$ şeklinde bir birim basamak değişmesi olsun. $R(s)=L[u(t)]=1/s$ olacaktır. Yerine konarak

$$C(s)=\frac{K\beta}{1+K\beta}\;\frac{1}{(\tau_k s+1)s} \qquad (7.4)$$

olur. Burada $\tau_k=\tau/(1+K\beta)$ dır. (7.4) bağıntısının zaman domenindeki çözümü kolayca bulunur,

$$c(t)=\frac{K\beta}{1+K\beta}(1-e^{-t/\tau_k}) \qquad (7.5)$$

olarak elde edilir. Bu çözümün, açık çevrim olarak evvelce incelenmiş olan zaman sabiti elemanının basamak cevabına benzediği görülmektedir; şu farkla ki buradaki zaman sabiti τ_k, τ dan $(1+K\beta)$ defa küçüktür. $K\beta$'ya sayısal değerler vererek c(t) kontrol büyüklüğü eğrisi Şekil 7.3 de çizilmiştir.

Şekil 7.3 den görüldüğü gibi $K\beta$ arttıkça, β sabit olduğuna göre kontrol organı kazancı K arttıkça, kontrol edilen sistemin cevabı (kontrol büyüklüğü) c(t) hızlanmakta, daimi rejim hatası (offset) küçülmekte yani daha iyi bir kontrol sağlanmaktadır.

Şekil 7.3 Zaman sabiti elemanının orantı kontrolunda referans değerinde birim basamak girişe cevap.

Bozucu büyüklük değişmelerine cevap, Denklem (7.3) ün ikinci teriminden elde edilir;

$$C(s)=\frac{\alpha}{(1+K\beta)(\tau_k s+1)}D(s)$$

dir.

Bozucu büyüklükte $d(t)=u(t)$ şeklinde bir birim basamak değişmesi olsun. $D(s)=1/s$ dir. Yerine konarak,

kinci

$$C(s)=\frac{\alpha}{1+K\beta}\,\frac{1}{(\tau_k s+1)s} \tag{7.6}$$

elde olunur. (7.6) bağıntısının zaman domenindeki çözümü

$$c(t)=\frac{\alpha}{1+K\beta}(1-e^{-t/\tau_k}) \tag{7.7}$$

dir. Burada kontrollu sistemin zaman sabiti yine $\tau_k=\tau/(1+K\beta)$ dır. Denklem (7.7) nin, $K\beta$ değiştirilerek elde edilen eğrileri Şekil 7.4 de çizilmiştir.

$c(t)$ eğrilerinin başlangıç noktasındaki teğetleri hesaplanırsa

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{\alpha}{1+K\beta}\,\frac{1}{\tau_k}\,e^{-t/\tau_k}$$

τ_k yerine değeri yazılarak

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{\alpha}{1+K\beta}\,\frac{1+K\beta}{\tau}\,e^{-t/\tau_k} \tag{7.8}$$

Şekil 7.4 Zaman sabiti elemanının orantı kontrolunda bozucuda birim basamak girişe cevap.

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\alpha}{\tau} = \text{SABİT} \tag{7.9}$$

bulunur. Cevap eğrisinin, c(t) nin, başlangıç teğetinin eğimi orantı kazancı K dan bağımsızdır, sabittir. Bu durum Şekil 7.4 den de görülmektedir. Bozucu büyüklük değişmesi etkili olmaya başlayıncaya kadar kontrol organının harekete geçmeyeceği düşünülürse, orantı kazancı K nın başlangıçta bir etkisi olmayacağı anlaşılır.

Denklem (7.5) ve (7.7) nin ve Şekil 7.3 ve 7.4 ün incelemesinden, kontrol organının K kazancı büyüdükçe daimi rejim hatası (offset) e_{DR} nin küçüldüğü ve ayrıca sistem cevabının, c(t), yeni denge konumuna erişmesindeki zamanın kısaldığı, yani cevap hızının arttığı anlaşılmaktadır. O halde, e_{DR} hatasının istenildiği kadar küçültülmesi ve paralel olarak cevap hızının artırılması için K kazancının kontrol organının imkân verdiği en büyük değere ayarlanması gerektiği düşünülebilir. Gerçekten, ilgili denklemlere bakıldığında, K sonsuz yapılsa bile herhangi bir titreşim temayülü görülmemektedir. Ancak, gerçek kontrol sistemlerinde, kontrol valflarında, kullanılan cihazlarda ve bağlantılarda, yapılan incelemede dikkate alınmayan çeşitli «gecikme» ler mevcud olabilir ve çok büyük seçilen bir orantı kazancı sonuçta titreşime ve kararsız çalışmaya sebebiyet verebi-

lir. Bu bakımdan uygun K nın seçilmesi çok dikkat ister. Bugün kontrol mühendisliğinin en önemli problemlerinden biri kontrol organının uygun (optimum) şekilde ayarlanabilmesidir.

Zaman sabiti elemanının orantı kontroluna örnek olarak Şekil 7.5 deki sıvı seviyesinin orantı kontrolu verilebilir.

Şekil 7.5 Sıvı seviyesinin orantı kontrolu.

7.4 ZAMAN SABİTİ TİPİNDEKİ BİR SİSTEMİN İNTEGRAL KONTROLU

Kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 7.6 da verildiği gibi olan bir kontrol sistemi gözönüne alınsın. Şekil 7.6 nın Şekil 7.2 den farkı, kontrol organı transfer fonksiyonunun $G_k(s)=1/(\tau_i s)$ oluşudur. Böylece, integral zamanı τ_i olan integral kontrol sağlanmaktadır.

Şekil 7.6 Zaman sabiti elemanının integral kontrolu.

Kontrol büyüklüğü C(s) için evvelce elde edilen Denklem (7.1) den

$$C(s)=\frac{\frac{1}{\tau_1 s}\,\frac{\beta}{\tau s+1}}{1+\frac{1}{\tau_1 s}\,\frac{\beta}{\tau s+1}\,1}\,R(s)+\frac{\frac{\alpha}{\tau s+1}}{1+\frac{1}{\tau_1 s}\,\frac{\beta}{\tau s+1}\,1}\,D(s)$$

ve düzenleyerek

$$C(s)=\frac{\beta}{\tau_1 s(\tau s+1)+\beta}\,R(s)+\frac{\alpha(\tau_1 s)}{\tau_1 s(\tau s+1)+\beta}\,D(s)$$

$$C(s)=\frac{\beta}{\beta\left(\frac{\tau_1\tau}{\beta}s^2+\frac{\tau_1}{\beta}s+1\right)}\,R(s)+\frac{\alpha\tau_1}{\beta}\,\frac{s}{\frac{\tau_1\tau}{\beta}s^2+\frac{\tau_1}{\beta}s+1}\,D(s) \quad (7.10)$$

Sadece bozucu etkide değişme olduğu dikkate alınsın ve bozucuda $D(s)=1/s$ şeklinde birim basamak değişmesi olsun. O halde,

$$C(s)=\frac{\alpha\tau_1}{\beta}\,\frac{s}{\frac{\tau_1\tau}{\beta}s^2+\frac{\tau_1}{\beta}s+1}\,\frac{1}{s}$$

$$C(s)=\frac{\alpha\tau_1}{\beta}\,\frac{1}{\frac{\tau_1\tau}{\beta}s^2+\frac{\tau_1}{\beta}s+1} \quad (7.11)$$

olur. Burada

$$\omega_n=\sqrt{\frac{\beta}{\tau_1\tau}}$$

$$\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_1}{\beta\tau}}$$

yazılarak

$$C(s)=\frac{\alpha\tau_1}{\beta}\,\frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1} \quad (7.12)$$

veya

$$C(s)=\frac{\alpha\tau_1}{\beta}\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (7.13)$$

elde olunur.

Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$c(t)=\frac{\alpha\tau_i}{\beta}\;\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{Sin}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t \tag{7.14}$$

çözümü elde olunur. Kontrol büyüklüğü eğrisinin şekli üzerinde söndürme oranı ζ nın etkili olduğu açıktır. Diğer önemli husus, zaman büyürken $c(t)$ ifadesinde üstel terimin sıfıra gitmesidir. Böylece, bozucu büyüklük etkisiyle denge konumundan ayrılan sistem cevabı tekrar eski konumuna döner. Diğer bir deyişle daimi rejim hatası (offset) sıfırdır. İntegral kontrol daimi rejim hatasını sıfır yapar. Denklem (7.14) ile verilen $c(t)$ eğrisi $\zeta=1$ için ve $\zeta<1$ için Şekil 7.7 de gösterilmiştir. Uygunluk bakımından $c(t)$ yerine $c(t)/\alpha$ çizilmiştir. $\zeta=1$ veya $\tau_i=4\beta\tau$ için (7.13) ifadesi

$$C(s)=\frac{\alpha\tau_i}{\beta}\;\frac{-\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \tag{7.15}$$

şeklini alır. Buradan ters dönüşümle

$$c(t)=\frac{\alpha\tau_i}{\beta}\;\frac{\beta}{\tau_i\tau}\,t\,e^{-\sqrt{\beta/(4\beta\tau)}\,t}$$

Şekil 7.7 Zaman sabiti elemanının integral kontrolunda bozucuda birim basamak girişe cevap.

$$c(t) = \alpha \frac{t}{\tau} e^{-t/2\tau} \tag{7.16}$$

olarak bulunur. t büyürken üstel terimin sıfıra yaklaşması t nin sonsuza gitmesinden çok daha hızlıdır. Sonunda c(t) veya $c(t)/\alpha$ sıfıra erişir, yani $e_{DR}=0$ olur. Bu gidiş, Şekil 7.7 den de görülmektedir. Şekil 7.7 den, ayrıca, integral zaman τ_i nin küçültülmesinin, söndürme oranı ζ yı küçülttüğü ve böylece daha titreşimli bir sistem çıkış değeri elde edildiği belirlenmektedir.

Uygulamada integral etkinin nasıl sağlanabileceğine bir örnek olarak, Şekil 7.5 deki sıvı seviyesi kontrolunda giren sıvı debisini ayarlayan hidrolik valf bir hidrolik servomotor ile hareket ettirilebilecek şekilde değiştirilebilir. Bu durum Şekil 7.8 de gösterilmiştir. Güç silindiri içinde bulunan ve debi ayar valfının açılıp - kısılmasını sağlayan pistonun hareketi, servovalf hareketinin integralini alacak şekildedir.

Şekil 7.8 İntegral etkili (hidrolik servomotorlu) kumanda.

7.5 ZAMAN SABİTİ TİPİNDEKİ BİR SİSTEMİN PI KONTROLU

PI tipi kontrol organını haiz kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 7.9 da gösterilmiştir. Kontrol organının transfer fonksiyonu

$$G_k(s) = K\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right) = \frac{K(\tau_i s+1)}{\tau_i s} \tag{7.17}$$

şeklindedir.

Denklem (7.1) den yararlanmak suretiyle, evvelce yapıldığı şekilde C(s) ifadesi elde edilir. Sadece bozucu büyüklük değişmeleri dikkate alınsın. Bu durumda,

$$C(s) = \frac{\dfrac{\alpha}{\tau s+1}}{1+\dfrac{K\beta(\tau_i s+1)}{\tau_i s(\tau s+1)}} D(s)$$

$$C(s) = \frac{\alpha\tau_i s}{\tau_i s(\tau s+1)+K\beta(\tau_i s+1)} D(s)$$

$$C(s) = \frac{\alpha\tau_i}{K\beta} \cdot \frac{s}{\dfrac{\tau_i\tau}{K\beta}s^2+\tau_i\left(\dfrac{1+K\beta}{K\beta}\right)s+1} D(s) \tag{7.18}$$

olur. Burada

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K\beta}{\tau_i\tau}}$$

$$\zeta = \frac{1+K\beta}{2}\sqrt{\frac{\tau_i}{K\beta\tau}} \tag{7.19}$$

Şekil 7.9 Zaman sabiti elemanının PI kontrolu.

yazılabilir. Görülürki sistemin çıkış değerinin (kontrol büyüklüğünün) davranışı sadece integral kontrollu sisteminkine benzemektedir [Denklem (7.11)]. Ancak, doğal frekans ω_n , $\sqrt{K}$ çarpanı kadar ve söndürme oranı ζ ise $(1+K\beta)/\sqrt{K}$ çarpanı kadar farklıdır.

PI kontrol tipi uygulamada yaygın şekilde kullanılır. Bunun nedeni, PI kontrol organının P kontrol organına oranla çok pahalı olmaması ve integral etkinin kontrol sistemindeki hatayı ortadan kaldırmasıdır.

7.6 OTOMATİK KONTROL SİSTEMLERİNİN ÇALIŞMA TÜRLERİ

Otomatik Kontrol Sistemleri genellikle kapalı çevrim yapısında olup «negatif geri besleme» ilkesine göre çalışırlar. Bir diğer deyişle, kontrol, çıkış değişmelerinin ters yönünde değişmelidir. (Çıkış artıyorsa, kumanda azaltılmalı, çıkış azalıyorsa, kumanda artırılmalıdır). Belirli bir sistemin kontrolu için önce kontrol sisteminin hangi amaçla tasarlanıp kurulacağı belirlenmelidir. Otomatik Kontrol Sistemlerinin çalışma biçimleri kontrol amaçlarına göre sınıflandırılır.

Regülatör çevrimi

Bir sistemin çıkışlarını, bozucu büyüklüklerin sistem parametrelerindeki değişmelerin etkilerine rağmen **sabit değerler** etrafında tutmak üzere tasarlanan ve kurulan otomatik kontrol çevrimi, «regülatör çevrimi», olarak anılır. Sistem çıkışı için istenen sabit değerler genellikle sistemin önceden belirlenmiş «nominal» çalışma değerleridir.

Regülatör çevrimlerinden beklenenler, öncelik sırasına göre şöylece sıralanabilir :

— Eğer sistem kararsız ise, sistemi istenen nominal değerler etrafında kararlı hale getirmek.

— Sistemi bozucu büyüklüklerin ve parametrelerin değişmelerine daha az duyarlı hale getirmek.

— Sistemin dinamik davranışını kontrol amaçlarına uygun olarak değiştirmek, sistem davranışını hızlandırmak.

— Sistemin statik kesinliğini artırmak.

— Yukarıdaki özeliklerin doğrudan bir sonucu olarak, sistemin genelde verimini ve performansını artırmak.

Regülatör çevrimlerinde kontrol ve kumanda, yalnızca sistem çıkışının istenen nominal değere göre «sapması» kullanılarak oluşturulur. Regülatör çevriminin fonksiyonel diyagramı Şekil 7.10 da, Blok diyagramı da Şekil 7.11 de gösterilmiştir.

Şekil 7.10 Regülatör çevriminin fonksiyonel diyagramı.

Şekil 7.11 Regülatör çevriminin blok diyagramı.

Regülatör çevrimi Otomatik Kontrol çevrimlerinin en yaygın biçimde kullanılan türüdür. Fiziksel sistemlerde yukarıda sıralanan amaçları gerçekleştirmek için kullanıldığı gibi, doğada da bir çok regülatör türünden kontrol çevrimine rastlanır. İnsan vücudu bu örneklerin en duyarlı ve

en güzel örneklerini verir. Vücut ısısını dış sıcaklık değişmelerine, mekanik güç üretimine rağmen sabit tutan ısı regülatör sistemi, kandaki şekeri, yine çeşitli enerji tüketen faaliyetlere, alınan besinlerin şeker yüklerine rağmen sabit tutan şeker regülatör sistemi, gözyaşının çevre sıcaklığının büyük değişmelerine (−30 °C, +40 °C) rağmen akışkanlığını koruyan sistem gibi birçok vücut sistemi regülatör çevrimine göre çalışırlar. Kararlı bir denge durumu gösteren birçok doğal olay bir regülatör çevrimi içerir.

Servomekanizma Çevrimi

Kontrol çevrimi, bir sistemin çıkışını, belirli bir değişim aralığı içinde çeşitli değerler alabilen bir referans (ayar) değeri etrafında tutmak için tasarlanmış ise, bu kontrol çevrimine «Servomekanizma Çevrimi» denir. Servomekanizma çevrimi, adını, özellikle konum kontrolu için gerçekleştirilen kontrol mekanizmalarından almıştır. Ancak, diğer fiziksel büyüklüklerin değişken referans değerlerine göre kontrolunu amaçlayan çevrimler de bu adla anılmaktadır. Çıkışın geri beslenmesi ile oluşturulan kapalı kontrol çevriminin iki girişi bulunmaktadır. Bunlar, referans değişmeleri girişi ile bozucu değişmeleri girişidir. Servomekanizma çevriminin blok diyagramı Şekil 7.1 deki kapalı çevrimli kontrol yapısına uygun olarak Şekil 7.12 de tekrarlanmıştır.

Şekil 7.12 Servomekanizma çevrimi.

Servomekanizma çevriminin iki ana bölümünden oluştuğu söylenebilir :

— Sistemi, referans girişi etrafında kararlı kılan, dinamik davranışını, kesinliğini belirleyen ve sistemin bozucuların etkilerine duyarlılığını azaltan «regülatör çevrimi» ile

— Sistemin referans girişinin değişmelerini, seçilen kontrol teknolojisine uygun fiziksel büyüklük değişmelerine çeviren ve referans değişmeleri ile çıkış arasındaki kazancı belirleyen «açık» kumanda çevrimi.

Bir servomekanizma çevriminden, regülatör çevriminin özeliklerine ek olarak, sistem çıkışının, referans girişindeki değişmeleri istenen oranda, hızda ve kesinlikte izleyebilmesi, bu sırada sistemin kararlılığını yitirmemesi istenir.

Servomekanizma çevrimi de uygulamada en çok rastlanan kontrol çevrimi türlerindendir. Güç yükseltme gerektiren kumanda tertibatlarının büyük çoğunluğu servomekanizma çevrimine göre çalışır.

İzleyici Çevrimi

«İzleyici» türünde çalışan kontrol çevrimleri genellikle servomekanizma yapısındadır. Ancak, kontrol çevrimi, sistem çıkışının referans girişinin zaman içindeki sürekli değişimlerini (yörüngesini) belirli bir kesinlikle izleyebilmesi için tasarlanır. Bu amacın gerçekleştirilebilmesi için, referans girişinin değişim hızının hatta ivme değişimlerinin de belirlenerek sisteme hız referansı, ivme referansı niteliğinde girilmesi gerekir. Bu durumda izlenmek istenen yörünge için konum kontrol çevrimi, hız kontrol çevrimi, ivme kontrol çevrimi oluşturulur. Servomekanizma yapısındaki bu genellikle iç içe çevrimlere ek olarak sistemin, bozucu büyüklüklerin değişmelerine duyarlılığını azaltmak amacı ile gereken yerlerde regülatör tü-

Şekil 7.13 İzleyici çevrimi.

ründe geri beslemeler de yapılabilir. İzleyici kontrol sistemleri şekil çizicilerde, yörünge izleyici sistemlerde, radar kontrolunda, füze hedef izleme, fırlatma sistemlerinde ve nihayet güdümlü silah sistemlerinde kullanılırlar. Çok yaygın bir diğer uygulama alanı da yörünge izleyici robotlardır. İzleyici çevriminin blok diyagramı Şekil 7.13 te gösterilmiştir.

7.7 KONTROL SİSTEMLERİNDE SÜREKLİ REJİM HATASI

Geri beslemeli Kontrol Sistemlerinin açık çevrime göre sağladığı önemli yararlardan biri de sürekli rejim hatasını çok küçültmesi ve gerektiğinde sıfır yapabilmesidir. Uygulamada Kontrol Sistemlerinin basamak, rampa ve parabolik girişlerden ötürü sürekli rejim hatasının bilinmesi gereklidir. Ayrıca bu girişlere bağlı olarak ortaya çıkan sürekli rejim hatası bir sistemin herhangi bir girişi takip etme kabiliyetini gösterir. Kontrol sisteminin tipine bağlı olarak basamağa cevapta sürekli rejim hatası yok iken rampa da olabilir. Genellikle sürekli rejim hatası için açık çevrim transfer fonksiyonuna bakılır.

Birim geri beslemeli bir kapalı çevrimde

$$G(s)=\frac{K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\ldots}{s^n(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots}$$

olsun bu transfer fonksiyonu ile belirtilen sistem, integrasyon sayısına bağlı olarak bir tip numarası ile belirtilir.

$n=0$	için	Tip 0
$n=1$	»	Tip 1
$n=2$	»	Tip 2

Tip 3 fiziksel olarak gerçekleştirilemez; bir sistemde integrasyon sayısı artınca sürekli rejim hatasını küçültmek mümkündür. Ancak kararlılığında bozulduğu unutulmamalıdır.

Kapalı çevrimli çalışmada

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

tir. Bölüm 2 de görülmüş olan son değer teoremi uygulanırsa

$$e_{SR}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} s\,E(s)=\lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

tir.

Konum hatası, konum hatası katsayısı :

Konum hatası birim basamak girişe cevaptaki sürekli rejim hatası olarak tanımlanır.

$$e_{SR}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}\;\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}$$

ve statik konum hatası katsayıs

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)$$

olur ve buna göre

$$e_{SR}=\frac{1}{1+K_p}$$

dır. Burada

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\ldots}{s^n(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots}$$

olduğundan

Tip 0 için $K_p=K$

Tip 1 ve 2 için $K_p=\infty$

bulunur.

Şu halde birim basamak girişi halinde

Tip 0 için $e_{SR}=1/(1+K_p)=1/(1+K)$

Tip 1 ve Tip 2 için $e_{SR}=0$

dir. Görülüyor ki bir integrasyon yoksa basamağa cevapta sürekli rejim hatası vardır. Diğer taraftan K arttıkca ($K\nearrow$) sürekli rejim hatası ($e_{SR}\searrow$) azalır.

Eğer e=0 gerekli ise Tip 1 e geçmelidir.

Hız hatası, hız hata katsayısı K_v :

Kontrol sisteminin birim rampaya cevabında:

$$e_{SR}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)}\;\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s[1+G(s)]}$$

ve burada

$$K_v=\lim_{s\to 0}\;s(1+G(s))=\lim_{s\to 0}\;s\,G(s)$$

olarak tanımlanır.

$$K_v=\lim_{s\to 0}\frac{s\,K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\ldots}{s^n(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots}$$

olmak üzere

$$e_{SR}=\frac{1}{K_v}$$

dir.

Görülüyor ki

Tip 0 için $K_v=0$

Tip 1 için $K_v=K$

Tip 2 için $K_v=\infty$

dur. Böylece

Tip 0 için $e_{SR}=\frac{1}{K}=\infty$

Tip 1 için $e_{SR}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{K}$

Tip 2 için $e_{SR}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{\infty}=0$

dir. Görülüyor ki

Tip 0 rampa girişi takip edemez

Tip 1 rampayı sınırlı bir hata ile takip eder

Tip 2 rampayı hatasız takip eder

İvme hatası, parabolik hata katsayısı :

Referans giriş için

$$r(t)=t^2/2$$

alınırsa

$$e_{SR}=\lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+G(s)}\,\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2[1+G(s)]}$$

dır. Burada

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2G(s)$$

olmak üzere

$$e_{SR}=\frac{1}{K_a}$$

bulunur.

Tip 0 için $\quad K_a=\lim_{s\to 0}\dfrac{s^2K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\ldots}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots}=0$

Tip 1 için $\quad K_a=\lim_{s\to 0}\dfrac{s^2K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\ldots}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots}=0$

Tip 2 için $\quad K_a=\lim_{s\to 0}\dfrac{s^2K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)\ldots}{s^2(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\ldots}=K$

değerlerini aldığından

Tip 0 ve 1 için $\quad e_{SR}=\infty$

Tip 2 için $\quad e_{SR}=\dfrac{1}{K}$

bulunur.

Basamak, rampa ve parabolik, referans girişlerinde tiplere bağlı olarak sürekli rejim hataları aşağıdaki cetvelde gösterilmiştir.

ÖZET

Tip	basamak $r(t)=1, R(s)=\frac{1}{s}$	rampa $r(t)=1, R(s)=\frac{1}{s^2}$	parabol $r(t)=\frac{1}{2}t^2, R(s)=\frac{1}{s^3}$
0	$e_{SR}=\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	$e_{SR}=0$	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	$e_{SR}=0$	0	$\frac{1}{K_a}$

8. KONTROL ORGANININ AYARI

Uygulamada, kullanılan kontrol organlarının iyi sonuç verecek şekilde (optimum) ayarlanması önemli bir kontrol problemidir. Kontrol organının tipine bağlı olarak, orantı kazancı K nın, integral zaman τ_i nin ve diferansiyel zaman τ_d nin optimum ayarı için deneysel ve hesaba dayanan metodlar geliştirilmiştir.

8.1 KONTROL ORGANININ DENEYSEL AYARI

Kapalı çevrimli kontrol sisteminin referans değerinde basamak fonksiyonu şeklinde bir uyarı sağlandığı zaman, sistem cevabının (kontrol büyüklüğünün) yeni daimi rejim değerine en kısa zamanda ve kararlı bir şekilde erişmesini sağlayan kontrol organı ayarı optimum ayar kabul edilir. Bu amaçla seçilen bir ölçüt (kriter), kontrol büyüklüğü c(t) eğrisinin ikinci aşma genliği g_2 nin, birinci aşma genliği g_1 in dörtte biri olmasıdır: $g_2/g_1=1/4$, Şekil 8.1. 1/4 genlik oranı ölçütünün matematik bir dayanağı

Şekil 8.1 1/4 iniş oranına sahip sistem cevap eğrisi.

olmamasına rağmen hızlı cevap ve çabuk sönümleme sağladığı deneysel olarak saptanmıştır. Ancak bu ölçüte göre bulunacak kontrol organı ayar değerlerinin tek olmadığı da bilinmektedir. Aşağıda bugün kullanılmakta olan deneysel metodların önemli birkaçına değinilecektir.

Sürekli titreşim metodu :

Deneysel metodlar arasında en tanınmış olanlardan biridir. Bu metod Ziegler ve Nichols isimli iki araştırıcı tarafından geliştirilmiştir. Bu metodun esası kapalı çevrimli kontrol sistemini sadece orantı kazancı ile deneye tâbi tutmaktır. İntegral zaman sonsuza ayarlanır ($\tau_i = \infty$), diferansiyel zaman sıfıra ayarlanır ($\tau_d = 0$), böylece kontrol organı üzerinde sadece orantı etki kalır. Referans değerinde bir basamak değişmesi sağlanır. K kazanç değeri değiştirilerek deney birkaç defa tekrarlanır. Sürekli titreşim yapan cevap eğrisi, c(t), veren K değerine K_{mak} denir, bu durumdaki titreşim peryoduna ise P_u denir, Şekil 8.2.

Şekil 8.2 Çeşitli cevap eğrileri.

Ziegler ve Nichols pek çok deney yaparak sonuçların korelasyonunu sağlamışlardır. Bu sonuçlara göre, muhtelif kontrol organı tiplerinde çoğunlukla 1/4 genlik oranı ölçütünü sağlayan uygun ayar değerlerini K_{mak} ve P_u ya bağlı olarak vermişlerdir.

Orantı (P) kontrol organı için :

$$K=0{,}5\,K_{mak} \tag{8.1}$$

Orantı + İntegral (PI) kontrol organı için:

$$K=0{,}45\,K_{mak}$$

$$\tau_i=P_u/1{,}2 \tag{8.2}$$

Orantı + Diferansiyel (PD) kontrol organı için :

$$K=0{,}6\,K_{mak}$$

$$\tau_d=P_u/8 \tag{8.3}$$

Orantı + İntegral + Diferansiyel (PID) kontrol organı için :

$$K=0{,}6\,K_{mak}$$

$$\tau_i=P_u/2$$

$$\tau_d=P_u/8 \tag{8.4}$$

PI kontrol organı için tavsiye edilen kazanç değeri K, sadece orantı kontrol (P kontrol) için tavsiye edilen değerden % 10 daha düşüktür. Buna neden, integral etkinin sisteme faz gecikmesi katarak sistemin kararlılığını azaltmasıdır. Buna karşılık I etki hatayı sıfır yapar.

Diferansiyel etki ise sisteme faz avansı getirir, sistemin kararlı hale gelmesine yardımcı olur. Bu bakımdan daha büyük orantı kazancına gidilebilmektedir. Fakat büyük nakil gecikmesi olan sistemlerde diferansiyel etkinin önemi çok azalır.

Sönümlü titreşim metodu :

Bazı proses kontrol sistemlerinde test maksadıyla sistemin devamlı titreşime maruz kalmasına müsaade edilmez. Bu bakımdan, Ziegler ve Nichols'un devamlı titreşim metodu kullanılamaz. Bu metodun Harriott tarafından düzeltilmiş şekli olan «sönümlü titreşim» metodu uygundur.

Sönümlü titreşim metodunda, yine sadece orantı kazancı ile işe başlanır. Orantı kazancı küçük bir değere ayarlanır, cevap eğrisinde 1/4 genlik oranı ile sönümleme elde edilinceye kadar kazanç artırılır. Bu andaki titreşim peryodu P ye bağlı olarak integral zaman ve diferansiyel zaman şöyle bulunur :

$$\tau_i = P/6$$

$$\tau_d = P/1{,}5 \qquad (8.5)$$

τ_i ve τ_d kontrol organı üzerinde yukarıda bulunan değerlere ayarlanarak, cevap eğrisinde 1/4 genlik oranı elde edilinceye kadar test ederek orantı kazancı yeniden saptanır.

Proses reaksiyon eğrisi metodu :

Ziegler ve Nichols tarafından teklif edilen ikinci bir metoddur. Bu metodun esası, açık çevrimli sistemin basamak değişmesine cevabını incelemektir. Kontrol çevrimi herhangi bir noktada, genellikle kontrol organı ile proses arasında, açılır. Kontrol organı elle ayar (manual) çalışma durumuna getirilir ve prosese basamak değişmesi uygulanır. Bu maksatla kontrol organının çıkışında bir basamak değişmesi sağlanır.

Örnek olarak: kontrol valfına beslenen hava basıncında basamak değişmesi uygulanır. Kontrol organı üzerinde kaydedilen proses çıkışı (kontrol büyüklüğü) eğrisi S—biçimli bir eğridir. Bu proses çıkış eğrisinin ayrı

Şekil 8.3 Proses reaksiyon eğrisi.
(N=maksimum eğim, L=zaman gecikmesi).

bir kaydedici vasıtasıyla kaydedilmesi faydalı olur. S—biçimli kontrol büyüklüğü eğrisi Şekil 8.3 de gösterilmiştir. Şekil 8.3 den bu eğrinin bir zaman gecikmesi artı bir zaman sabiti elemanı ile yaklaşıma alınabileceği görülmektedir. Kontrol organının optimum ayar değerleri, başlangıçtaki zaman gecikmesi L ve eğrinin maksimum eğimi N parametreleri vasıtasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır. Aşağıdaki ayar değerleri 1/4 genlik oranı ölçütünü sağlamaktadır.

Orantı (P) kontrol organı için :

$$K=1/L\,N \tag{8.6}$$

Orantı + integral (PI) kontrol organı için:

$$K=0{,}9/L\,N$$

$$\tau_i=L/0{,}3 \tag{8.7}$$

Orantı + integral + diferansiyel (PID) kontrol organı için:

$$K=1{,}2/L\,N$$

$$\tau_i=L/0{,}5$$

$$\tau_d=0{,}5\,L \tag{8.8}$$

Burada belirtilmesi yerinde olacaktır: 1/4 genlik oranı şartı orantı kontrol için tek çözüm verir, fakat diğer kontrol tipleri (PI, PD, PID) için tek çözüm vermeye yeterli değildir. Diğer deyişle, çok sayıda kontrol organı ayar değeri takımları 1/4 genlik oranı ölçütünü sağlar. Bu bakımdan ilâve şartlara gerek vardır. Örnek olarak, PI kontrol için 1/4 genlik oranı ölçütüne ilâve şart «cevap eğrisi altındaki kontrol alanının, yani cevap eğrisi ile referans değeri arasındaki alanın, minimum olması» şeklinde verilebilir. Bu alan «hatanın zamana göre integrali» veya kısaca «hatanın integrali»dir.

Yukarıda anlatılan ve uygulamada geniş bir şekilde kullanılan metodlar, sadece optimum kontrol organı ayarlarına yakın değerler verir. Farklı prosesler için farklı optimum ayar değerleri elde edilir. Tavsiye edilen değerler, yalnızca başlangıç değerleri olarak ele alınmalı ve daha uygun çalışma şartlarının bulunması için deneylere devam edilmelidir.

8.2 KONTROL ORGANININ AYARLANMASINDA ANALİTİK YOL

Kontrol organının tipi, prosesin dinamiği ve ölçme organının dinamiği belli ise kontrol organının tipine göre mevcut bulunan K, τ_i ve τ_d parametrelerinin optimum değerleri analitik olarak hesaplanabilir. Bu maksatla, bir optimizasyon ölçütü seçilir ve bu ölçütü minimum yapan kontrol organı parametreleri saptanır. Optimizasyon ölçütünün (buna çok defa performans indeksi de denir) sistemde bulunan hataya bağlı olarak seçilmesi uygun olmaktadır. Bu şekilde bir ölçüt «hatanın karesinin integrali» olabilir :

$$I=\int_0^\infty e^2(t)dt \tag{8.9}$$

Yapılacak iş (8.9) integral ifadesinin minimum olmasını sağlayan kontrol organı parametre değerlerini bulmaktır. Bunun için, bu parametrelere göre kısmî türevler alınıp sıfıra eşitlenir :

$$\frac{\partial I}{\partial K}=0\ ,\quad \frac{\partial I}{\partial \tau_i}=0\ ,\quad \frac{\partial I}{\partial \tau_d}=0 \tag{8.10}$$

ve K, τ_i ve τ_d için çözülür.

Hesaplar teknik yönden mümkündür, fakat işlemler fevkalâde karışıktır; basit haller için dahi sayısal elektronik hesap makinası çözümüne gerek vardır.

8.3 KONTROL ORGANININ AYAR DEĞERLERİNİN BULUNMASINDA SİMÜLASYON METODLARI

Deneysel metodlar bölümünde bahsi geçen «1/4 genlik oranı» ölçütünün bazı mahzurları vardır. Bunlardan biri, evvelce bahsedildiği gibi, bu kriterin iki ve üç etkili kontrol tiplerinde tek çözüm vermemesidir. Bundan başka, bu kriter cevap eğrisinde ikinci aşma genliğinin birinci aşma genliğine oranını esas almaktadır; halbuki, ikinci ve üçüncü aşma genliklerinin ve daha sonraki aşma genlik çiftlerinin oranları farklı olabilir. Bu bakımdan daha elverişli bir kriter seçilmesi faydalı olacaktır. Elverişli bir kriter olarak «sistemde mevcut hatanın toplam değerinin minimum yapılması» seçilebilir. Hatanın zaman ekseni boyunca sürekli bir şekilde toplamı alınarak minimum yapılacağından bu kritere kısaca «hata integrali ölçütü» de denir. Bu ölçütün faydası kontrol organının optimum ayar de-

ğerleri için tek çözüm vermesi ve tamamen kapalı çevrim cevabını esas almasıdır. Kullanılan belli başlı dört ölçüt aşağıda verilmiştir.

1. Hatanın karesinin integrali (ISE) ölçütü :

$$\min. I = \min. \int_0^\infty e^2(t)\,dt \tag{8.11}$$

2. Zaman ağırlıklı hatanın karesinin integrali (ITSE) ölçütü :

$$\min. I = \min. \int_0^\infty t\,e^2(t)\,dt \tag{8.12}$$

3. Hatanın mutlak değerinin integrali (IAE) ölçütü :

$$\min. I = \min. \int_0^\infty |e(t)|\,dt \tag{8.13}$$

4. Zaman ağırlıklı hatanın mutlak değerinin integrali (ITAE) ölçütü:

$$\min. I = \min. \int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt \tag{8.14}$$

Şüphesiz, bu 4 ölçütten birine göre bulunan optimum kontrol ayar değerleri, bir diğerine göre optimum olmayacaktır. ISE ölçütü büyük hata değerlerine daha büyük önem verirken, IAE ölçütü artı ve eksi hatalara eşit derecede ağırlık vermektedir; ITSE ve ITAE ölçütleri ise uzun bir zaman süresi mevcut bulunan hataları kuvvetle belirleyerek ortadan kaldırırlar. Kontrol mühendisi, kendi kontrol sistemi için en uygun ölçütün hangisi olduğunu seçme görevini de yüklenmektedir.

Hata integrali ölçütlerinden hangisi seçilirse seçilsin, önemli bir sorun problemin hangi yoldan çözüleceğidir. Mükemmel çözüm yolu olarak görünen analitik çözüm yolu fevkalâde zordur. Deneysel metodlar ise burada bahis konusu edilemez. Böylece, ortaya, son yıllarda elektronik hesap makinalarında sağlanan hızlı ve büyük gelişmeler vasıtasıyla, simulasyon metodları çıkar.

Analog Simulasyon

Kontrol çevriminin analog simulasyon devresini kurmak ve kontrol organına ait parametrelerin optimum değerlerini elde etmek mümkündür. Ne var ki, kontrolu sağlanan proses dinamiği genellikle bir «zaman gecikmesi» ihtiva eder ve bunun analog makinada simulasyonu kolay değildir.

Digital Simulasyon

Kontrol çevrimine ait bir akış diyagramı hazırlanır ve programlama dillerinden biri vasıtasıyla (örnek olarak Fortran dili) digital simulasyon sağlanır. Uygun bir sayısal minimum bulma metodu ile seçilen hataya bağlı optimazyon ölçütünün, yani hata integralinin, minimumu aranır. Hata integralini minimum yapan kontrol organı ayar değerleri aranan optimum değerlerdir.

Şekil 8.4 Optimum ve optimum olmayan cevap eğrileri

(Optimizasyon ölçütü: min. $I = \min. \int_0^\infty |e(t)|dt$).

Şekil (8.4) PI tipi bir kontrol organının, optimizasyon ölçütüne göre bulunan optimum ayar değerleri ile elde edilen optimum cevap eğrisini ve optimum olmayan ayar değerleriyle elde edilen cevap eğrilerini göstermektedir. Optimum olmayan cevap eğrileri A ve B sonunda sönümlenip referans değerine yaklaşmakla birlikte, hayli titreşimli (B) veya çok yavaş (A) bir geçici rejim göstermektedirler. Şekil (8.4) optimum çalışmanın önemini açık bir şekilde ortaya koyar. Sistemin cevabı, optimum çalışmada, kısa sürede ve en az titreşim ile istenilen seviyeye ulaşır. Veya, bozucu büyüklük etkisi, sisteme fazla zarar vermeden yok edilir.

Digital simulasyonda, bazı kolaylıklar olmasına rağmen, sistemde mevcut diferansiyel denklemlerin çözümü, integral ve türev alma işlemleri nümerik metodlarla yapılır. Bu bakımdan, çözüm yaklaşıktır. Fakat, yeterli hassasiyette çözüm elde etmek daima mümkündür.

Hibrid Simulasyon

Hibrid elektronik makinalar analog ve digital kısımlardan oluşur; analog ve digital makinaların avantajlarına birarada sahiptir. Böylece, diferansiyel denklem çözümlerinin, integral ve türev alma işlemlerinin analog kısımda tam doğru olarak yapılması; zaman gecikmesi gibi elemanların digital kısımda simule edilmesi mümkün olur.

9. KONTROL SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

9.1 GİRİŞ

Kontrol sistemlerinin sağlaması gereken asgari üç özelliğin kararlılık, hızlı cevap ve hassasiyet olduğu evvelce belirtilmişti. Bu özellikler kontrol sistem cevabının geçici rejimi ile ilgilidir. Bir kontrol sisteminden başka özellikleri de sağlaması istenebilir; fakat bu üç özellik mutlaka yeterli şekilde sağlanmalıdır. Bir kontrol sisteminin kararlı bir geçiş rejimine sahip olmasının önemi açıktır.

Bir lineer kontrol sisteminin kararlılığı şöyle tanımlanır: Bir sistemin sınırlı her girişe cevabı sınırlı ise o sistem k a r a r l ı dır. Sisteme giriş, referans değerinden veya bozucu değerden olabilir.

Kararlılığın diğer bir tanımı şudur: Bir sistemin impuls cevabı zaman sonsuza giderken sıfıra yaklaşırsa, o sistem kararlıdır.

Kararlılık kavramı fiziksel olarak bir dik koni ile açıklanabilir, Şekil 9.1 . Tabanı üzerinde oturan koninin tepesine hafifce dokunulursa koni hemen yine başlangıçtaki denge konumuna gelir. Bu konuma ve davranışa kararlı denir. Yan yüzü üzerinde yatık duran koni hafifçe dokunulunca yan yüzü üzerinde yuvarlanır ve yine yan yüzü üzerinde kalır. Bu durum yansız (nötr) kararlılığı göstermektedir. Tepesi üzerinde, tabanı yukarı gelecek şekilde, tutulan koni ise bırakılınca yan kenarı üzerine düşer. Bu konuma ise kararsız denir.

Şekil 9.1 Bir dik koninin kararlılığı.

Bir dinamik sistemin kararlılığı da benzer şekilde tanımlanır. Sistemin bir girişe cevabı azalan, nötr veya artan şekilde olabilir. Eğer sistem cevabı biteviye artıyorsa veya büyüyen genlikli bir titreşim şeklinde ise kararsızlık bahis konusudur. Böyle kararsız çalışmada, sistemde doyma olmazsa veya mekanik olarak durdurulmazsa sistem sonunda tahrip olabilir; zira fiziksel bir sistem cevabının sonsuza kadar artması mümkün değildir. Sistem cevabı düzgün veya küçülen genlikli titreşim şeklinde azalıyorsa kararlılık vardır.

Lineer kontrol sistemlerinin kararlılığı, kapalı çevrim transfer fonksiyonunun pollerinden diğer deyişle karakteristik denklemin köklerinden incelenebilmektedir. Bir lineer sistemin kararlı olup olmadığı o sistemin kendisine ait bir özelliktir ve sistem giriş fonksiyonlarından (referans girişi dahil) bağımsızdır. Bir sistem giriş fonksiyonunun polleri sistemin kararlılığına etkimez, sadece daimi rejim cevabı üzerinde etkili olur.

Kapalı çevrimli lineer bir kontrol sisteminin basit blok diyagramı Şekil 9.2 de gösterilmiştir. Bu sisteme ait kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{9.1}$$

şeklindedir. (9.1) bağıntısı ile verilen transfer fonksiyonunu çoğu defa iki polinomun oranı şeklinde yazmak mümkündür.

Şekil 9.2 Kapalı çevrimli kontrol sistemi.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots\ldots b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} s + a_n} \tag{9.2}$$

burada a_i ve b_i sabitlerdir ve $n \geqslant m$ dir.

Karakteristik denklem $A(s)=0$ olup açık yazılırsa

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots\ldots a_{n-1}s+a_n=0 \tag{9.3}$$

dır ve bu denklemin r_1, r_2, r_3 .... r_n kökleri bulunur ve çarpanlar şeklinde yazılırsa

$$(s-r_1)\ (s-r_2)\ (s-r_3)\ \ldots\ (s-r_n)=0 \tag{9.4}$$

olur. Buradan ters Laplace dönüşümünden yararlanarak (Bölüm 2.12) sistemin geçici rejim cevabı elde edilebilir.

$$c(t)=A_1\,e^{r_1t}+A_2\,e^{r_2t}+\ldots\ldots+A_n\,e^{r_nt} \tag{9.5}$$

r_i köklerinin gerçel veya kompleks eşlenik oluşuna göre ve gerçel kısımların işaretine göre, yani r_i köklerinin Im—Re eksen takımındaki yerlerine göre $c(t)$ cevabının terimleri azalan üstel eğri, genliği küçülen sinusoid, artan üstel eğri, genliği büyüyen sinusoid v.s. şeklinde ortaya çıkar. Bunlarla ilgili geniş bilgi Bölüm 2 de verilmiş ve eğrilerin şekilleri Şekil 2.19 ve Şekil 2.20 de gösterilmiştir. Sistem cevabının kararlı olması için Denklem (9.5) ile verilen $c(t)$ cevabında titreşimsiz veya titreşimli zamanla artan bir terim bulunmamalıdır. O halde, kararlı çalışma için kapalı çevrim transfer fonksiyonunun polleri (karakteristik denklemin kökleri) tamamen Im—Re eksen takımının sol yarısında bulunmalıdır. Karakteristik denklemin bir kökü dahi sağ yarıda bulunsa sistem cevabı kararsız olur. Arzu edilen kararlı cevaptır. Bu kararlılığa «mutlak kararlılık» denir.

Im—Re eksen takımında sola doğru Im eksenden uzaklaştıkça kararlılık izafi olarak artar. Im eksen üzerinde bulunan, karakteristik denklem kökleri sınırlı kararlılığa (nötr kararlılığa) işaret eder, sistemde uygulamada ortaya çıkabilecek bazı etkenler nedeniyle kolayca kararsız bölgeye geçilebilir. Ayrıca Im eksen üzerindeki $\pm j\omega$ gibi bir imajiner eşlenik kök çifti sabit genlikli titreşim cevabı verir, ki bu duruma «kararlılık sınırında» denir, ve bu da arzu edilmez. O halde, kararlılığın izafi olarak kuvvetli olması istenir. Diğer bir deyişle, izafi kararlılık kararlı olan sistemin kararsızlıktan ne kadar uzak olduğunu belirtmektedir. Bunun için Im eksenin solunda $-\sigma$ mesafesinden çizilen düşey doğru izafi kararlılık ekseni olarak kabul edilir ve karakteristik denklemin köklerinin bu yeni eksenin solunda olması «izafi kararlılığı» garantiler, Şekil 9.3.

Karakteristik denklemin kökleri belli ise veya $A(s)$ polinomunun mertebesi kökleri kolayca bulmak için yeterli derecede küçük ise köklere göre sistemin kararlılığı incelenebilir. $A(s)$ polinomunun derecesi büyüdükçe

Şekil 9.3 Kompleks düzlemde kararlı ve kararsız bölgeler.

bu inceleme zorlaşır veya bazı halde köklerin bulunmasına gerek kalmadan kararlılığın incelenmesi istenebilir. Köklerin bulunmasına gerek kalmadan kararlılığın incelenebilmesi Routh kararlılık ölçütü (kriteri) ile yapılabilmektedir. Bu ölçüt ile karakteristik denklemin köklerini bulmaya gerek kalmadan, imajiner eksenin sağ tarafında kök olup olmadığı saptanmaktadır.

9.2 ROUTH KARARLILIK ÖLÇÜTÜ (KRİTERİ)

Routh kararlılık ölçütü bir polinom denklemin pozitif gerçel kısımlı kökleri bulunup bulunmadığını, denklemi çözmeden belirlemeye yarar. Özellikle yüksek dereceden polinom denklemler için köklerin bulunması zor ve sıkıcı işlemler gerektirdiğinden Routh ölçütü önemli kolaylık sağlamaktadır. Routh ölçütü bir otomatik kontrol sistemine uygulanırsa, o sistemin mutlak kararlılığı sistemin karakteristik denkleminin köklerinden incelenebilir. Kontrol sistemlerine uygulanması bakımından Routh ölçütünün zayıf tarafı sadece mutlak kararlılık hakkında bilgi vermesi, karakteristik denklemin kökleri belli olmadığı için, izafi kararlılık hakkında bir belirleme yapmamasıdır.

(9.3) bağıntısı ile verilmiş olan karakteristik denklem tekrar göz önüne alınsın.

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots\ldots a_{n-1}s+a_n=0 \qquad (9.3)$$

Aslında Routh ölçütü (9.3) bağıntısının çarpanlara ayrılmamasını öngörmekte ve bu amaçla kullanılmakta ise de bazı açıklamalar için (9.3) bağıntısı ile verilen polinom denklemin

$$(s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)\ldots(s-r_n)=0 \qquad (9.4)$$

şeklinde çarpanlara ayrıldığını kabul edelim. Burada r_i değerleri köklerdir. Çarpanlar birbirleriyle çarpılarak

$$s^n-(r_1+r_2+r_3+\ldots\ldots+r_n)s^{n-1}+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3+\ldots)s^{n-2}$$
$$-(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\ldots)s^{n-3}+\ldots\ldots+(-1)^n r_1r_2r_3\ldots r_n=0 \qquad (9.5)$$

elde edilir.

Denklem (9.5) in incelenmesi şu sonucu verir: Polinom denklemin (burada karakteristik denklemin) bütün köklerinin imajiner eksenin sol tarafında olması için bütün polinom katsayıları aynı işarette olmalıdır. Hepsi negatif ise herbiri -1 ile çarpılabilir. O halde bütün katsayılar pozitif olmalıdır. Ayrıca, kararlılık için, herbir katsayı sıfırdan farklı olmalıdır. Routh kriteri önce bu hususu vurgular: Kararlılık için karakteristik denklemin bütün katsayıları pozitif olmalı ve hiçbir katsayı sıfır olmamalıdır. Bu birinci şarttır. Bu şart sağlanmıyorsa, kontrol sistemi kararlı değildir. Bu şart sağlanıyorsa kontrol sistemi kararlıdır denilemez. Çünkü bu şart gerek şarttır, fakat kararlılık için yeterli değildir. Örnek olarak karakteristik denklem

$$(s+2)\ (s^2-s+4)=s^3+s^2+2s+8=0 \qquad (9.6)$$

şeklinde olsun. Burada gerek şart sağlanır: bütün katsayılar sıfırdan farklı ve pozitiftir. Ancak bu denklemin $s=1\pm1{,}936\,j$ de, yani imajiner eksenin sağ tarafında, bir çift eşlenik kompleks kökü vardır, sistem kararsızdır. Yeter şartın da belirlenmesi için aşağıdaki işlemler yapılır:

Karakteristik denklemin bütün katsayıları sıfırdan farklı ve pozitif olsun :

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}s+a_n=0 \qquad (9.3)$$

Aşağıdaki gibi bir katsayılar tablosu hazırlanır :

$$
\begin{array}{lcccccc}
s^n & : & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots\cdots \\
s^{n-1} & : & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots\cdots \\
s^{n-2} & : & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots\cdots \\
s^{n-3} & : & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots\cdots \\
s^{n-4} & : & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
s^2 & : & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & : & f_1 & & & & \\
s^0 & : & g_1 & & & & \\
 & & \uparrow & & & &
\end{array}
$$

Birinci sütun

Bu tablodaki b_1 sayıları şöyle hesaplanır :

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

sayıları da benzer şekilde hesaplanır :

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

ve böylece devam edilir. Katsayılar tablosunun 1. sütunu sistemin kararlılığının belirlenmesine yarar. Routh ölçütüne göre, karakteristik denklemin imajiner eksenin sağındaki köklerinin sayısı, katsayılar tablosunun 1. sütunundaki işaret değişmesinin sayısına eşittir. 1. sütundaki bütün sa-

yıların işaretleri aynı ise (a_0 ve a_1 pozitif olduğuna göre, pozitif ise) karakteristik denklemin bütün kökleri negatif gerçel kısımlıdır (kökler sol taraftadır) ve sistem kararlıdır. Aksi halde sistem kararsızdır.

Örnekler :

1. Karakteristik denklem 3. dereceden olsun.

$$a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0 \tag{9.7}$$

Bütün katsayılar pozitiftir. Katsayılar tablosu

$$\begin{array}{lcll} s^3 & : & a_0 & a_2 \\ s^2 & : & a_1 & a_3 \\ s & : & \dfrac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} & 0 \\ s^0 & : & a_3 & \end{array}$$

Bütün köklerin negatif gerçel kısımlı olması için şart

$$a_1a_2>a_0a_3$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2. Karakteristik denklem

$$(s-1+j\sqrt{7})(s-1-j\sqrt{7})(s+3)=s^3+s^2+2s+24=0 \tag{9.8}$$

şeklinde olsun. Bütün katsayılar mevcud ve pozitif olup gerek şart sağlanır. Routh tablosu teşkil edilsin :

$$\begin{array}{lcll} s^3 & : & 1 & 2 \\ s^2 & : & 1 & 24 \\ s^1 & : & -22 & 0 \\ s^0 & : & 24 & \end{array}$$

Birinci sütunda biri $+1$ den -22 ye geçerken diğeri -22 den $+24$ e geçerken iki defa işaret değişmektedir. O halde, Routh ölçütüne göre, imajiner eksenin sağ tarafında iki kök mevcuddur. Böylece, karakteristik denklemin bu örnek için verilen özel şeklinden dolayı daha baştan bilinen durum Routh ölçütü ile doğrulanmaktadır.

3. Karakteristik denklem

$$100\,s^3+80\,s^2+17\,s+6=0 \tag{9.9}$$

şeklinde olsun. Gerek şart mevcuttur. Routh tablosu teşkil edilirse :

s^3	:	100	17
s^2	:	80	6
s^1	:	760/80	0
s^0	:	6	

Birinci sütunda işaret değişmesi yoktur, o halde karakteristik denklemin imajiner eksenin sağında kökü yoktur, bütün kökler sol taraftadır ve sistem kararlıdır.

Özel haller :

Routh tablosunda herhangi bir satırdaki birinci sütun terimi sıfır olabilir. Eğer bu satırın diğer terimleri sıfırdan farklı ise, sıfır terimi çok küçük pozitif sayı olan ϵ ile değiştirilerek hesap yapılır. Örnek olarak karakteristik denklem

$$s^3+2s^2+s+2=0 \tag{9.10}$$

olsun. Gerek şart mevcuddur. Routh tablosu şöyle teşkil edilir :

s^3	:	1	1
s^2	:	2	2
s^1	:	$0\approx\epsilon$	
s^0	:	2	

Eğer, sıfır (ϵ) teriminin üstündeki ve altındaki sayıların işaretleri aynı ise, imajiner bir kök çifti var demektir.

Gerçekten, Denklem (9.10) un $s=\pm j$ de eşlenik bir çift kökü vardır. Eğer, sıfır (ϵ) teriminin üstündeki sayının işareti altındaki sayının işaretinden farklı ise bir işaret değişmesi var demektir. Örnek olarak

$$(s-1)^2(s+2)=s^3-3s+2=0 \tag{9.11}$$

karakteristik denklemi alınsın. Routh tablosu

s^2	:	1	-3
s^1	:	$0 \approx \epsilon$	2
s^0	:	$-3-2/\epsilon$	
		2	

olur. Birinci sütunda $+1$ den $-3-2/\epsilon$ na ve $-3-2/\epsilon$ dan $+2$ ye birer işaret değişmesinden toplam iki işaret değişmesi vardır. Böylece Routh ölçütü imajiner eksenin sağında iki adet kök bulunduğunu belirler ki, bilhassa çarpanlarına ayrılmış olan (9.11) denkleminden bu durum doğrulanmaktadır.

Eğer, Routh tablosunda hesaplanan bir satır sayılarının hepsi sıfır çıkarsa, bunun anlamı Im-Re eksen takımında eşit büyüklükte ters işaretli iki gerçel kök ve/veya iki eşlenik imajiner kök bulunduğudur. Bu durumda, tablonun diğer satır ve sütun sayılarını hesaplayabilmek için bir yardımcı polinom teşkil edilir. Bu yardımcı polinomun katsayıları son satırın (elemanları sıfır olan satırdan bir önceki satırın) katsayılarıdır. Elemanları sıfır çıkan satırdaki yeni katsayılar ise bu yardımcı polinomun türevi olan polinomun katsayılarından teşkil edilir. Burada bahsi geçen eşit büyüklükte ve ters işaretteki kökler ise bu yardımcı polinomun çözümünden elde edilebilir. Bu yardımcı polinom daima çift mertebelidir. Örnek olarak aşağıdaki karakteristik denklem alınsın :

$$s^6+3s^4+10s^3+16s^2+24s+16=0 \qquad (9.12)$$

Bu denkleme ait Routh tablosu :

s^3	:	1	10	24
s^4	:	3	16	16
s^3	:	1	4	0
s^2	:	1	4	0
s^1	:	0	0	
s^0	:			

Bu tablonun teşkilinde s^3 e ait satır terimleri sırasıyla 14/3 ve 56/3 olarak hesaplanmış, fakat basitlik için 14/3 ile bölünerek 1 ve 4 sayıları elde edilip tabloya yazılmıştır. Bir satır elemanlarının hepsinin aynı sabit

sayı ile bölünmesi Routh ölçütünü etkilemez ve kolaylık için bu bölme işlemi yapılabilir. s^2 ye ait satırda da hesaplanan katsayılar 4 ile bölünerek, 1 ve 4 sayıları bulunmuştur. Tablonun incelenmesinden s^1 e ait satırdaki elemanların hepsinin sıfır olduğu görülür. O halde burada yardımcı polinom

$$P(s)=s^2+4=0 \tag{9.13}$$

olur. Türevi alınarak

$$\frac{dP(s)}{ds}=2s+0=0 \tag{9.14}$$

buradan Routh tablosu yeniden teşkil edilerek

s^3	:	1	10	24
s^1	:	3	16	16
s^3	:	1	4	0
s^2	:	1	4	0
s^1	:	2	0	(dP (s)/ds nin katsayıları)
s^0	:	4	0	

elde edilir. Birinci sütunda işaret değişmesi yoktur, yani imajiner eksenin sağında kök yoktur. Ancak, yardımcı denklem olan Denklem (9.13) ün çözümü yapılırsa $s=\pm j2$ de bir çift imajiner eşlenik kök bulunduğu ortaya çıkar. Sistem kararsız değildir, fakat sistem cevabında imajiner eşlenik köklerden dolayı sabit genlikli titreşim vardır (Bölüm 2: Şekil 2.19) ve sisteme «kararlılık sınırındadır» denir.

9.3 ROUTH KARARLILIK ÖLÇÜTÜNÜN KONTROL SİSTEMLERİNİN İNCELENMESİNDE KULLANILMASI

Routh kararlılık ölçütü, izafi kararlılığın iyileştirilmesi veya kararsız sistemlerin kararlı duruma getirilmesi için yardımcı olmadığından lineer kontrol sistemlerinin incelenmesindeki kullanılışı sınırlıdır. Ancak, sistemde mevcut bir-iki parametrenin değiştirilmesinin kararlılık üzerindeki etkisi araştırılabilir. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

1. Şekil 9.4 de blok diyagramı verilen birim dönüşlü kontrol sisteminin kararlı çalışması için K kazancının uygun değerleri araştırılsın.

Şekil 9.4 Birim dönüşlü kontrol sistemi.

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^3+6s^2+11s+6)+K} \tag{9.15}$$

dır. Buradan sisteme ait karakteristik denklem

$$s^4+6s^3+11s^2+6s+K=0 \tag{9.16}$$

olur. Gerek şart için $K>0$ olmalıdır.

Routh tablosu teşkil edilsin :

s^4	:	1	11	K
s^3	:	6	6	0
s^2	:	10	K	0
s^1	:	$(60-6K)/10$	0	
s^0	:	K		

Birinci sütunda işaret değişmesi olmaması, yani sistemin kararlı olması, için

$$60-6K>0$$

veya

$$K<10$$

olmalıdır. O halde kararlı bir çalışma için

$$0<K<10$$

olmalıdır. Kazanç $K=10$ olursa, sistem sabit genlikli titreşim yapar; böyle olacağı tablodaki s^1 e ait satırın bütün terimlerinin $K=10$ için sıfır ol-

masından anlaşılmaktadır. Eğer, kazanç K=0 ise, karakteristik denklemin s=0 da bir kökü vardır. Sistem K=10 için kararlılık sınırındadır, K=0 için ise sınırlı kararlıdır; K nın sıfır ile 10 arasındaki bütün değerleri için kararlı, bunun dışındaki K değerleri için kararsızdır.

2. Şekil 9.5 de blok diyagramı çizilmiş bulunan üçüncü mertebeden servomekanizma gözönüne alınsın. Bu servomekanizma bir elektromekanik servomekanizma olup bir radar anteninin açısal konumuna kumanda ediyor olabilir.

Şekil 9.5 Elektromekanik servomekanizma.

Şekil 9.5 den yararlanmak suretiyle çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K K_m}{\tau_k \tau_m s^3 + (\tau_k + \tau_m) s^2 + s + K K_m} \tag{9.17}$$

olarak elde edilir. Karakteristik denklem

$$\tau_k \tau_m s^3 + (\tau_k + \tau_m) s^2 + s + K K_m = 0 \tag{9.18}$$

dır. Bu servomekanizmanın kararlı çalışması için gerek şart

$$\tau_k \tau_m > 0 \; ; \; (\tau_k + \tau_m) > 0 \; ; \; K K_m > 0$$

dır. Routh tablosu teşkil edilsin :

$$\begin{array}{lcll}
s^3 & : & \tau_k \tau_m & 1 \\
s^2 & : & (\tau_k + \tau_m) & K K_m \\
s^1 & : & \dfrac{(\tau_k + \tau_m) - \tau_k \tau_m K K_m}{\tau_k + \tau_m} & 0 \\
s^0 & : & K K_m &
\end{array}$$

O halde, kararlı çalışma için (τ_k ve τ_m zaman sabitleri pozitif kabul edilerek) :

$$(\tau_k+\tau_m)-\tau_k\tau_m K K_m>0$$

ve

$$K K_m>0$$

olmalıdır. K ve K_m genellikle pozitif büyüklüklerdir. O halde kararlılık için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır :

$$\frac{\tau_k\tau_m}{\tau_k+\tau_m} K_m< \frac{1}{K} \qquad (9.19)$$

(9.19) eşitsizlik ifadesinin grafik gösterilişi Şekil 9.6 da verilmiştir.

Şekil 9.6 Şekil 9.5 deki sistem için kararlılık sınırı.

Sistem parametrelerinden τ_m ve K_m sabit tutularak, kuvvetlendiricinin zaman sabiti τ_k artırılırsa kuvvetlendirici kazancı K nın, kararlı çalışmayı sağlamak için, küçülmesi gerektiği Şekil 9.6 dan kolayca görülmektedir. Bu problem sayısal değerlendirme ile de incelenebilir.

Eğer, $\tau_m=0{,}2$ san. , $\tau_k=0{,}1$ san. , $K_m=5$ ise karakteristik denklem

$$(0{,}2\,.\,0{,}1)s^3+(0{,}2+0{,}1)s^2+s+5K=0$$

veya

$$s^3+15s^2+50s+250\,K=0 \qquad (9.20)$$

olur.

Gerek şart icabı $K>0$ olmalıdır. Routh tablosu

s^3	:	1	50	
s^2	:	3	$50\,K$	← (5 ile bölündü)
s^1	:	$\dfrac{150-50K}{3}$	0	
s^0	:	$50\,K$		

O halde, kararlılık şartı

$$150-50\,K>0$$

veya

$$K<3$$

ve

$$K>0$$

dır. Yani

$$0<K<3 \tag{9.21}$$

olmalıdır. Bu durumda, Şekil 9.5 de verilen sistem «şartlı kararlıdır» denir. Zira K kazancı (9.21) eşitsizliğini sağladığı takdirde kararlılık sağlanır.

10. SİSTEMLERİN FREKANS CEVABI

10.1 GİRİŞ

Bu bölüme kadar dinamik davranışı analitik olarak bir diferansiyel denklemle gösterebilen sistemler incelenmiştir. Görüldüğü üzere düşük mertebedeki sistemlerin basamak, impuls, doğrusal veya parabolik değişme gibi girişlere cevabı ya doğrudan doğruya analiz metodlarını kullanarak veya Laplace dönüşümü yardımıyla bulunabilmektedir.

Sistemlerin incelenmesinde diğer bir pratik ve önemli yaklaşım sürekli rejimle ilgili olan frekans cevabı metodudur. Lineer bir sistemin girişine sabit genlikli bir sinüs değişmesi uygulanırsa sistemin cevabı, geçici rejimden sonra sürekli rejimde, aynı frekanslı bir sinüs değişmesidir. Ancak cevabın genliği ve giriş değişmesine göre faz farkı, frekansa bağlı olarak değişmektedir. Şekil 10.1 de lineer bir sistemin alçak ve yüksek frekansta cevabı görülmektedir.

Frekans cevabı metodunda, çıkıştaki sinüs değişmesinin genlik ve faz farkı zaman değişkeni yerine frekans değişkenine göre incelenir. Sistemlerin dinamik davranışını zaman domeni yerine frekans domeninde incelemeyi mümkün kılan bu metodun avantajı, frekansın çok küçük değer-

Şekil 10.1

lerden çok yüksek değerlere kadar değiştirilmesi durumunda, genlik ve faz farkının değişimini kolayca belirtmesi ve bu alanda geliştirilmiş analitik metodların ve grafik tekniklerin kontrol sistemlerinin analiz ve sentezinde kullanılabilmesidir.

Ayrıca, pek çok halde sistemlerin transfer fonksiyonunun analitik olarak elde edilmesi zordur veya sistem hakkında yeter bilgi yoksa imkansızdır. Böyle hallerde transfer fonksiyonunu belirlemek için kullanılan en elverişli metodlardan biri deneysel olarak bulunan frekans cevabından yararlanmakdır.

Lineer bir sistemin harmonik fonksiyon biçimindeki bir girişe cevabının bilinmesi, peryodik herhangi bir girişe cevabının da belirlenmesini sağlar. Bunun için, sistemin peryodik girişinin harmonik fonksiyonlardan oluşan lineer (toplama ve sabit bir katsayıyla çarpma) bir ifade ile gösterilmesi yeter. Bu durumda sistemin çıkışı da her bir harmonik girişe karşı gelen sistem cevap fonksiyonlarının lineer bir kombinezonu ile ifade edilebilir. (Lineer sistemlerde süperpozisyon ilkesi).

Herhangi bir biçimde, ancak sürekli ve peryodik bir giriş fonksiyonunun harmonik fonksiyonlarla tanımlanması, bu fonksiyonun Fourier serisine açılması ile olur. Şekil 10.2 deki gibi bir fonksiyon hem hızlı hem yavaş değişimleri içermektedir. Bu fonksiyonun Fourier serisi

Şekil 10.2

$$x(t)=X_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega_0 t+B_n \sin n\omega_0 t)$$

biçimindedir. Burada $\omega_0=2\pi/T$ asal harmoniğin açısal frekansı, $n\omega_0=2\pi n/T$, $n=1,2,\ldots$ n inci harmoniğin frekansı, A_n ve B_n, $n=1,2\ldots$ n

inci harmonik genlikleridir. X_0, $x(t)$ nin bir peryod, dolayısıyla da tüm zaman dilimi için ortalama değeridir. X_0, A_n, B_n aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$X_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

ortalama değer,

$$A_n=2\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt\right]$$

$A_n=x(t)\cos(2\pi nt/T)$ nin bir peryod ortalamasının iki katı.

$$B_n=2\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt\right]$$

$B_n=x(t)\sin(2\pi nt/T)$ nin bir peryod ortalamasının iki katı.

Fourier serisinin kullanılması daha kolay bir ifadesi

$$x(t)=X_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\ \sin(n\omega_0 t+\phi_n)$$

biçimindedir. Burada $C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, $n=1,2$ .... n inci harmoniğin genliğini ve $x(t)$ genliğine katkısını, $\phi_n=\mathrm{arctg}(A_n/B_n)$, $n=1,2$ ... de n inci harmoniğin $x(t)$ nin asal harmoniğine göre faz açısını gösterir. C_n , $n=1,2$ ... $x(t)$ nin $n\omega_0$ frekansına göre genlik spektrumunu, ϕ_n , $n=1,2$ .... de $x(t)$ nin yine frekansa göre faz açısı spektrumunu belirler.

Fourier serisinde yüksek hızlı harmonikler hızlı değişimleri, alçak frekanslı harmonikler yavaş değişimleri gösterirler. Harmoniklerin genlik spektrumundan yararlanılarak Fourier serisinde kaç terimin hesaba katılacağı, dolayısı ile de giriş fonksiyonunun inceleneceği frekans aralığı belirlenir. Bunun nasıl yapıldığı aşağıdaki örneklerde açıklanmıştır.

Örnek : Şekil 10.3 te gösterilen peryodik basamak fonksiyonunu inceleyelim.

Sekil 10.3

$$X_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} M\,dt+\int_{T/2}^{T} 0\,dt\right)=\frac{M}{2}$$

$$A(n)=2\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_0 t\,dt)\right)=\frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} M\cos n\omega_0 t\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{T/2}^{T} 0\cos n\omega t\,dt\right]=\frac{2}{T}M\int_0^{T/2}\cos n\omega t\,dt=0\left(\int_0^{T/2}\cos n\omega t\,dt=0\right)$$

$$B_n=2\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right)=\frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} M\sin n\omega t\,dt+0\right]$$

$$=\frac{2M}{T}\int_0^{T/2}\sin n\omega t\,dt=\frac{2M}{T}\int_0^{T/2}\sin(2\pi nt/T)\,dt=\frac{T}{2M}\left[-\frac{T}{2\pi n}\cos(2\pi nt/T)\right]_0^{T/2}$$

$$n=1,3,5,\ldots \text{ için}=\frac{2M}{n\pi}$$

$$n=2,4,6,\ldots \text{ için}=0$$

$$\text{Buna göre } C_n=\sqrt{A_n+B_n}=\frac{2M}{n\pi}\quad n=1,3,5,\ldots$$

$$\phi_n=0$$

bulunur.

Yukarıda bulunanlara göre Şekil 10.3 deki basamak değişiminin Fourier serisi biçimindeki ifadesi, $\omega_0=2\pi/T$ olmak üzere

$$x(t)=\frac{M}{2}+\frac{2M}{\pi}\left(\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\ldots\right)$$

olur.

Bu fonksiyonun genlik spektrumu $n\omega_0$ için $C_n=2M/(n\pi)$, $n=1,3,5,7,\ldots$, şeklindedir. Eğer $x(t)$ nin Fourier serisince %h hassasiyetle ifade edilmesi isteniyorsa $C_n=(h/100)\,M$ olacak şekilde n terim sayısı bulunur:

$C_n = (h/100)M = (2M)/n\pi$ den $n = 200/(h\pi)$ bulunur.

Örneğin % 1 hassasiyet için $h=1$, $n=(200/\pi)=63.6$ ise $n=63$ alınmalıdır. Bu incelemeye göre Şekil 10.3 teki gibi bir giriş fonksiyonunun incelenmesinde hesaba katılacak frekans aralığı ω_0'dan 63 ω_0'a kadardır.

Basamak değişmesi şeklindeki giriş fonksiyonu hem en hızlı (bir değerden diğerine ani sıçrama) hem de en yavaş (sabit değer) değişmeleri içermektedir. Bu bakımdan sistemlerin frekans cevabı incelenirken giriş fonksiyonu, gözlem zamanına göre peryodik ($T/2$=gözlem zamanı) alınarak yavaş değişmeler için $\omega_0 = (2\pi/T)$ frekansı ile hızlı değişmeler için yaklaşık $100\omega_0$ frekansı açısındaki harmoniler göz önünde tutulur. Logaritmik ölçekte $[\omega_0, 100\omega_0]$ aralığı iki «dekad»a karşı gelir. Bu nedenle sistemin girişi ve sistemin dinamik davranış özeliklerine göre sistemin frekans cevabı genellikle iki dekad ($\omega/\omega_0=1$ ile $\omega/\omega_0=100$) lık bir frekans aralığında incelenir.

Genel olarak frekans cevabı metodunun sağladığı yararlar şöyle özetlenebilir :

1. Giriş sinyalini elde etmek üzere geniş sınırlar içinde genlik ve frekansı değiştirmeyi mümkün kılan, sinyal jeneratörleri mevcuttur. Bu bakımdan, frekans cevabını sağlamak amacı ile gerekli deneyler kolaylıkla yapılabilir.

2. Deneysel olarak bulunan frekans cevabından, karmaşık sistemlerin bile, bilinmeyen transfer fonksiyonlarının iyi bir yaklaşıkla saptanması mümkün olmaktadır.

3. Frekans cevabı, sistemlerin analiz ve sentezini frekans domeninde yapmak üzere geliştirilmiş olan yöntemlerin kullanılmasını mümkün kılar.

4. Transfer fonksiyonu belli olan bir sistemin frekans cevabı kolayca elde edilebilir ve geliştirilmiş bulunan tekniklerin yardımı ile tasarımda kolaylık sağlayan diyagramlarla gösterilebilir.

10.2 SİSTEMLERİN FREKANS CEVABI

Transfer fonksiyonu $G(s)$ olan lineer bir sistemi göz önüne alalım. Bu sistemin girişine birim genlikli

$$x(t) = u(t)\sin\omega t \tag{10.1}$$

fonksiyonu uygulansın $\sin \omega t$ nin Laplace dönüşümü

$$X(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

olduğundan

$$Y(s)=G(s)\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

bulunur. Genelde $G(s)$ iki polinomun oranı olduğundan karakteristik denklemin kökleri

$s_1, s_2, \ldots, s_n, +j\omega, -j\omega$ dan ibaret ise

$$Y(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-s_n}+\frac{A}{s+j\omega}+\frac{B}{s-j\omega} \qquad (10.2)$$

dır ve s_n köklerinin reel kısmı negatif olmak şartı ile sistem kararlıdır. Denklem (10.2) den ters Laplace dönüşümü ile

$$y(t)=K_1 e^{s_1 t}+K_2 e^{s_2 t}+\ldots+K_n e^{s_n t}+A\,e^{-j\omega t}+B\,e^{+j\omega t} \qquad (10.3)$$

bulunur ve görüldüğü üzere

$$y(t)=y_{GR}+y_{SR}$$

dir. Diğer bir deyimle cevabın bir geçici rejim bileşeni, bir de sürekli rejim bileşeni vardır. Denklem (10.3) deki katsayıların hesaplanması ile ilgili yöntem göz önüne alınırsa

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\left|\frac{(s-s_i)G(s)\omega}{s^2+\omega^2}\right|_{s=s_i}+\left|\frac{G(s)\omega}{s+j\omega}\right|_{s=+j\omega} e^{+j\omega t}$$

$$+\left|\frac{G(s)\omega}{s-j\omega}\right|_{s=-j\omega} e^{-j\omega t} \qquad (10.4)$$

bulunur. Kararlı sistem için sürekli rejimde $t\to\infty$ olurken $s_1, s_2, \ldots s_n$ köklerinin reel kısımları negatif olduğundan

$$e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots e^{s_n t}$$

terimleri sıfıra yaklaşır, yani y_{GR} geçici rejim bileşeni ortadan kalkar, ve Denklem (10.4) den sürekli rejim için

$$y(t)=\left|\frac{G(s)\omega}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega} e^{j\omega t}+\left|\frac{G(s)\omega}{s-j\omega}\right|_{s=-j\omega} e^{j\omega t} \qquad (10.5)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $s=j\omega$ ve $s=-j\omega$ koyularak

$$y_{SR}=\frac{G(j\omega)}{2j}e^{+j\omega t}+\frac{G(j\omega)}{-2j}e^{-j\omega t} \tag{10.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan $G(j\omega)$ kompleks değişkenli bir fonksiyon olduğundan verilen bir referans için modülü $|G(j\omega)|$ ve argümanı φ cinsinden

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\varphi}$$

ve benzer olarak

$$G(-j\omega)=|G(j\omega)|e^{-j\varphi}$$

yazılabilir. Denklem (10.5) ve (10.6) yardımı ile

$$y_{SR}=|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}-e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j} \tag{10.7}$$

$$y_{SR}=|G(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi)$$

bulunur. Denklem (10.7) den görüldüğü üzere, sistemin çıkışı girişle aynı frekansta değişmektedir. Ayrıca çıkış büyüklüğünün genliği $G(j\omega)$ nın modülüne, faz farkı ise $G(j\omega)$ nın argümanına eşittir.

Buna göre sinüs girişli sistemlerde :

$\|G(j\omega)\|=\|Y(j\omega)/X(j\omega)\|=$	Çıkış sinüs eğrisinin genliğinin giriş sinüs eğrisinin genliğine oranını, diğer bir deyimle genlikler oranını.
$\sphericalangle G(j\omega)=\sphericalangle Y(j\omega)/X(j\omega)=$	Çıkış sinüs eğrisinin giriş sinüs eğrisine nazaran faz farkını vermektedir.

Kural : Transfer Fonksiyonu $G(s)$ olan bir sistemin frekans cevabını hesaplamak için $G(s)$ de $s\rightarrow j\omega$ (s yerine $j\omega$) konur ve elde edilen $G(j\omega)$ kompleks değişkenli fonksiyonun $|G(j\omega)|$ modülü veya büyüklüğü, genlikler oranını, $\sphericalangle G(j\omega)$ argümanı veya açısı faz farkını verir.

Frekans cevabı metodunun uygulanması oldukça basittir ve aşağıdaki dört adımdan oluşur:

1. Gözönüne alınan elemanın veya sistemin $G(s)$ transfer fonksiyonu elde edilir. Sürekli rejimde etkisi olmadığı için başlangıç şartları dikkate alınmaz.

2. G(s) Transfer fonksiyonunda s yerine jω konur ve böylece kompleks değişkenli G(jω) fonksiyonu elde edilir.

3. Belirli ω değerleri için G(jω) kompleks fonksiyonunun modülü veya büyüklüğü |G(jω)| genlikler oranını, argümanı veya açısı ∢G(jω) faz açısını verir. Kolaylık için giriş genliği birim alınır.

4. Elde edilen genlikler oranı ve faz açısı değerleri genellikle logaritmik koordinat sisteminde veya polar koordinat sisteminde tasarıma elverişli diyagramlarla gösterilir.

Geliştirilmiş bulunan tekniklerden ötürü frekans cevabını aşağıdaki türden diyagramlarla göstermek sistem tasarımında kolaylık sağlamaktadır.

1. Logaritmik diyagram veya Bode diyagramı
2. Polar diyagram veya Nyquist diyagramı
3. Modül-faz açısı veya Black diyagramı

10.3 LOGARİTMİK DİYAGRAM VEYA BODE DİYAGRAMI

Karmaşık sistemlerin transfer fonksiyonunun

$$G(s)=\frac{K(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)(\ldots)}{s^n(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\left(\dfrac{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}\right)} \tag{10.8}$$

tipinde olduğu belirtilmişti Frekans cevabı için $s \rightarrow j\omega$ koyularak

$$G(j\omega)=\frac{K(1+j\omega\tau_a)(1+j\omega\tau_b)(..)}{(j\omega)^n(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)} \tag{10.9}$$

bulunur. Denklem (10.9) dan hesaplanacak |G(jω)| genlikler oranını, ∢G(jω) faz açısını verir. Frekans cevabının logaritmik diyagramlarla gösterilmesinde, genlikler oranı |G(jω)|nın ve ∢G(jω) faz açısının değişmeleri, 10 tabanına göre logaritmik ölçekle ω frekansına bağlı olarak, iki ayrı diyagram halinde fakat alt alta çizilmektedir. Bu diyagramların ordinatlarında genlikler oranı için gene 10 tabanına göre logaritmik ölçek, faz açısı için ise lineer ölçek kullanılmaktadır. Logaritmik diyagramların en büyük avantajı Denklem (10.9) daki terimlerin her biri için frekans cevabının asimptotlar kullanılarak kolayca çizilebilmesidir. Buna ek olarak diğer taraftan G(jω) yı veren Denklem (10.9) da bulunan

K kazancı

$(1+j\omega\tau)^{+1}$ birinci mertebe

$(j\omega)^{-n}$ integrasyon

$$\frac{1}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2} \text{ ikinci mertebe}$$

terimleri ile ilgili kompleks sayıların çarpımı bahis konusu olduğunda modüllerin çarpımı, diyagramlarda da logaritmik ölçek kullanılmasından ötürü, toplama işlemine dönüşmektedir. Kompleks sayıların çarpımında açılar toplandığından faz açısı için kullanılan lineer ölçek bu işlemde yeterli olmaktadır.

10.4 BASİT SİSTEMLERİN FREKANS CEVABI

1. K kazancı : K gibi sabit bir kazanç değeri, frekanstan bağımsız olmasından ötürü, logaritmik diyagramda yatay bir doğrudur. Ayrıca K ile ilgili faz açısı da sıfırdır. Transfer fonksiyonunda K kazancının değiştirilmesi logaritmik diyagramda frekans cevabını kendisine paralel olarak aşağı yukarı kaydırır; açıya ise etkisi yoktur.

2. $G(s)=(1/s)$

s yerine $j\omega$ yazılarak

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}$$

Modül $G(j\omega)=|G(j\omega)|=1/\omega$

$$\log|G(j\omega)|=\log 1-\log\omega=0-\log\omega=-\log\omega$$

Genlikler oranı

$$\frac{Y_a}{X_a}=|G(j\omega)|$$

logaritmik diyagramda -1 eğimli bir doğru olmaktadır.

$$\text{Açı } G(j\omega)=\measuredangle G(j\omega)=\text{arctg}(-\infty)=-90^\circ$$

Çıkışın girişe göre faz açısı ω frekansından bağımsızdır ve $\varphi=-90^\circ$ dir.

Genlikler oranı ve faz açısı diyagramları Şekil 10.4 de alt alta çizilmiştir.

Şekil 10.4 $1/j\omega$ nın logaritmik diyagramları

3. $G(s)=s$

$G(j\omega)=j\omega$ ve buradan

$$|G(j\omega)|=\omega$$

$$\log|G(j\omega)|=\log\omega$$

ve

$$\measuredangle G(j\omega)=+90°$$

$G(j\omega)=j\omega$ nın logaritmik diyagramları Şekil 10.5 te gösterilmiştir.

Şekil 10.5 (jω) nın logaritmik diyagramları.

4. $G(s)=\dfrac{1}{\tau s+1}$

s yerine jω yazılarak

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

elde olunur.

Genlikler oranı :

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{|1+j\omega\tau|}$$

$$\log|G(j\omega)|=\log 1-\log|1+j\omega\tau|=0-\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\log |G(j\omega)| = -\log \sqrt{1+\omega^2\tau^2} \text{ buradan } |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

bulunur.

Alçak frekans asimtodu τ zaman sabiti belirli bir değere sahiptir. ω çok küçük ise (sıfıra yakınsa) $\omega^2\tau^2$ çok küçük olur ve 1 yanında ihmal edilir. Böylece

$$\log |G(j\omega)| \simeq -\log 1 = 0$$

doğrusu elde edilir ki bu alçak frekans asimptodudur. Logaritmik ölçekli eksen takımda $|G(j\omega)|$ nın sayısal değerleri kullanıldığından alçak frekans asimptodu

$$G(j\omega) = 1$$

doğrusudur.

Yüksek frekans asimptodu: ω frekansı çok büyük değer aldığında $\omega^2\ \tau^2$, 1 e göre büyük olur ve 1 ihmal edilir. Bu durumda

$\log |G(j\omega)| \simeq -\log(\omega\tau)$ doğrusu yüksek frekans asiptodunu verir.

$$\omega = (1/\tau) \text{ için } \log|G(j\omega)| = 0 \quad \text{veya} \quad |G(j\omega)| = 1$$

ve

$$\omega = (10/\tau) \text{ için } \log |G(j\omega)| = -1 \text{ veya } |G(j\omega)| = 0{,}1$$

dir. Böylece devam olunur. Yüksek frekans asimptodunun eğiminin -1 olduğu anlaşılmaktadır.

Alçak frekans asimptodu ile yüksek frekans asimptodu $\omega_k = 1/\tau$ frekans değerinde kesişir. $\omega_k = 1/\tau$ frekans değerine kesim frekansı denir ve ω_k ile gösterilir. Kontrol sistemlerinin dizaynı yapılırken, logaritmik diyagramlarla çalışılıyorsa, çok defa sadece asimpotların çizilmesi ile yetinilir. Zira gerçek eğri bu asimptotlara çok yakın seyreder. Maksimum hata kesim frekansında, $\omega_k = 1/\tau$ da, ortaya çıkar. Kesim frekansında

$$\omega_k\tau = 1 \quad |G| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_k^2\tau^2}} = 0{,}707$$

olduğundan bu frekansta hata: $1 - 0.707 = 0{,}293$ yani 30 % mertebesidir.

Genlikler oranı diyagramı Şekil 10.6 da gösterilmiştir.

Şekil 10.6 $\frac{1}{1+j\omega\tau}$ nun logaritmik diyagramları.

Faz açısının değişimine gelince :

$$\measuredangle G(j\omega) = -\measuredangle(1+j\omega\tau) = -\operatorname{arctg}\omega\tau$$

dur. ω frekansına değerler verilerek faz açısının değişim eğrisi elde edilir:

$\omega = 0$	için	$\measuredangle G(j\omega) = 0°$
$\omega_k = 1/\tau$	için	$\measuredangle G(j\omega) = -45°$
$\omega_k = 2/\tau$	için	$\measuredangle G(j\omega) = -63{,}5°$
$\omega_k = \infty$	için	$\measuredangle G(j\omega) = -90°$

Faz açısının çiziminde genlikler oranında olduğu gibi asimptotların kolaylığı yoktur. Ancak kesim frekansının 1/10 unda sıfır, 10 katında $-90°$ olmak üzere çizilecek bir doğru parçası hakiki açıdan $5°-6°$ ayrılmaktadır. ω_k daki $-45°$ lik faz açısı, faz eğrisinin büküm noktasıdır. Böylece faz eğrisini uygun bir mastarla veya yukarıdaki noktalar göz önünde tutularak Şekil 10.6 nın alt kısmındaki gibi çizmek mümkündür.

Faz açısının diyagramı da Şekil 10.6 da, genlikler oranı diyagramının altında gösterilmiştir. Genlikler oranı ve faz açısını birlikte görmek yararlı olmaktadır.

5. $G(s)=(\tau s+1)$

$$G(j\omega)=1+j\omega\tau$$

Genlikler oranı :

$$|G(j\omega)|=\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\log|G(j\omega)|=\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

Bir önceki örnek için yapılanlar tekrarlanırsa :

Alçak frekans asimptotu : $|G(j\omega)|=1$ doğrusu

Yüksek frekans asimptotu : $\log|G(j\omega)|=\log(\omega\tau)$

doğrusudur. $\omega_k=1/\tau$ için $\log|G(j\omega)|=0$ veya $|G(j\omega)|=1$

ve $\omega=10/\tau$ için $\log|G(j\omega)|=1$

veya $|G(j\omega)|=10$ olmaktadır. Yüksek frekans asimptodunun eğimi $+1$ dir.

Gerçek eğrinin kesim frekansı için değeri $\omega_k=1/\tau$ yazılarak hesaplanır. Buradan $|G(j\omega)|=\sqrt{1+\omega_k^2\tau^2}=\sqrt{2}=1{,}41$ bulunur.

Faz açısı :		$\measuredangle G(j\omega)=\mathrm{arctg}(\omega\tau)$
$\omega=0$	için	$\measuredangle G(j\omega)=0°$
$\omega_k=1/\tau$	için	$\measuredangle G(j\omega)=+45°$
$\omega=\rightarrow\infty$	için	$\measuredangle G(j\omega)=+90°$

Genlikler oranı ve faz açısı Şekil 10.7 de çizilmiştir.

Şekil 10.7 $1+j\omega\tau$ nun logaritmik diyagramları.

6. $$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Bu transfer fonksiyonu titreşim elemanını göstermektedir ve kontrol sistemlerinde sıkça rastlanır.

s yerine jω yazılıp düzenleyerek

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}=\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2+j2\zeta\omega/\omega_n}$$

elde olunur.

Genlikler oranı :

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta\omega/\omega_n]^2}}$$

$$\log|G(j\omega)|=-\log\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+[2\zeta\omega/\omega_n]^2}$$

Çok düşük frekanslarda $\omega/\omega_n \ll 1$ dir ve $\log|G(j\omega)|=-\log 1=0$ olur.

O halde düşük frekans asimptotu $\log G(j\omega)=0$ veya $|G(j\omega)|=1$ yatay doğrusudur.

Yüksek frekans asimptotu ise $\omega/\omega_n \gg 1$ için elde edilir:

$$[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 \cong [\omega/\omega_n]^4 \gg (2\zeta\omega/\omega_n)^2$$

olduğundan

$$\log|G(j\omega)|=-\log(\omega/\omega_n)^2=-2\log(\omega/\omega_n)$$

dir. Görülür ki, yatay eksen ω/ω_n ekseni olarak alınınca, yüksek frekans asimptotu eğimi -2 olan doğrudur. Yüksek frekans asimptotu, $\omega/\omega_n=1$ için $\log|G(j\omega)|=-2\log(1)=0$ dır. Yani, yüksek frekans asimptotu, alçak frekans asimptotunu $\omega/\omega_n=1$ de kesmektedir. ω/ω_n veya $\omega=\omega_n$ frekansına yine kesim frekansı denir. Asimptotların elde edilişi söndürme oranı ζ dan bağımsızdır. $\omega=\omega_n$ frekansının civarında genlikler oranı maksimum olur. Buna frekans tepeciği denir. Bu tepeciğin yüksekliğini belirleyen ζ nın küçük değerleri için tepecik yüksekliği artar. Burada, 4 ve 5 No.lu örneklerde olduğu gibi, eğriyi çizmeden asimptotlarla iş görmek her zaman doğru değildir; ζ a bağlı olarak asimptotlarla gerçek eğri $\omega=\omega_n$ civarında çok yaklaşır veya uzaklaşır. Genlikler oranının değişimi, çeşitli değerleri için Şekil 10.8 çizilmiştir.

Faz açısı

$$\measuredangle G(j\omega)=\measuredangle\frac{1}{1+(\omega/\omega_n)^2+j2\zeta\omega/\omega_n}=-\operatorname{arctg}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

dir. Faz açısı hem ω nın hem de ζ nın fonksiyonudur.

$\omega=0$	için	$\measuredangle G(j\omega)=0°$
$\omega=\omega_n$	için	$\measuredangle G(j\omega)=-90°$
$\omega\to\infty$	için	$\measuredangle G(j\omega)=-180°$

Faz açısı eğrisi $\measuredangle G(j\omega) = -90°$ de, $\omega = \omega_n$ için büküm noktasına sahiptir ve büküm noktasına göre simetriktir. Faz açısı da çeşitli değerleri için şekil 10.8 de gösterilmiştir.

7. $$G(s) = \frac{K}{s(\tau s+1)}$$

s yerine jω yazarak

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega\tau)}$$

Şekil 10.8 Titreşim elemanının logaritmik diyagramı.

$$\text{Mod } G(j\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{|j\omega|\,|1+j\omega\tau|} = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\log|G(j\omega)| = \log K - \log(j\omega) - \log|1+j\omega\tau|$$

$$\log G(j\omega) = \log K - \log\omega - \log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

Logaritma alınmakla transfer fonksiyonundaki herbir terimin etkisinin toplama şeklinde ortaya çıktığı görülmektedir. Logaritmik diyagram kullanılmasının evvelce de belirtildiği üzere, önemli bir özelliği budur. O halde, ele alınan örnek için $1/j$ nın ve $1/(1+j\omega\tau)$ nun logaritmik diyagramları çizilip toplanabilir ve $\log K$ değeri kadar ötelenir. Bu uygulama Şekil 10.9 da gösterilmiştir.

Şekil 10.9

Faz açısı ise: $\sphericalangle G(j\omega) = -\sphericalangle(j\omega) - \sphericalangle 1 + j\omega\tau$

dır. K kazancının faz açısı üzerinde etkisi yoktur.

Böylece $G(j\omega) = -90° - \text{arctg}\,\omega\tau$ dan ibarettir.

8. Logaritmik diyagramlarda çok kullanılan bir kazanç birimi de (dB) ile gösterilen «desibel»dir.

$$1\ \text{dB} = 20 \log |G|$$

ile tanımlanan dB birimi kullanıldığında, bu birim logaritmayı içerdiği için kazanç ekseni de faz açısı ekseni gibi lineer alınabilir. Bu diyagramlarda yalnızca frekans ekseni logaritmik olduğu için «yarı logaritmik diyagram» olarak adlandırılırlar. Bireysel kazanç eğrilerinin yine kazanç yönünde cebirsel toplamları yapılarak sistem kazanç eğrisi bulunur. Faz açısı eğrileri önceki bölümlerdeki gibidir.

Yarı logaritmik diyagramlarda, yukarıdaki tanıma göre

— $|G| = 1$ doğrusu 0 dB ekseni ile

— $|G| > 1$ olan kazançlar (yükseltme, amplifikasyon) **pozitif** dB değerleri ile, $|G| < 1$ olan kazançlar (düşürme) **negatif** dB değerleri ile gösterilirler.

— Logaritmik diyagramda -1 eğimli asimptotun yarı logaritmik diyagramda eğimi -20 dB/dekad (dekad: ω, 10ω), $+1$ eğimli asimptot için $+20$ dB/dekad, -2 eğimli asimptot için ise -40 dB/dekad olacaktır.

— Birinci mertebe sistemlerin kesim frekansındaki gerçek kazançları $|G| = 0{,}707$; $20 \log 0{,}707 = -3$ dB olacaktır.

Bu özelikler aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek :

$$G(s) = \frac{1000(s+1)}{s(s^2+10s+400)}$$

transfer fonksiyonunun yarı logaritmik kazanç ve faz diyagramlarını çizelim :

Verilen transfer fonksiyonu, daha önce incelenen transfer fonksiyonları cinsinden :

$$G(s)=\left(\frac{2,5}{s}\right)(s+1)\left(\frac{400}{s^2+10s+400}\right)=G_1G_2G_3$$

şeklinde yazılabilir.

G_1 için : $G_1(j\omega)=2,5\,\frac{1}{j\omega}$ $\quad \measuredangle G_1=-90°$ $\quad |G_1(j\omega)|=2,5\,\frac{1}{\omega}$

$$20\log|G_1(j\omega)|=20\log 2,5-20\log\omega$$

$\omega=1$ için $|G_1(j\omega)|=20\log 2,5\cong+8$ dB

$\omega=10$ için $|G_1(j\omega)|=8-20$ (dB)

asimptot eğimi: -20 dB/dekad

G_2 için: $G_2(s)=(\tau s+1)$; $\tau=1$ kesim frekansı $\omega_k=1/\tau=1$

$\omega_k=1$ için $|G_2(j\omega)|=+3$ dB ; $\measuredangle G_2=+45°$

$\omega\ll\omega_k$ için $|G_2(j\omega)|=0$ dB (asimptot) ; $\measuredangle G_2=0°$

$\omega_k\ll\omega$ için $|G_2(j\omega)|$ asimptot eğimi: $+20$ dB/dekad; $\measuredangle G_2=+90°$

G_3 için : $G_3(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, $\omega_n^2=400$; $\omega_n=20$; $2\zeta\omega_n=10$; $\zeta=0,25$

$\omega\ll\omega_n$ için $|G_3(j\omega)|=0$ dB (asimptot) ; $\measuredangle G_3=0°$

$\omega=\omega_n$ için $|G_3(j\omega)|=20\log(1/\sqrt{2\zeta})=20\log(1/\sqrt{0,5})=+3$ dB

$$\measuredangle G_3=-90°$$

$\omega_n\ll\omega$ için $|G_3(j\omega)|$ asimptot eğimi: -40 dB/dekad; $\measuredangle G_3=-180°$

Bu transfer fonksiyonlarının bireysel kazanç ve faz eğrileri ile toplam G(s) için kazanç ve faz eğrileri Şekil 10.10 da gösterilmiştir.

Şekil 10.10

10.5 POLAR DİYAGRAM (NYQUİST DİYAGRAMI)

Sistem transfer fonksiyonu G(s) de, s yerine jω yazılarak elde olunan G(jω) ya çoğu defa, sinusoidal girişle ilgili olduğu için, «sinusoidal transfer fonksiyonu» denir. Polar diyagram, sinusoidal transfer fonksiyonu G(jω) nın modülünün ve açısının, ω sıfırdan sonsuza değiştirilirken, Im-Re eksen takımı üzerinde gösterilmesi ile elde edilir. Diğer deyişle, polar diyagram $|G(j\omega)| \measuredangle G(j\omega)$ vektörünün ω sıfırdan sonsuza değişirken Im-Re eksen takımı üzerinde çizdiği geometrik yerdir. Polar di-

yagram çizilirken pozitif faz açıları, pozitif reel eksenden itibaren saat akrebine ters yönde ölçülür. Negatif faz açıları ise reel eksenden başlayarak saat akrebi yönünde alınır.

Örnekler :

1. $G(s)=1/s$ integral elemanın polar diyagramı :

s yerine $j\omega$ yazılarak

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\omega}\ ,\ \measuredangle G(j\omega)=-90^\circ$$

O halde:

$$G(j\omega)=\frac{1}{\omega}\measuredangle -90^\circ$$

Polar diyagram sadece negatif imajiner eksendir, Şekil 10.11.

Şekil 10.11 $1/j\omega$ nın polar diyagramı.

2. $G(s)=s$ diferansiyel elemanın polar diyagramı :

Benzer yolla

$$G(j\omega)=j\omega=\omega\measuredangle+90^\circ$$

vektörü elde olunur. Bu vektörün ucu $\omega=0$ için imajiner eksen üzerinde orijinden başlayıp $\omega=\infty$ için imajiner eksen üzerinde ∞ a, pozitif imajiner ekseni çizerek gider, Şekil 10.12.

Şekil 10.12 jω nın polar diyagramı.

3. $G(s)=\dfrac{1}{\tau s+1}$ in polar diyagramı :

s yerine jω yazılarak sinusoidal transfer fonksiyonu

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau}=\frac{1-j\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}=\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}-j\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

olarak elde olunur.

$$\text{Modül } G(j\omega)=|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\text{Açı } G(j\omega)=\measuredangle G(j\omega)=-\tan^{-1}\omega\tau$$

O halde :

$$G(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\measuredangle-\tan^{-1}\omega\tau$$

olur. $G(j\omega)$ vektörü ω ya değerler vererek hesaplanır:

$$G(j0)=1\measuredangle 0^\circ$$

$$G\left(j\ \frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\measuredangle-45^\circ=0{,}707\measuredangle-45^\circ$$

$$G(j\infty)=0\measuredangle-90^\circ$$

$G(j\omega)$ vektörünün ucu bir yarım daire çizer. Dairenin merkezi Re eksen üzerinde 0,5 noktasıdır ve yarıçap 0,5 e eşittir, Şekil 10.13.

Şekil 10.13 $\frac{1}{1+j\omega\tau}$ nun polar diyagramı.

4. $G(s)=(\tau s+1)$ in polar diyagramı :

s yerine $j\omega$ yazılarak

$$G(j\omega)=(1+j\omega\tau)=\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\measuredangle\tan^{-1}\omega\tau$$

elde olunur. Buradan

$$G(j0)=1\measuredangle 0^\circ$$

$$G\left(j\ \frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{2}\measuredangle 45^\circ$$

$$G(j\infty)=\infty\measuredangle +90^\circ$$

olur. Geometrik yer, Re eksen üzerinde (1, j0) noktasından başlayan ve imajiner eksene paralel olup yukarı doğru giden bir yarım doğrudur, Şekil 10.14.

Şekil 10.14 $1+j\omega\tau$ nun polar diyagramı.

5. $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ nin polar diyagramı :

s yerine $j\omega$ yazılsın.

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}\ ,\ (\zeta>0)$$

olur. Önce yapılanlara benzer olarak

$$G(j0)=1\measuredangle 0^\circ$$

$$G(j\infty)=0\measuredangle -180^\circ$$

Polar diyagram $\omega=0$ için $1\measuredangle 0^\circ$ dan başlar ve $\omega\to\infty$ için $0\measuredangle -180^\circ$ de son bulur. Polar diyagramın yüksek frekans eğrisi negatif Re eksene orijinde teğettir. Söndürme oranı $0<\zeta<1$ arasında seçilerek çizilen polar eğriler Şekil 10.15 de gösterilmiştir.

Şekil 10.15 $\dfrac{1}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$ nin polar diyagramı.

$$\omega=\omega_n \text{ için } G(j\omega_n)=\frac{1}{j2\zeta}=-j\ \frac{1}{2\zeta}$$

olur ve

$$G(j\omega_n)=\frac{1}{2\zeta}\measuredangle -90^\circ$$

dir. Böylece, $\omega=\omega_n$ için faz açısı -90° olup $G(j\omega)$ nın geometrik yerinin imajiner ekseni kestiği noktada frekans, doğal frekans ω_n dir.

Eğer, söndürme oranı ζ büyür ve 1 den hayli büyük değerler alırsa polar diyagram bir yarım daireye yaklaşır.

6. $G(s)=\dfrac{1}{s(\tau s+1)}$ in polar diyagramı :

s yerine $j\omega$ yazılarak

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau)}=-\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}-j\ \frac{1}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}$$

$$G(j0)=-\tau-j\infty=\infty\measuredangle -90^\circ$$

$$G(j\infty)=0-j0=0\measuredangle -180^\circ$$

G(jω) nın polar diyagramının genel görünüşü Şekil 10.16 da verilmiştir.

Şekil 10.16 $\frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau)}$ nin polar diyagramı.

7. $G(s)=e^{-Ls}$ nin polar diyagramı :

Bu transfer fonksiyonu «nakil gecikmesi» adını taşır. s yerine jω yazılarak

$$G(j\omega)=e^{j\omega L}=\cos\omega L-\sin\omega L$$

Modül $G(j\omega)=1$

Açı $G(j\omega)=\tan^{-1}(-\tan\omega L)=-\omega L$

Böylece, polar diyagram yarı çapı 1 olan ve ω artıkça üzerinde dönülen bir daire, diğer deyişle birim dairedir, Şekil 10.17.

Şekil 10.17 Nakil gecikmesinin polar diyagramı.

8. $G(s)=\dfrac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}$ in polar diyagramı :

s yerine jω yazılsın,

$$G(j\omega)=\frac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}$$

olur.

$$G(j0)=K\measuredangle 0^\circ$$

$$G(j\infty)=0\measuredangle -270^\circ$$

elde edilir. Polar diyagram Şekil 10.18 de gösterilmiştir.

Şekil 10.18 $\dfrac{K}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}$ ün polar diyagramı.

10.6 POLAR DİYAGRAMLARIN GENEL ŞEKİLLERİ VE SİSTEM TİPLERİ

G(s) transfer fonksiyonunda s yerine jω yazılmakla genel şekilde

$$G(j\omega)=\frac{K(1+j\omega\tau_a)(1+j\omega\tau_b)....}{(j\omega)^\alpha(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)...} \qquad (10.8)$$

elde edilmiş olsun. Paydanın derecesi payın derecesinden büyük kabul edilerek aşağıdaki sistem tipleri ayırt edilir :

1. $\alpha=0$ için tip 0 sistemler :

$\omega=0$ a tekabül eden polar diyagram başlangıç noktası sonludur ve pozitif reel eksen üzerindedir. $\omega=0$ için polar diyagrama teğet olan doğru reel eksene diktir. $\omega=\infty$ a tekabül eden nihai nokta orijindedir ve eğri eksenlerden birine teğettir.

2. $\alpha=1$ için tip 1 sistemler :

Paydadaki $j\omega$ terimi yüzünden, $0\leq\omega\leq\infty$ için $G(j\omega)$ nın faz açısına $-90°$ ilâve olur. $\omega=0$ için $G(j\omega)$ vektörünün şiddeti (büyüklüğü) sonsuzdur ve faz açısı $-90°$ dir. Düşük frekanslarda polar diyagram, negatif imajiner eksene paralel bir doğruya asimptottur. $\omega=\infty$ için $G(j\omega)$ vektörü sıfır olur ve eğri eksenlerden birine teğet olarak orijine gider.

3. $\alpha=2$ için tip 2 sistemler :

Paydada bulunan $(j\omega)^2$ terimi, $G(j\omega)$nın $0\leq\omega\leq\infty$ a göre değişmesinde faz açısına $-180°$ ilâve eder. $\omega=0$ için $G(j\omega)$ vektörünün büyüklüğü sonsuzdur ve faz açısı $-180°$ dir. Düşük frekanslarda, polar eğri negatif reel eksene paralel bir doğruya asimptottur. $\omega=\infty$ için, vektör sıfır olur ve eğri orijinde eksenlerden birine teğet olur.

Tip 0, tip 1 ve tip 2 sistemlerine ait polar eğrilerin genel şekilleri alçak frekanslar için Şekil 10.19 da gösterilmiştir. Bu şekil üzerinde $\alpha=3$ e tekabül eden tip 3 sistem de çizilmiş bulunmaktadır.

Şekil 10.19 Çeşitli sistem tiplerine ait polar diyagramlar.

Sistemlerin böyle tiplere ayrılması bir sınıflandırma şeklidir.

10.7 KAZANÇ PAYI VE FAZ PAYI

Kazanç payı ve faz payı bir otomatik kontrol sisteminin dizaynı için kullanılan ölçüt büyüklükleridir. Kazanç payı ve faz payı bir sistemin kararsız olma durumundan ne kadar uzak olduğunu belirtir. Diğer bir deyişle izafi kararlılık hakkında fikir verir.

Kazanç Payı :

Kazanç payı, faz açısının $-180°$ olduğu frekansdaki genlikler oranının tersidir. Yani faz açısını $-180°$ yapan ω daki $1/|G(j\omega)|$ değeridir.

Faz açısı $-180°$ olduğu zaman faz sınır frekansı ω_1 ise :

Kazanç payı $\times$ vektör uzunluğu $=K_p \times |G(j\omega_1)|=1$ dir.

Buradan kazanç payı,

$$K_p=\frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

olur. Kazanç payı polar diyagramda Şekil 10.20 de gösterilmiştir. Kazanç payı, kararlı bir sistemin kararsız olmadan kazancının ne kadar artırılabileceğini gösterir; veya kararsız bir sistemin kararlı olması için kazancının ne kadar küçültülmesi gerektiğini gösterir. Kararlı sistem için $K_p>1$ ve kararsız sistem için $K_p<1$ dir.

Şekil 10.20 Kazanç ve faz payı.

Polar diyagramda, $G(j\omega)$ eğrisinin negatif reel ekseni kestiği nokta, $(-1\ ,\ j0)$ noktasının ne kadar sağında ise izafi kararlılık o kadar kuvvetlidir. Şekil 10.20 den kazanç payının izafi kararlılığın bir ölçüsü olduğu görülmektedir. İyi bir dizayn ölçütü olarak kazanç payı 2 ilâ 10 arasında alınır.

Faz Payı :

Faz payı, polar diyagramda, negatif reel eksen ile $|G(j\omega)|=1$ olan $G(j\omega)$ vektörü arasındaki açı olarak tanımlanır. Bu açı Şekil 10.20 de γ ile gösterilmiştir. Faz payı, γ açısı, polar diyagramda $G(j\omega)$ eğrisinin $(-1, j0)$ kritik noktasına ne kadar yakın olduğunun diğer bir ölçüsüdür. Açık çevrim transfer fonksiyonunun modülü $|G(j\omega)|=1$ olduğu noktadaki frekansa kazanç sınır frekansı denir. Faz payı şu şekilde de tanımlanır: Faz payı γ , $G(j\omega)$ nın kazanç sınır frekansındaki açısı ϕ ile $180°$ nin toplamına eşittir:

$$\gamma=180°+\phi$$

Kararlı bir sistem için $\gamma>0$ dır; kararsız sistem için $\gamma<0$ dir, Şekil 10.20.

İyi bir dizayn ölçütü olarak faz payı $30°$ ilâ $60°$ arasında alınmaktadır.

Kazanç payı ve faz payı logaritmik diyagram üzerinde de gösterilebilir. Kazanç payının logaritması

$$\log K_p=-\log|G(j\omega_1)|$$

dir. Logaritmik diyagram üzerinde sisteme ait kazancın büyümesi $\log|G(j\omega)|$ eğrisini düşey olarak yukarı öteler, kazanç küçülürse eğri aşağı ötelenir. Burada, kazanç payı, $\measuredangle G(j\omega)=-180°$ iken $|G(j\omega)|$ nın bire eşit olması için sistem kazancının ne kadar büyütülmesi gerektiğini gösterir, Şekil 10.21. Şekil 10.21 üzerinde $|G(j\omega)|=1$ değerine karşılık gelen faz payı da gösterilmiştir.

Açık çevrim transfer fonksiyonu zaman sabiti elemanı tipindeki ve titreşim elemanı tipindeki sistemlerin (bunlar sırasıyla 1. mertebe ve 2. mertebe sistemler olarak da isimlendirilir), kazanç payı sonsuzdur; zira bunlara ait eğriler polar diyagramda negatif reel ekseni kesmezler. Bu nedenle, bu sistemler, teorik olarak, kararsız olamaz.

Şekil 10.21 Logaritmik diyagramlar üzerinde kazanç ve faz payı.

10.8 FREKANS CEVABININ DENEYSEL OLARAK ELDE EDİLMESİ

Bir otomatik kontrol sisteminin incelenebilmesi için önce sistemin matematik modelinin bilinmesi gerekir. Matematik modelin analitik olarak elde edilmesi çok defa çok zordur. Bu durumda yapılacak iş modelin deneysel olarak elde edilmeye çalışılmasıdır. Frekans cevabı metodunun önemli faydalarından biri de basit frekans cevabı ölçmeleri ile sistemin transfer fonksiyonunun deneysel olarak elde edilebilmesine imkân vermesidir.

Eğer yeter sayıda frekans için sistemin genlikler oranı ve faz açısı değerleri ölçülür ve logaritmik diyagram (Bode diyagramı) üzerine çizilirse, asimptotik yaklaşımlarla transfer fonksiyonunu saptamak mümkündür.

Frekans cevabı deneylerinin uygulanmasında sinusoidal sinyal üreticileri kullanılır. Eğer deneye tabi tutulan sistemin giriş ve çıkış büyüklüklerinin cinsi elektriksel ise iş kolaydır. Frekans cevabı deneyi ve gerekli ölçmeler kolayca yapılır.

Mekanik veya pnömatik sinyaller bahis konusu ise mekanik veya pnömatik sinyal üreticilere başvurulacaktır, fakat deneyler elektriksel sistemdeki kadar kolay olmaz.

Sistem transfer fonksiyonunun, deneysel frekans cevabından elde edilişi bir örnek üzerinde açıklanacaktır. Frekans cevabı deneylerinde yapılan ölçmeler sonucu logaritmik diyagramda Şekil 10.22 de gösterilen noktalar elde edilmiş olsun.

Genlikler oranı için asimptotlar çizilir ve açı eğrisi de elde edilir. Diyagramların görünüşünden incelenen sistemin sinusoidal transfer fonksiyonunun $G(j\omega)=1/(1+j\omega\tau)$ şeklinde olduğu anlaşılmaktadır. Asimptotların kesim noktası $\omega_k=1/\tau$ frekansını belirler. Buradan zaman sabiti

Şekil 10.22 Frekans cevabı deneyinin sonuçları.

$\tau=1/\omega_k$ olarak hesaplanır ve yerine yazılır. Sonra $j\omega$ yerine s yazılarak s domenindeki transfer fonksiyonu elde edilir :

$$G(s)=\frac{1}{\tau s+1}$$

Sistem karmaşık ise yöntem yine aynıdır. İkinci bir örnek olarak, deneyler sonucu elde olunan frekans cevabı ölçmeleri Şekil 10.23 deki genlikler oranı değerlerini vermiş olsun.

Şekil 10.23 Frekans cevabı deneyinin sonuçları.

Yine, deneysel noktaların oluşturduğu eğriye ait asimptotlar çizilir, ω_1 kesim frekansından zaman sabiti $\tau_1=1/\omega_1$ olan $G(j\omega)=1/(1+j\omega\tau_1)$ terimi bulunduğu anlaşılır. ω_2 den sonra asimptotun yatay oluşu +1 eğimli bir artış nedeniyle olmalıdır, ve o halde ω_2 kesim frekansından itibaren zaman sabiti $\tau_2=1/\omega_2$ olan $G(j\omega)=1+j\omega\tau_2$ terimi vardır. ω_3 kesim frekansında eğimin yine değişmesi $\tau_3=1/\omega_3$ olan bir $G(j\omega)=1/(1+j\omega\tau_3)$ terimine işaret eder.

O halde sinusoidal transfer fonksiyonu

$$G(s)=\frac{K(1+j\omega\tau_2)}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_3)}$$

şeklindedir. Laplace dönüşümü şartlarındaki açık çevrim transfer fonksiyonunu elde etmek için $j\omega$ yerine s koymak yeter. O halde transfer fonksiyonu

$$G(j\omega)=\frac{K(\tau_2 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_3 s+1)}$$

dir.

11. KÖKLERİN GEOMETRİK YERİ

11.1 GİRİŞ

Köklerin geometrik yeri metodu, bir kontrol sistemine ait açık çevrim kazancının veya diğer sistem parametrelerinin değiştirilmesinin kapalı çevrimli çalışmanın dinamik karakteristikleri üzerindeki etkilerini tespite yarayan grafik bir metoddur. Bilindiği gibi lineer bir sistemde karakteristik denklemin kökleri sistemin özdeğerleri (eigenvalue) dir. Bir polinom olan karakteristik denklemin köklerinden de sistemin geçici rejim davranışını elde etmek mümkündür. Köklerin geometrik yeri metodu da, lineer bir sistemle ilgili önemli bazı parametrelerin değiştirilmesi halinde, karakteristik denklemin köklerinin s düzlemindeki geometrik yerlerini veren bir metoddur. Bu metod 1948 de W. R. Evans tarafından geliştirilmiş olup kontrol sisteminin kararlılığını, kararlılık mertebesini, uygun çalışma parametrelerini ve gerekli kompansasyon elemanlarının transfer fonksiyonlarının tayinini de mümkün kılar.

Köklerin geometrik yeri (K.G.Y.) metodu incelenirken ilkin kazanç değişken tek parametre olarak göz önüne alınacak, çok parametreli hal ise Kısım 11.7 de gösterilecektir.

Şekil 11.1 deki Kapalı Çevrim blok diyagramında G(s) ileri koldaki transfer fonksiyonu, H(s) ise geri besleme kolundaki transfer fonksiyonu olsun.

Şekil 11.1

Kapalı çevrimli çalışmada,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{11.1}$$

dir. Sistemin kararlılığı geçici rejime bağlıdır. Bu bakımdan kararlılık için karakteristik denklem olan,

$$1+G(s)H(s) = 0 \tag{11.2}$$

veya

$$G(s)H(s) = -1 \tag{11.3}$$

denkleminin köklerinin reel kısımlarının negatif olması gereklidir.

Ancak köklerin reel kısımlarının negatif olması kararlılık mertebesi hakkında yeterli bilgi vermemektedir.

Görüleceği üzere kontrol sistemlerinin davranışı üzerinde köklerin kompleks düzlemdeki yerlerinin önemi büyüktür. Denklem (11.3) ün gerçeklenmesi için iki koşul sağlanmalıdır. Bunlardan modül (mutlak değer) le ilgili olan koşul,

$$|G(s)H(s)| = 1 \ldots\ldots \tag{11.4}$$

ve argüman (açı) ile ilgili olan koşul

$$\measuredangle G(s)H(s) = (1+2k)180^\circ \quad k = 0, \pm 1 \pm 2 \pm \ldots\ldots \tag{11.5}$$

bağıntılarını verir.

Ölü zaman ihtiva etmeyen sistemlerde, açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)H(s)$ rasyonel bir cebrik fonksiyondur. $G(s)H(s)$ in payını sıfır kılan z_m sıfırları ve paydasını sıfır kılan p_n polleri cinsinden,

$$G(s)H(s) = k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots\ldots(s+p_n)} \tag{11.6}$$

veya

$$G(s)H(s) = k\frac{\Pi_1^m(s+z_i)}{\Pi_1^n(s+p_i)} \tag{11.7}$$

yazılabilir.

Genel olarak fiziksel sistemlerde $m \leq n$ dir, k ise değişken bir parametre olup açık çevrim duyarlılık faktörü adını alır. k'nın fiziksel anlamı yoktur, açık çevrim kazancı K ile orantılıdır.

Denklem (11.7) de pay ve paydada kompleks sayıların çarpımları bulunmaktadır. Dolayısıyle bu çarpımlarda modüller (mutlak değerler) çarpılır argümanların (açıların) cebrik toplamları alınır.

Denklem (11.7) yardımıyle mutlak değerle ilgili koşulu veren Denklem (11.4) den,

$$|G(s)H(s)|=k\frac{\Pi_1^m|s+z_i|}{\Pi_1^n|s+p_j|}=1 \tag{11.8}$$

ve

$$k=\frac{\Pi_1^n|s+p_j|}{\Pi_1^m|s+z_i|} \tag{11.9}$$

elde edilir.

Açı koşulu ile ilgili Denklem (11.5) den

$$\measuredangle G(s)H(s)=\sum_1^m\measuredangle(s+z_i)-\sum_1^n\measuredangle(s+p_j) \tag{11.10}$$

bulunur.

Denklem (11.5) veya Denklem (11.10) dan görüleceği üzere $G(s)H(s)$ in argümanı (açısı) 180° veya bunun tek katları olmalıdır.

Sıfırlarla ilgili toplam açı,

$$\varphi_z=\sum_1^m\measuredangle(s+z_i) \tag{11.11}$$

Pollerle ilgili toplam açı,

$$\varphi_p=\sum_1^n\measuredangle(s+p_j) \tag{11.12}$$

ile gösterilirse,

$$\measuredangle G(s)H(s)=\varphi_z-\varphi_p=(1+2k)180^\circ \quad k=0,\pm1,\pm2... \tag{11.13}$$

bulunur.

Gene denklem (11.7) ve Denklem (11.2) yardımı ile,

$$1+G(s)H(s)=1+k\frac{\Pi_1^m(s+z_i)}{\Pi_1^n(s+p_j)}=0 \qquad (11.14)$$

$$\Pi_1^n(s+p_j)+k\Pi_1^m(s+z_i)=0 \qquad (11.15)$$

elde edilir.

Denklem (11.15) e mutlak değer ve açı koşulu uygulanarak Denklem (11.9) ve Denklem (11.13)ü tekrar bulmak mümkündür. Gerçekten Denklem (11.15) ten mutlak değer alarak,

$$\Pi_1^n|s+p_j|=k\Pi_1^m|s+z_i| \qquad (11.16)$$

veya

$$k=\frac{\Pi_1^n|s+p_j|}{\Pi_1^m|s+z_i|} \qquad (11.9)$$

bulunur.

Gene Denklem (11.15) e göre iki kompleks sayının toplamının sıfır olması gerekmektedir. Bu ise iki kompleks sayının açılarının farkının 180° veya bunun tek katları olması demektir. Böylece,

$$\varphi_z-\varphi_p=(1+2k)180^\circ \quad k=0,\pm1,\pm2.... \qquad (11.13)$$

bağıntısı gene bulunur.

Denklem (11.15) de k=0 iken $s=p_j$ lerin karakteristik denklemin köklerini verdiği kolaylıkla görülür. Bu bölümde incelediğimiz köklerin geometrik yeri metodu, k sıfırken köklerin kompleks düzlemdeki yerlerinin bilinmesini esas almaktadır. Bu metod k sıfırdan sonsuza kadar değiştirildiği vakit karakteristik denklemin köklerinin geometrik yerinin kolaylıkla tayini için gerekli kuralları vermektedir.

Şekil 11.2

Karakteristik denklemin kökleri kompleks düzlemde Denklem (11.3)ü sağlayan sayılara (reel veya kompleks) ait noktalardır. Kompleks düzlemde bir kere köklerin geometrik yeri tayin edilince k parametresi Denklem (11.9)a göre hesaplanarak geometrik yer üzerinde ait olduğu köklerin üzerine işaretlenir.

Örnek

Açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+10)} \tag{11.17}$$

olan bir sistem için köklerin geometrik yerini bulmaya çalışalım.

Başlangıçta sadece G(s)H(s) i incelemekle işe başlanır. Şekil 11.2 deki sistemin, başlangıç noktasında (s=0) ve s=—10 da bir polu bulunmaktadır.

İlkin bu poller kompleks düzlemde × işaretiyle yerlerine konur. (Sıfırlar 0 işaretiyle belirtilir ancak örneğimizde sıfır yoktur). Köklerin geometrik yerini bulmak için açılar arasındaki bağıntıyı gösteren Denklem (11.13) kullanılabilir.

Herhangi bir s_k noktasının, $1+G(s)H(s)=0$ denkleminin bir kökü olabilmesi için,

$$\measuredangle G(s)H(s)=180^\circ \text{ (veya tek katlarını)}$$

vermelidir. Bu koşulu gerçekleyen noktaları arayalım.

s_k gibi bir noktayı pol ve sıfırlara bağlayan doğruların yatay eksenle yaptıkları açıların cebrik toplamı 180° (veya tek katları) ise o nokta bir köktür ve tabiatıyle köklerin geometrik yeri o noktadan geçmektedir.

Örneğimizde reel eksen üzerinde —10 noktası ile başlangıç noktası arasındaki doğru parçası ve —5 noktasından geçen ve reel eksene dik doğru, köklerin geometrik yerini teşkil eder. Gerçekten —10 ile 0 noktaları arasında seçilecek herhangi bir s_k noktası için s_k yı 0 polüne bağlayan doğru parçası 180°; s_k yı —10 polüne bağlayan doğru parçası 0° verdiğinden toplam açı sabit ve 180° dir ve açılarla ilgili koşul gerçeklenmiş olur. —5 noktasından geçen ve reel eksene dik doğru üzerindeki bir s_k noktası için

$$=-[\measuredangle s+\measuredangle(s+10)]$$

$$\measuredangle G(s)H(s)=\varphi_0+\varphi_1=180^\circ \tag{11.18}$$

Şekil 11.3.a

Şekil 11.3.b

olduğundan bu doğru da geometrik yer üzerindedir. Şekil 11.2 de gösterilen kontrol sistemi için geometrik yer Şekil 11.3.a da koyu olarak çizilmiştir. Köklere tekabül eden sistem kazancı Denklem (11.9) yardımıyle bulunur ve ilgili kök üzerine yazılır, (Bak. Şekil 11.3.b) (Denklem 11.9).

Basit olan bu sistem için köklerin geometrik yeri hesap yolu ile de bulunur.

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+10)} \tag{11.19}$$

veya

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{k}{s(s+10)}=0 \tag{11.20}$$

dır. Böylece,

$$s(s+10)+k=0 \tag{11.21}$$

ve

$$s^2+10s+k=0 \tag{11.22}$$

bulunur.

İkinci dereceden olan bu denklemin kökleri

$$s_{1,2}=-5\pm\sqrt{25-k} \tag{11.23}$$

dır.

$k\leq 25$ e kadar kökler reel

$k>25$ için kökler kompleks eşleniktir ve

$$s_{1,2}=-5\pm j\sqrt{k-25} \tag{11.24}$$

olur. k ya sıfırdan başlayarak değerler verilir ve s_1 ve s_2 köklerinin değerleri hesaplanırsa aşağıdaki cetvel elde edilir.

$k=0$	$s_1=0$	$s_2=-10$
$k=16$	$s_1=-2$	$s_2=-8$
$k=25$	$s_1=-5$	$s_2=-5$
$k=50$	$s_1=-5+5j$	$s_2=-5-5j$

Böylece hesaplanan s_1 ve s_2 kökleri geometrik yeri belirler ve gene Şekil 11.3.b elde edilir.

Görüldüğü üzere kökler, k=0 için açık çevrim transfer fonksiyonu polleri olan −10 ve 0 noktalarından başlamakta, k arttıkça kökler −10 ve 0 noktalarından hareketle ve simetrik olarak −5 e doğru yaklaşmakta, k=25 için her iki kök −5 noktasına gelmekte ve bu noktada katlı kök elde edilmekte k>25 için kökün biri −5 den geçen ve reel eksene dik doğrunun pozitif, diğeri ise aynı doğrunun negatif kısmında kompleks eşlenik kökler olarak ilerlemekte ve k=∞ için sonsuza gitmektedir. Daha yüksek mertebedeki kontrol sistemlerinde köklerin geometrik yerini kolaylıkla çizmek için bazı kurallar geliştirilmiştir. Şimdi bu kurallar incelenecektir.

11.2 KÖKLERİN GEOMETRİK YERİNİ ÇİZMEK İÇİN KURALLAR

Kural 1:

Köklerin geometrik yeri k=0 için G(s)H(s) in pollerinden başlar ve k=∞ için G(s) in sıfırlarında biter. Geometrik yer sürekli, reel eksene nazaran simetrik ve kazancın tek değerli bir fonksiyonudur. Geometrik yerin kol sayısı pol sayısına eşittir.

Karakteristik denklemden hareketle 1.ci kuralı ispatlamak mümkündür. Karakteristik denklem (Denklem 11.2) s in bir polinomu olup bu polinomun katsayıları reel sayılardır. Karakteristik denklemin kökleri ise ya reel sayılar veya kompleks eşlenik sayılardır. Böylece kökler kompleks düzlemde ya reel eksen üzerinde veya reel eksene nazaran simetrik durumda olurlar.

Geometrik yer de, köklerden geçtiğine göre reel eksene nazaran simetriktir.

Denklem (11.15) i gözönüne alalım.

$$\Pi_1^n(s-p_j)+k\,\Pi_1^m(s-z_i)=0 \qquad (11.15)$$

k=0 iken

$$\Pi_1^n(s-p_j)=0 \qquad (11.25)$$

kalır. Böylelikle k=0 iken 1+G(s)H(s)=0 ın kökleri Denklem (11.25) in köklerine veya açık çevrim transfer fonksiyonu G(s)H(s) in pollerine eşit olur.

Diğer bir deyimle geometrik yer $G(s)H(s)$ in pollerinden başlar. Ayrıca Denklem (11.15) e göre s cinsinden elde edilecek polinomun derecesi n (pol sayısı) dir ve tabiatıyle bu polinomun n kökü vardır. Böylece geometrik yere ait kol sayısı da pol sayısına eşittir.

k büyür ve sonsuza yaklaşırsa ($k \to \infty$) Denklem (11.6) daki birinci terim ikinci terim yanında ihmal edilebilir. Böylece

$$\Pi_1^m (s - z_i) = 0 \tag{11.26}$$

denklemi elde edilir. Şu halde $k \to \infty$ için $s = z_i$ elde edilir ve karakteristik denklem olan $1 + G(s)H(s) = 0$ kökleri $G(s)H(s)$ in sıfırlarına varır. Kontrol sistemlerinde pol sayısı sıfır sayısından büyük olursa $G(s)H(s)$ in büyük s kompleks sayılarında değeri

$$G(s)H(s) = k \frac{s^m}{s^n} = k \frac{1}{s^{n-m}} \tag{11.27}$$

olur.

Burada :

m : sıfır sayısı

n : toplam pol sayısı

dır. Büyük s değerlerinde sonsuzda $(n-m)$ sıfır vardır. Böylelikle pol sayısı daha fazla olunca geometrik yere ait n-m kol sonsuzdaki n-m sıfırda son bulur.

Köklerin geometrik yeri k nın tek değerli bir fonksiyonudur. Çünkü Denklem (11.14) de görüleceği üzere

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

k nın lineer bir fonksiyonudur.

Kural 2 :

Köklerin geometrik yerinin reel eksenin üzerindeki kısımları, sağında pol ve sıfırların toplamı tek olan noktalardır.

Açılarla ilgili olarak,

$$\measuredangle G(s)H(s) = (1 + 2k)180^\circ \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$

koşulunu gözönüne alalım.

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_4)[(s+\alpha)^2+\omega_d^2]} \tag{11.28}$$

nin sıfır ve polleri Şekil 11.4 de gösterilmiştir.

Şekil 11.4

Reel eksen üzerindeki herhangi bir s_k noktasının köklerin geometrik yerine ait olabilmesi için bu noktaya ait açı koşulu olan Denklem (11.13).

$$\measuredangle G(s)H(s)=\varphi_z-\varphi_p=(1+2k)180^\circ \quad k=0,1,2$$

gerçeklenmelidir. Veya Şekil 11.4 den görüleceği üzere,

$$\measuredangle G(s)H(s)=\varphi_{z1}+\varphi_{z2}-[(\varphi_{p2}+\varphi_{p3})+(\varphi_{p4}+\varphi_{p1})]=(1+2k)180^\circ$$

olmalıdır.

Kompleks eşlenik pollerden ötürü meydana gelen açılar daima,

$$\varphi_{p2}+\varphi_{p3}=360^\circ$$

verir, ayrıca reel eksen üzerinde seçilmiş herhangi bir noktanın solundaki sıfır ve pollerin açıları daima sıfırdır. s_k noktasının sağındaki sıfır ve poller sırasıyle $+180^\circ$ veya -180° lik açılar meydana getirirler. Böylece sağda tek sayıda sıfır veya pol olunca 180° nin tek katı olan Denklem (11.13) deki açı koşulu gerçeklenmiş olur. Gerçekten Şekil 11.4 deki seçilmiş bulunan s_k noktası için,

$$\varphi_{z1}+\varphi_{z2}-\varphi_{p1}=180^\circ+180^\circ-180^\circ=180^\circ \qquad (11.29)$$

bulunur. Dolayısıyle p_4 ile z_2 noktaları arasındaki doğru parçası geometrik yer üzerindedir. Benzer olarak z_1 ile p_1 noktaları arasındaki doğru parçası da geometrik yer üzerinde olur.

Reel eksen üzerindeki geometrik yer kısmı için kompleks eşlenik köklerin (pollerin) etkileri olmadığından reel eksen üzerindeki sıfır ve pollere bakarak geometrik yere ait kısımları hemen ayırmak kabildir. Şekil 11.5 de bu kuralın uygulandığı bir kaç örnek verilmiştir.

Şekil 11.5

Kural 3 :

Kazancın yüksek değerlerinde köklerin geometrik yeri

$$\theta_0=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-m} \qquad k=0,1,2,3,.... \qquad (11.30)$$

açılarına asimptottur. Burada gene

n : pol sayısı

m : sıfır sayısı

dır.

k nın yüksek değerlerinde ($k\rightarrow\infty$) kökler tabiatıyle büyük değerler alacağından geometrik yer üzerinde alınacak bir s_k noktasını sıfır ve pollere bağlayan doğruların açıları aynı ve θ_0 olacaktır. Pollerin meydana getirdikleri açılar sıfırlarınkinin ters işaretlisidir. Şu halde toplam açılar

$$\varphi_z-\varphi_p=\pm(n-m)\theta_0 \qquad (11.31)$$

dır ve s_k geometrik yerin bir noktası olduğundan açıların toplamı $(1+2k)180^\circ$ dir.

Şu halde

$$\pm(n-m)\theta_0=(2k+1)180^\circ \tag{11.32}$$

asimptot açısı

$$\theta_0=\pm\frac{(1+2k)180^\circ}{n-m} \quad k=(n-m) \text{ e kadar} \tag{11.33}$$

dir.

Örnek olarak :

$n-m=3$ ise		$n-m=4$ ise	
$k=0$ için	$\theta_0=+60^\circ$	$k=0$	$\theta_0=45^\circ$
$k=1$	$\theta_0=+180^\circ$	$k=1$	$\theta_0=135^\circ$
$k=2$	$\theta_0=+300$	$k=2$	$\theta_0=225^\circ$
		$k=3$	$\theta_0=315^\circ$

olur.

Kural 4 :

Asimptota ait doğrular reel eksen üzerinden, sıfır ve pollerin ağırlık merkezinden başlar. Ağırlık merkezinin yeri

$$\sigma_0=\frac{\mathrm{Re}\left[\sum_1^n p_i-\sum_1^m z_i\right]}{n-m} \tag{11.34}$$

bağıntısı ile bulunur.

Gerçekten herhangi bir polinomda en yüksek üslü terimden sonra gelen terimin (ikinci terim) katsayısı polinomun köklerinin toplamına eşittir.

Örnek olarak 3. cü dereceden bir polinom alınırsa,

$$(s+a)(s+b)(s+c)=s^3+(a+b+c)s^2+(ab+ac+bc)s+abc$$

dır.

Burada s^2 li ikinci terimin katsayısı köklerin toplamına ters işaretle eşittir. Bu durum şüphesiz ki polinomun derecesi ne olursa olsun doğru-

dur. Karakteristik denklemden hareketle bulunmuş olan Denklem (11.14)ü gözönüne alalım.

$$1+G(s)H(s)=1+k\frac{\Pi_1^m(s+z_i)}{\Pi_1^n(s+p_j)}=0 \tag{11.14}$$

Bu denklemden,

$$-k=\frac{\Pi_1^n(s+p_j)}{\Pi_1^n(s+z_i)} \tag{11.35}$$

bulunur. Denklem (11.35) in pay ve paydası terimlerine göre açılırsa,

$$-k=\frac{s^n-s^{n-1}\sum_1^n(p_j)+....}{s^m-s^{m-1}\sum_1^m(z_i)+....} \tag{11.36}$$

elde edilir ve pay paydaya bölünürse

$$-k=s^{n-m}-s^{n-m-1}\left[\sum_1^n(p_j)-\sum_1^m(z_i)\right]+.... \tag{11.37}$$

olur, burada $\left[\sum_1^n(p_j)-\sum_1^m(z_i)\right]$ sabit olup, Denklem (11.37) ile gösterilen polinomun köklerinin toplamını verir. Bu değer kazancın değerinden bağımsızdır ve böylece k nın her değerinde köklerin toplamı sabittir.

Kural 3 e göre asimptotların eğimi

$$\theta_0=\pm\frac{(1+2k)180^\circ}{n-m}$$

idi.

Yüksek s değerlerinde Denklem (11.37) (n—m) nci dereceden bir polinom gibidir. Bu halde elde edilen (Bak. Denklem (11.27))

$$-k=s^{n-m} \tag{11.38}$$

denklemi, başlangıç noktasından geçen ve asimptotlara paralel olan doğrunun denklemidir.

Kabul edelim ki asimptot reel ekseni σ_0 noktasında kessin. Başlangıç noktası $s=s_1+\sigma_0$ değişken değişimi ile σ_0 a getirilirse asimptotlar s_1 cinsinden,

$$-k=s_1^{n-m} \tag{11.39}$$

denklemini gerçekler.

Denklem (11.37) de $s=s_1+\sigma_0$ koyulursa

$$s_1^{n-m}+\{[n-m]\sigma_0+[\Sigma(z_j)-\Sigma(p_i)]\}s_1^{n-m-1}+\ldots=-k \tag{11.40}$$

bulunur.

Denklem (11.40) ın Denklem (11.39) u gerçeklemesi için s_1^{n-m} den küçük s_1 lerin katsayıları sıfır olmalıdır. Denklem (11.40) da ikinci terimin katsayısı sıfıra eşit kılınırsa,

$$\sigma_0=\frac{\sum_1^n p_j-\sum_1^m z_i}{n-m} \tag{11.41}$$

bulunur. σ_0 asimptotların reel ekseni kestiği noktadır.

Kompleks pol ve sıfırlar eşlenik olduklarından,

$$\sigma_0=\frac{\mathrm{Re}\left[\sum_1^n p_j-\sum_1^m z_i\right]}{n-m} \tag{11.42}$$

dır ve Denklem (11.42) hesaplarda kolaylık sağlar.

Kural 5 :

Geometrik yerin reel eksenden ayrılma (veya reel eksene varış) noktası reel eksen üzerinde k nın maksimum (varış noktasında minimum) olduğu noktadır. Ayrılma noktası, açı koşulu yardımıyle ve bir deneme noktasının sağ ve solundaki sıfır ve pollere olan uzaklığının tersi eşit kılınarak bulunur.

Kural 1 e göre köklerin geometrik yeri $k=0$ için açık çevrim transfer fonksiyonu pollerinden başlar ve sıfırlarda biter. Şimdi reel eksen üzerinde iki polu gözönüne alalım.

Örnek 1 de görüldüğü üzere k sıfırdan itibaren büyümeye başlayınca kökler pollerden hareketle birbirine yaklaşır ve kazancın belirli bir değerinde üst üste gelirler (katlı kök) ve ondan sonra geometrik yere ait kollar reel eksenden ayrılarak kompleks düzleme simetrik olarak girerler. Geometrik yere ait kolların reel eksenden ayrıldığı noktaya (ayrılma noktası) denir. Tabiatıyle bu noktada k değeri bahis konusu iki pol arasındaki k değerlerinden büyük olup bir maximum verir. Şu halde,

$$-k=W(s)=\frac{\Pi_1^m(s+z_i)}{\Pi_1^m(s+z_i)} \tag{11.43}$$

denkleminin s e nazaran dW(s)/ds türevi alınarak ve sıfıra eşit kılınarak k nın maksimum ve minimum değerleri bulunabilir. k_{max} ayrılma noktasındaki k değerini, k_{min} birleşme noktasındaki k değerini verir. Üçüncü mertebeye kadar olan sistemler için bu yol kolaylık sağlar. Ayrılma noktasının yerinin bulunması için açı koşulu da uygulanır.

Şekil 11.6 da geometrik yer üzerinde ve reel eksenden ufak bir δ mesafesinde bulunan ve köke ait bir nokta gözönüne alınırsa, δ mesafesi küçük olduğunda poller ve sıfırlarla ilgili olarak ortaya çıkan açılar yerine bunların tanjantları alınabilir. Gene kompleks pol ve sıfırların net açı katkıları sıfırdır. Açı koşulundan

$$\varphi_{z1}-(\varphi_{p0}+\varphi_{p1}+\varphi_{p2})=180^\circ \tag{11.44}$$

olmalıdır.

Şekil 11.6

$$\varphi_{p0}=\text{arc tg}\,(180^\circ-\delta/l_0) \qquad =180^\circ-(\delta/l_0)$$
$$\varphi_{p1}=\text{arc tg}\,(\delta/l_1) \qquad =\delta/l_1$$
$$\varphi_{p2}=\text{arc tg}\,(\delta/l_3) \qquad =\delta/l_3 \tag{11.45}$$
$$\varphi_{z1}=\text{arc tg}\,(\delta/l_2) \qquad =\delta/l_2$$

veya

$$[1/l_0+1/l_1+1/l_3-1/l_2]=0 \tag{11.46}$$

veya

$$-(1/l_0+1/p_1-l_0+1/p_2-l_0)+1/z_1-l_0=0 \tag{11.47}$$

bulunur. Denklemde tek bilinmeyen ayrılma noktasına ait l_0 değeridir. Gerektiğinde l_0 ın değeri denemelerle bulunur.

Kural 6 :

Reel eksenden ayrılma noktasında iki kök $\pm 90^\circ$ lik açı ile ayrılırlar.

Şekil 11.7

Reel eksen üzerinde bir çift pol, bunun sağında da çift sayıda pol ve sıfır bulunsun. Kural 2 ye göre geometrik yer söz konusu çift polun sağ ve solunda olamaz. Bu pollerden ayrılma açısını bulmak için çift polun et-

rafına yarı çapı çok küçük bir daire çizilir ve daire üzerinde bir s_1 noktası reel eksen üzerindeki bütün pol ve sıfırlara bir doğru ile bağlanırsa soldaki pol ve sıfırların açılarının sıfır, sağdakilerin 360° olduğu ve her iki taraftaki kompleks pol sıfırların eşlenik olmalarında açılarının birbirini götürdüğü görülür. Böylece bütün açısal katkı küçük daire içindeki pollerden gelmektedir. Küçük daire üzerinde geometrik yere ait noktalar bu açıların 180° olduğu yerlerdir. Bu noktalarda

$$2\theta = 180°$$

veya

$$\theta = 90°$$

dir ve geometrik yer reel eksenden $\pm$ 90° lik açı ile ayrılır. Bu kural daha genel hal için de kanıtlanabilir.

Kural 7 : Kompleks pollerden ayrılma açısı :

Kompleks bir polden ayrılma açısı bu polden diğer pol ve sıfırlara çizilen doğruların meydana getirdikleri açıların cebrik toplamından 180° çıkarmakla bulunur. Şu halde ayrılma açısı,

$$\varphi_{p_2} = \sum_{1}^{m} \sphericalangle (p_2 + z_i) - \sum_{1}^{n} \sphericalangle (p_2 + p_j) - 180° \qquad (11.48)$$

dir.

Gerçekten ayrılma açısı gene açı koşulu yardımıyle kolaylıkla bulunur. Şekil 11.8 deki pol ve sıfir durumunda p_2 kompleks polundan ayrılma açısı φ_{p_2} ise,

Şekil 11.8

$$\varphi_{z1}-(\varphi_{p0}+\varphi_{p1}+\varphi_{p2}+\varphi_{p3})=(1+2k)180^\circ \tag{11.49}$$

veya

$$\varphi_{p2}=\varphi_{z1}-(\varphi_{p0}+\varphi_{p1}+\varphi_{p3})-180^\circ \tag{11.50}$$

olur.

Kural 8 : Kompleks sıfırlara varış açısı:

Kompleks bir sıfıra yaklaşma açısı bahis konusu sıfırdan diğer sıfır ve pollere çizilen doğruların meydana getirdikleri açıların cebrik toplamından 180° çıkarmakla bulunur.

Varış açısı

$$\varphi_{z1}=\sum_{1}^{n}\sphericalangle(z_1+p_j)-\sum_{1}^{m}\sphericalangle(z_1+z_i)+180^\circ \tag{11.51}$$

dir.

Şekil 11.9

Şekil 11.9 da açı koşulu yardımıyle,

$$(\varphi_{z1}+90^\circ)-(\varphi_{p0}+\varphi_{p1}+\varphi_{p2})=(1+2k)180^\circ \tag{11.52}$$

veya

$$\varphi_{z1} = (180^\circ - 90^\circ) + (\varphi_{p0} + \varphi_{p1} + \varphi_{p2}) \qquad (11.53)$$

olur.

Kural 9 : Köklerin geometrik yerinin imajiner ekseni kesme noktası :

Sistemlerin kararlılığını incelemek üzere kullanılan Routh Kriteri yardımıyle geometrik yerin imajiner ekseni kestiği kritik nokta ve bu duruma ait k değeri bulunabilir. Ayrıca asimptotik Bode diyagramları yardımıyle de kritik noktadaki kazanç ve frekans değerleri bulunabilir.

Örnek 2 ile ilgili sistem için karakteristik denklem

$$s^3 + 12\,s^2 + 20\,s + k = 0$$

dir. Routh Kriteri uygulanırsa,

s^3	1	20
s^2	12	k
s_1	$\in = (240-k)/12$	0
s	k	

kararlılık için $k \leq 240$ değeri bulunur. Şu halde köklerin geometrik yerinin imajiner ekseni kestiği noktada $k=240$ değerindedir. s^1 sırası sıfır olursa sistem sürekli titreşim durumundadır. Bu durumda s^2 e ait sıra ile sağlanan yardımcı denklem

$$12s^2 + 240 = 0$$

olup, köklerin geometrik yerinin imajiner ekseni kestiği noktadaki doğal frekans için,

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n = \pm\sqrt{240/12} = \pm j\,4{,}45 \qquad \therefore \omega_n = 4{,}45$$

bulunur.

Kural 10 : Köklerin geometrik yeri üzerinde k değerlerinin bulunması ve işaretlenmesi :

Köklerin geometrik yeri üzerinde k değerleri için Denklem (11.9)

$$k = \frac{\Pi_1^n |(s+p_j)|}{\Pi_1^m |(s+z_i)|} \qquad (11.9)$$

vermektedir. Dolayısıyle geometrik yer üzerindeki herhangi bir noktadaki k değerini bulmak için (Denklem (11.9)a göre) o nokta bütün pol ve sıfırlara birleştirilir ve pollere ait uzaklıkların çarpımı sıfırlara ait uzaklıkların çarpımına bölünür.

11.3 KÖKLERİN GEOMETRİK YERİNE AİT ÖRNEK ÇİZİMLER

Örnek 1 :

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \tag{11.54}$$

$$(20K=k)$$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(0{,}5s+1)(0{,}1s-1)}=\frac{20K}{(s+2)(s+10)}=\frac{k}{(s+2)(s+10)} \tag{11.55}$$

— poller -2 ve -10 dadır.

— $n=2$ geometrik yerin iki kolu bulunur.

— $k=0$ için kökler -2 ve -10 dan başlar ve $k=16$ için -6 da birleşir. k nın daha yüksek değerleri için kökler (ve kollar) reel eksenden $\pm 90°$ lik açı ile ayrılırlar.

Analitik Çözüm :

Karakteristik Denklem $(s+2)\ (s+10)+k=0 \quad s^2+12s+20+k=0$

$$s_{1,2}=-6\pm\sqrt{36-(20+k)}$$

k	**Kökler**
$k=7$	$s_{1,2}=-6\pm 3$
$k=16$	$s_{1,2}=-6$
$k=25$	$s_{1,2}=-6\pm 3$
$k=41$	$s_{1,2}=-6\pm 5$
$k=52$	$s_{1,2}=-6\pm 6$

değerleri bulunur. Şekil 11.10 da k ya göre KGY çizilmiş ve taksimatlandırılmıştır.

Şekil 11.10

$k=52$ iken $\zeta=0{,}707$ $\omega_n=\sqrt{72}=8{,}4$ rad/sn dir.

Örnek 2 :

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \tag{11.56}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(0{,}5s+1)(0{,}1s+1)}=\frac{20K}{s(s+2)(s+10)}=\frac{k}{s(s+2)(s+10)} \tag{11.57}$$

Şekil 11.11

— poller 0, −2 ve −10 dadır.

— n=3, geometrik yerin üç kolu vardır.

— reel eksen üzerindeki geometrik yer 0 ile −2 ve −10 dan küçük reel eksen kısımlarıdır.

— Asimtotların açısı:

$$\theta = \frac{(1+2k)180^\circ}{3}$$

k=0	60°
k=1	180°
k=2	300°

— Ağırlık merkezi:

$$\sigma_0 = \frac{-2-10}{3} = -4$$

— Reel eksenden ayrılma noktası:

-10 daki pol uzakta olduğundan 0 ile -2 deki pollerin ortasına yakındır. $l_0 = -0{,}95$ dedir.

$$-\frac{1}{l_0} + \frac{1}{2-l_0} + \frac{1}{10-l_0} = 0 \qquad l_0 = -0{,}95$$

Karakteristik denklem,

$$s(s+2)(s+10)+k=0 \tag{11.58}$$

veya

$$s^3+12s^2+20s+k=0 \tag{11.59}$$

dır.

Köklerin geometrik yerinin imajiner ekseni kesme noktasını ve böylece kritik k değerini bulmak için Routh Kriteri uygulanırsa,

s^3	1	20
s^2	12	k
s^1	$\epsilon = (12.20-k)/12$	0
s^0	k	

rarlılık için s^1 sırasında $\epsilon = 0$ için $k=240$ değeri bulunur. s^2 sırasına ait yardımcı denklem ise sürekli titreşimin doğal frekansını verir. Buna göre,

$$12\,s^2+240=0$$

olup

$$\omega_n = \sqrt{20} = 4{,}45 \text{ rd/sn}$$

dir.

Yukarıdaki bilgilerle Şekil 11.11 deki köklerin geometrik yeri çizilelebilir.

11.4 ÖZET :

KÖKLERİN GEOMETRİK YERİNİN KOLAY ÇİZİLMESİ İÇİN KURALLAR :

1. Köklerin geometrik yeri $k=0$ için $G(s)H(s)$ in pollerinden başlar ve $k=\infty$ için $G(s)H(s)$ in sıfırlarında biter. Geometrik yer sürekli ve kazancın tek değerli bir fonksiyonudur. Geometrik yerin kol sayısı pol sayısına eşittir.

2. Köklerin geometrik yerinin reel eksenin üzerindeki kısımları, sağında pol ve sıfırların toplamı tek olan noktalardır.

3. Kazancın yüksek değerlerinde köklerin geometrik yeri

$$\theta = \frac{(1+2k)180^\circ}{n-m} \qquad k=0,1,2,.....$$

açılarına asimptottur.

4. Asimptota ait doğrular reel eksen üzerinden ve sıfır ve pollerin ağırlık merkezinden başlar. Ağırlık merkezinin yeri

$$\sigma_0 = \frac{\mathrm{Re}\left[\sum_1^n p_i + \sum_1^m z_i\right]}{n-m}$$

bağıntısı ile bulunur.

5. Geometrik yerin reel eksenden ayrılma (veya reel eksene varış) noktasında k_{max}, yaklaşma noktasında k_{min} dur. Ayrılma noktası ayrıca açı koşulu ile bulunur.

6. Reel eksenden ayrılma noktasında iki kök $\pm$ 90° lik açı ile ayrılırlar.

7. Kompleks pollerden ayrılma açısı.

8. Kompleks sıfırlara varış açısı,

9. Köklerin geometrik yerinin imajiner ekseni kesme noktası.

10. Köklerin geometrik yeri üzerinde k değerlerinin bulunması ve işaretlenmesi.

11.5 POL VE SIFIRLARIN KÖKLERİN GEOMETRİK YERİNE ETKİLERİ

Pollerin Etkisi :

Açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s) = \dfrac{k}{s(s+10)}$ (11.17)

olan bir sistem için köklerin geometrik yeri Şekil 11.3 de gösterilmiştir. Denklem (11.17)

$$G(s) = \frac{k}{s(s+p_1)} \tag{11.60}$$

tipindedir. Buna bir pol daha eklersek,

$$G(s) = \frac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)} \tag{11.61}$$

elde ederiz. $p_1 = -10$, ve $p_2 = -30$ değerleri ile,

Şekil 11.12

$$G(s)=\frac{k}{s(s+10)(s+30)} \tag{11.62}$$

olur.

$p_2=-30$ da açık çevrim transfer fonksiyonuna bir polun eklenmesi geometrik yere ait iki kolu s düzleminin sağ yarısına doğru eğmektedir.

Ayrıca ayrılma noktası da -5 ten -4, e doğru kaymıştır. Böylece pollerin geometrik yere ait kolları sağa iten bir etkisi olduğu görülür.

Bir $p_3=-50$ polü daha eklenirse,

$$G(s)=\frac{k}{s(s+10)(s+30)(s+50)} \tag{11.63}$$

için geometrik yere ait kompleks eşlenik kollar daha da sağa itilmektedir.

Sıfırların Etkisi :

Açık çevrim transfer fonksiyonuna,

$$G(s)=\frac{k}{s(s+p_1)} \tag{11.60}$$

bir z_1 sıfırı eklenirse,

$$G(s)=\frac{k(s+z_1)}{s(s+p_1)} \tag{11.64}$$

Şekil 11.13

ve gene $p_1 = -10$

$z_1 = -25$ değerleri ile,

$$G(s) = \frac{k(s+25)}{s(s+10)} \tag{11.65}$$

bulunur. Denklem (11.65) e ait köklerin geometrik yeri Şekil 11.13 dedir.

Görüldüğü üzere bir sıfır eklenmesi geometrik yere ilişkin kompleks eşlenik kolları s düzlemin sol yarısına doğru çekmektedir. Böylece sıfırları bir mıknatısın pozitif ucu gibi çeken bir etki, pollerin de mıknatısın negatif ucu gibi iten bir etki yaptıkları görülür.

11.6 POL VE SIFIRLARIN KONUMLARININ ETKİSİ

Pollerin köklerin geometrik yerine ait kolları s düzleminin sağ yarısına, sıfırların ise (daha kararlı bir çalışmaya karşılık gelen) koları s düzleminin sol yarısına çektiği belirtilmişti.

Şimdi pol ve sıfırların bu genel etkilerinin yanında değer değiştirmeleri halinde köklerin geometrik yerine etkisini inceleyelim.

Örnek olarak açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+p)(s^2+4s+s)} \tag{11.66}$$

alınmıştır.

Şekil 11.14 de bir p polünün soldan sağa doğru hareket ettiği vakit, $-2 \pm j2$ kompleks pollerden başlayan kompleks kolların 45° lik asimptot açısı ile sağ yarı düzleme gittiği halde $p=4$ kritik durumunda geometrik yer doğru parçalarından ibaret olmakta $p \gtrless 4$ durumunda ise, kompleks pollerden başlayan kollar sol yarı düzleme gitmekte ve reel eksen üzerindeki geometrik yere ait doğru parçasından ayrılan kompleks kollar ise bu kez sağ yarı düzleme gitmektedir.

Benzer şekilde sıfırların yer değiştirmesini incelemek üzere,

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+z)}{s(s^2+4s+8)} \tag{11.67}$$

alınmıştır.

Şekil 11.15'in incelenmesinden görüldüğü üzere z sıfırı soldan sağa başlangıç noktasına doğru yaklaştıkça geometrik yere ait kompleks kollar sola doğru gelmekte ve kararlılığı artırmaktadır.

a) p>4

b) p=4

c) p<4

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+p)(s^2+4s+8)}$$

Şekil 11.14

a) z>4

b) z=4

c) z<4

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+z)}{s(s^2+4s+8)}$$

Şekil 11.15

11.7 ÇOK PARAMETRELİ SİSTEMLERDE KÖKLERİN GEOMETRİK YERİ

Köklerin geometrik yeri metodu aslında bir polinomun köklerinin bulunmasına yarayan bir metoddur. Gerçektende dinamik bir sistemin karakteristik denklemi

$$F(s)=(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+....+a_1s+a_0)+k(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+....+b_1s+b_0)=0 \tag{11.68}$$

şeklinde bir polinom olarak gösterilir ve her iki taraf $(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_0)$ a bölünürse :

$$=1+k\ \frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1s+a_0}=1+k\ \frac{\Pi_1{}^m(s+z_i)}{\Pi_1{}^n(s+p_j)}=0 \tag{11.69}$$

elde edilir. Denklem (11.69)

$$1+G(s)=0 \tag{11.70}$$

tipindedir ve bu şekle sokulan bir polinoma K.G.Y. metodunun nasıl uygulanacağı ve k nın değişmesinin köklerin geometrik yerini nasıl değiştireceği görülmüştür. Şu halde herhangi bir polinom Denklem (11.69) daki şekle sokulursa orada k nın yerini alacak başka bir parametrenin değişmesinin etkisi de incelenebilir.

Örnek olarak üçüncü mertebeden bir sistemi göz önüne alalım. Bu sistemle ilgili karakteristik denklem

$$s^3+s^2+bs+a=0 \tag{11.71}$$

olarak gösterilsin ve burada a ve b değişken parametre seçilsin. Denklem (11.71) $1+G(s)H(s)=0$ şekline sokulursa

$$1+\frac{bs}{s^3+s^2+a}=0 \tag{11.72}$$

bulunur.

$$G(s)H(s)=\frac{bs}{s^3+s^2+a} \tag{11.73}$$

a K.G.Y. metodu uygulanabilir.

İlkin polleri bulmak için

$$s^3+s^2+a=0 \tag{11.74}$$

denkleminin köklerinin bulunması gereklidir. Bu amaçla Denklem (11.74)

$$\frac{a}{s^2(s+1)}=0 \tag{11.75}$$

şekline sokulur. Denklem (11.75) deki $a/(s^2(s+1))$i açık çevrim transfer fonksiyonu gibi göz önüne alıp buna K.G.Y.ne ait kurallar uygulanırsa, a değişken parametre olarak Şekil 11.16 daki diyagram elde edilir.

Şekil 11.16

Şekil 11.16 daki a parametresinin uygun bir değeri, örnek olarak, $a=a_1$ alınırsa köklerin geometrik yeri görülmektedir. Tabiatı ile kompleks eşlenik kökleri imajiner eksenden fazla uzaklaştırmayan a değerleri uygundur. $a=a_1$ için böylece bulunan üç kök Denklem (11.73) deki

$$G(s)H(s)=\frac{bs}{s^3+s^2+a_1} \tag{11.73, a}$$

in pollerini verir. Bu poller belli olduğuna göre Denklem (11.73, a) ya K.G.Y. metodu uygulanır ve bu sefer b değişken parametre olarak alınırsa Şekil 11.17 bulunur.

Şekil 11.17

Şekil 11.17 de $a=a_1$ için elde edilmiş üç pol ve Denklem (11.73) deki bir sıfıra bağlı olarak K.G.Y. çizilmiştir. Bu şekilden b parametresine bağlı olarak köklerin s düzlemindeki yerleri gözönüne alınarak gerekli bir kararlı çalışmayı sağlayacak $b=b_1$ gibi bir parametre seçilebilir. $a=a_1$ ve $b=b_1$ parametrelerinin uygun bir şekilde seçilmesi ile sistemden istenen ζ, ω_n ve t_y sağlanabilir.

Örnek :

Şekil 11.18

Blok diyagramı Şekil 11.18 de verilmiş olan sistem için aşağıdaki isteklere uygun olarak K ve τ_d yi bulun.

1 — Birim rampa girişte sürekli rejim hatası giriş sinyalinin 5% inden küçük ($e_{sr} \leq 5\%$)

2 — Hakim kökler için $\zeta \geqslant 0{,}707$

3 — Yerleşme zamanı $t_y < 1$ saniye olmalıdır.

$$e_{sr} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K(1+\tau_d s)}{s(s+5)}} R(s)$$

dir.

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

alınarak

$$e_{sr} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \frac{K(1+\tau_d s)}{s(s+5)}} \frac{1}{s^2} 0{,}05 ,$$

den $K \geqslant 100$ bulunur.

Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_d s)}{s(s+5)}$$

dir. Karakteristik denklem

$$1 + G(s) = s^2 + 5s + K_d s + K = 0$$

olur. Bu denklem K=100 için

$$1 + \frac{K\tau_d s}{s^2 + 5s + 100} = 0$$

şeklinde yazılabilir. b=100 yardımıyla

$$G_0(s) = \frac{100\,\tau_d s}{s^2 + 5s + 100} = \frac{bs}{s^2 + 5s + 100}$$

da poller

$$s^2+5s+100=0$$

denkleminden

$$s_{1,2}=-2{,}5+j\,9{,}68$$

dir. $G_0(s)$e K.G.Y. metodu uygulanırsa, s_1, s_2 polleri ve başlangıçtaki bir sıfıra bağlı olarak Şekil 11.19 daki diyagram bulunur.

$\zeta \geqslant 0{,}707$ için $\varphi=45°$lik doğru ve $t_y=4/\zeta\omega_n \leq 1$; $\zeta\omega_n \geq 4$ le sınırlanan bölgede isteklere cevap veren hakim köklerin yeri ve bu köklere ait $b=100$ $\tau_d=9$ ve $\tau_d=0{,}09$ bulunur. Şu halde $K=100$ ve $\tau_d=0.09$ seçilmelidir.

Şekil 11.19

KAYNAKLAR

1. Dorf, R.C., «Modern Control Systems», Addison-Wesley, 2. Baskı, 1973.
2. Harriot, P., «Process Control», McGraw-Hill, 1964.
3. Ogata, K., «Modern Control Engineering», Prentice-Hall, 1970.
4. Raven, F.H. ,«Automatic Control Engineering», McGraw-Hill, 2. Baskı, 1968.
5. Kuo, B.C., «Automatic Control Systems», Prentice-Hall, 5. Baskı, 1987.
6. Pestel, E., Kollmann E., «Grundlagen der Regelungstechnik», Friedr. Vieweg, 2. Baskı, 1968.
7. Zeines, B., «Automatic Control Systems», Prentice-Hall, 1972.
8. Johnson, E.R., «Servomechanisms», Prentice-Hall, 1963.
9. Ceaglske, N.H., «Automatic Process Control», John Wiley&Sons, 1965.
10. Liu, C.L., Liu, Jane W.S., «Linear Systems Analysis», McGraw-Hill, 1975.
11. Truxal, J.G., «Control Engineers' Handbook», McGraw-Hill, 1958.
12. Karnopp, D., Rosenberg, R., «System Dynamics: An Unified Approach», John Wiley&Sons, 1975.
13. MacFarlane, A.G.J., «Dynamical System Models», George G. Harrap & Co. Ltd. 1970.
14. Auslander, D.M., Takayashı, Y., Rabins, M.J., «Introducing Systems and Control», McGraw-Hill, 1974.
15. Reswick, J.B., Taft, C.K., «Introduction to Dynamic Systems», Prentice-Hall, 1967.
16. Webb, C.R., «Automatic Control», McGraw-Hill, 1964.
17. Ogata, K., «System Dynamics», Prentice-Hall, 1978.

18. Brown, B.M., «The Mathematical Theory of Linear Systems», Chapman&Hall, 1965.

19. Seifert, W.W., Steeg, C.W., «Control Systems Engineering», McGraw-Hill, 1960.

20. Takai, H., «Theory of Automatic Control», London Iliffe Books, 1966.

21. Takahashi, T., «Mathematics of Automatic Control», Holt, Rinehart and Winston, 1966.

22. Ragazzani, J.R., Vannah, W.E., «Feedback Control Systems», McGraw-Hill, 1958.

23. Ahrendt, W.R., Taplin, J.F., «Automatic Feedback Control Systems», McGraw-Hill, 1951.

İNDEKS

— A —

Açı koşulu, 279
Açık çevrimli kontrol, 8
Açık çevrim transfer fonksiyonu, 112
Açık yol, 142
Adi noktalar, 52
Ağırlıklı regülatör, 151
Akış diyagramı, 21, 140
Alçak frekans asimptotu, 246, 248
Amortisör, 69
Analitik fonksiyonlar, 52
Analog elektronik, 28
Analog simülasyon, 219
Atalet momenti, 84
Ayrılma noktası, 110, 111
Az sönümlü hal, 173

— B —

Bağımlı düğüm, 141
Bağımsız düğüm, 141
Bang-bang kontrol, 178
Basamak fonksiyonu, 38
Basınçlı hava, 29
Basınçlı yağ, 29
Basit elemanlarda enerji depolanması, 95
Basit hidrolik elemanlar, 84
Başlangıç değer teoremi, 48
Birim basamak fonksiyonu, 38
Birim dönüş, 112
Birim dönüşlü kapalı çevrim, 112, 193
Birim impuls fonksiyonu, 44
Birim rampa fonksiyonu, 41
Birim vektör, 34
Birinci mertebeden gecikme, 169
Birinci mertebe sistem, 125
Biyolojik sistemler, 4
Blok, 105
Blok diyagramı, 11, 15, 105, 108
Blok diyagramının indirgenmesi, 116
Bode diyagramı, 242
Bozucu değişkenler, 5
Bozucu etki, 114

— C, Ç —

Cauchy-Rieman denklemleri, 51
Cebirsel toplama elemanı, 110, 111
Cevap, 109
Çevre, 3
Çevrim, 142
Çevrim kazancı, 143
Çıkış değişkeni, 5, 109
Çıkış düğüm noktası, 141

— D —

Daimi rejim hatası, 170, 185
Damper elemanı, 79
Darbe fonksiyonu, 42
Dekad, 239
Demografik sistem, 4
Desibel, 253
Diferansiyel aralık, 180
Diferansiyel etki, 184
Diferansiyel zaman, 184
Dijital elektronik, 28
Dijital simülasyon, 219
Dinamik eleman bağıntısı, 109
Direnç elemanı, 73, 74
Doğal frekans, 128, 131
Döner elemanlar, 82

Dönüştürme kuralları, 117, 118
Dönüşümü alınabilirlik, 38
Duyar eleman, 23
Düzeltme, 10

— E —

Elektriksel direnç, 121
Elektriksel kapasite, 123
Elektriksel sistem elemanları, 73, 121
Elektromekanik, 28
Elektromekanik tahrik sistemi, 18
Elektronik, 27
Empedans, 96
Endüktans elemanı, 76
Endüstriyel kontrol organı tipleri, 185

— F —

Faz açısı spektrumu, 237
Faz farkı, 241
Faz payı, 264
Fazla sönümlü hal, 173
Fiziksel model, 68
Fizyolojik sistemler, 4
Frekans cevabı, 235
Fonksiyonel diyagram, 11
Fourier Kanunu, 92

— G —

Geçici rejim, 163, 165
Geçiş fonksiyonu, 15
Genel kazanç formülü, 147
Genelleştirilmiş empedans, 95
Genlik spektrumu, 237
Genlikler oranı, 241
Gerçel kısım, 31
Giriş değişkeni, 5, 109
Giriş düğüm noktası, 141
Güç üretim sistemi, 4

— H —

Hagen-Poisenille formülü, 85
Harmoniğin genliği, 237
Hata, 9
Hız hatası, hız hata katsayısı, 209
Hız kontrol sistemi 151
Hibrit simülasyon, 220
Hidrolik, 29
Hidrolik direnç elemanı, 85
Hidrolik endüktans, 90
Hidrolik kapasite elemanı, 89, 132, 133
Hidrolik seviye sistemleri, 132
Hidrolik zaman sabiti, 133

— I, İ —

Isı gradyanı, 93
Isıl sistem, 138
Isıtma kontrolu, 114
İç değişkeni, 72
İdeal damper elemanı, 79
İdeal kütle elemanı, 80
İdeal yay elemanı, 77
İkaz fonksiyonu, 54
İkili kontrol organı, 178
İkinci mertebe sistem, 128, 131
İleri besleme transfer fonksiyonu, 113
İleri giden yol, 142
İleri giden yol kazancı, 143
İletim ile ısı yayılması, 92
İmajiner kısım, 31
İmpuls fonksiyonu, 43, 44
İndirgeme metodu, 105
İntegral etki, 183
İntegral tipi kontrol organı, 186
İntegral zaman, 186
İşaret akış diyagramı, 105, 140
İvme hatası, 210
İzafi kararlılık, 265
İzleyici çevrimi, 206

— K —

Kapalı çevrimli bir sistemin bozucu etkiyi de içeren genel şekli, 114
Kapalı çevrim blok diyagramı, 111
Kapalı çevrimli kontrol, 8, 192
Kapalı çevrim transfer fonksiyonu, 113
Kapalı yol, 142
Kapasite elemanı, 73, 75, 163
Karakteristik denklem, 55
Karakteristik fonksiyon, 55
Kararlılık, 221

Kararlılık sınırı, 223
Karmaşık düğüm noktası, 141
Karşılaştırma bölümü, 23
Karşılaştırma elemanı, 111
Kaynak, 141
Kazanç, 14, 183
Kazanç formülü, 105
Kazanç payı, 264
Kesim frekansı, 246, 248, 250
Kinetik enerji, 84
Kompleks değişken, 30
Kompleks değişkenli bir fonksiyonunun türevi, 49
Kompleks düzlem, 31
Kompleks pollerden ayrılma açısı, 286
Kompleks sayının çarpılması ve bölünmesi, 35
Kompleks sayının eşleniği, 36
Kompleks sayının üstel belirtilmesi, 33
Kompleks sıfırlara varış açısı, 187
Kontrol, 2, 6, 7
Kontrol çevrimi, «Açık» ve «Kapalı» kontrol çevrimleri, 7, 8
Kontrol elemanı ve devresi, 23
Kontrol organının ayarı, 212, 220
Kontrol organının deneysel ayarı, 212
Kontrol organı tipleri, 177
Kontrol sistemi, 7
Kontrol sistemlerinin kararlılığı, 221
Kontrol sistemlerinde sürekli rejim hatası, 207
Kontrol teknolojileri, 27
Konum hatası, konum hatası katsayısı, 208
Köklerin geometrik yeri, 270
Köklerin geometrik yerinin imajiner ekseni kesme noktası, 288
Kritik sönümlü hal, 173
Kumanda değişkenleri, 5
Kumanda elemanı ve devresi, 24
Kuyu, 141

— L —

Laminer akış, 85
Laplace dönüşümü, 15, 30
Laplace dönüşümü çiftleri, 50
Laplace dönüşümünün tanımı, 37
Laplace operatörü, 15, 30
Lineer diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü ile çözümü, 62
Lineerleştirme, 64-67
Lineer yaklaşıklık, 66
Logaritmik diyagram, 242-255

— M —

Mason kazanç formülü, 147
Matematik model, 68
Mekanik empedans, 100, 101
Mekanik sistem elemanları, 77, 129
Modül, 31, 241

— N —

Nakil geçikmesi, 42, 182
Negatif geri besleme, 9, 203
Nyquist diyagramı, 255

— O —

Offset, 185
On-off kontrol, 178
Orantı+Diferansiyel tipi kontrol organı, 188
Orantı elemanı, 122, 163
Orantı etki, 183
Orantı+İntegral tipi kontrol organı, 187
Orantı+İntegral+Diferansiyel tipi kontrol organı, 190
Orantı kontrollu sistem, 185
Orantı tipi kontrol organı, 185
Otomatik kontrol, 2
Otomatik kontrol sistemi, 9
Otomatik kontrol sistemlerinin çalışma türleri, 203

— Ö —

Ölçme, 7
Ölçme elemanı ve devresi, 22
Ölçme organının etkisi, 193
Ölçme yükseltici devresi, 23
Ölü zaman, 42, 182

Ötelenmiş fonksiyon, 41
Özdeğerler, 270

— P —

Parabolik hata katsayısı, 210
Paralel bağlama, 98
Pnömatik, 29
Pol, 54
Polar diyagram, 255
Polar şekil, 32
Pollerin etkisi, 294
Poller ve sıfırlar, 49-54
Pol ve sıfırların konumlarının etkisi, 298
Pozitif geri besleme çevrimi, 119
Proses reaksiyon eğrisi metodu, 215

— R —

Rampa fonksiyonu, 39
Rate etki, 185
RC devresi, 124
Reel kısım, 31
Regülatör çevrimi, 203
Reset etki, 184
RLC devresi, 126
Rotasyon damperi, 83
Routh kararlılık ölçütü, 224

— S —

Sanal kısım, 31
Sapma, 10
Sayısal elektronik, 28
s düzlemi, 37
Seri bağlama, 96
Servomekanizma çevrimi, 205
Seviye kontrol sistemleri, 132
Sıfır, 54
Sıfır hata, 10
Sıfırların etkisi, 295
Sıfır sapma, 10
Sınır frekansı, 264, 265
Sistem, 3
Sistem dinamiği, 68
Sistem dinamiği ve kontrol, 2
Sistem tipleri, 262, 263
Solenoid, 179
Son değer teoremi, 47
Son kontrol elemanı, 24
Söndürme oranı 128, 131
Sönüm elemanı, 69
Sönümlü titreşim, 173
Sönümlü titreşim metodu, 214
Stefan-Boltzmann Kanunu, 94
Süperpozisyon ilkesi, 236
Sürekli elektronik, 28
Sürekli kontrol organı, 182
Sürekli rejim, 163, 165
Sürekli rejim hatası, 170, 207
Sürekli titreşim metodu, 213
Süspansiyon sistemi, 69
Şartlı kararlılık, 234

— T —

Tekil noktalar, 53
Termik direnç, 92
Termik elemanlar, 92
Termik kapasite elemanı 94
Termik makinalar, 4
Termostat, 114
Ters Laplace Dönüşümü, 55
Tip 0 sistem, 207, 263
Tip 1 sistem, 207, 263
Tip 2 sistem, 207, 263
Titreşim elemanı, 128, 131, 163
Titreşim elemanının basamak cevabı, 172
Titreşim elemanının geçici rejim cevabı, 172
Titreşim elemanının impuls cevabı, 175
Titreşim elemanının rampa cevabı, 174
Torsiyon yayı, 82
Transfer fonksiyonu, 15, 54, 105, 106, 107
Transfer fonksiyonu kazancı, 116
Transmitter, 29
Türbülanslı akış, 87

— U, V —

Uç değişkeni, 72
Vana, 12
Vektörün açısı, 32

Viskoz akışa ait Newton Kanunu, 79
Viskoz sürtme, 79

— Y —

Yardımcı polinom, 229
Yarı logaritmik diyagram, 253
Yığılmış parametreli eleman, 80
Yol, 142
Yol kazancı, 143
Yüksek frekans asimptodu, 246, 248

— Z —

Zaman sabiti, 125, 134, 163
Zaman sabiti elemanının basamak cevabı, 167
Zaman sabiti elemanının impuls cevabı, 171
Zaman sabiti elemanının geçici rejim cevabı, 166
Zaman sabiti elemanının rampa cevabı, 169
Zaman sabiti tipindeki bir sistemin integral kontrolü, 198
Zaman sabiti tipindeki bir sistemin orantı kontrolu, 194
Zaman sabiti tipindeki bir sistemin PI kontrolu, 202
Ziegler ve Nichols, 213, 215