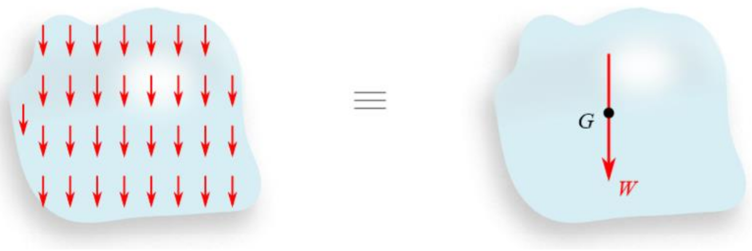
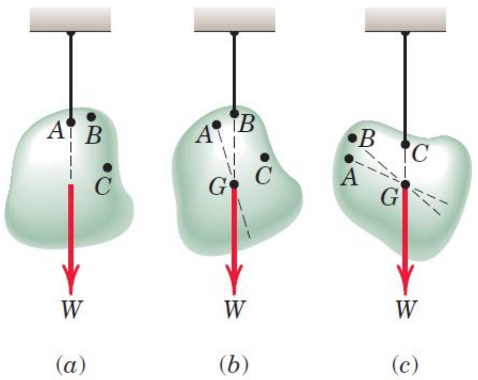
İki Boyutlu Bir Cismin Ağırlık Merkezi

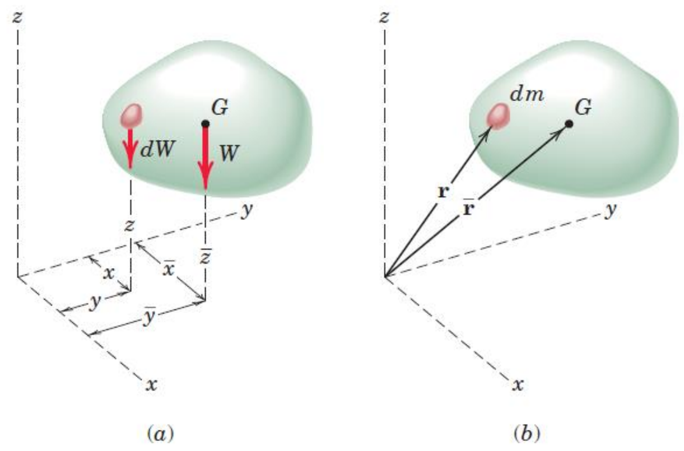
Bir cismin ağırlığı aslında bir tek kuvvet değildir. Ağırlık kuvveti cismin hacmi üzerinde yayılmış olan yayılı bir kuvvettir. Ama problem çözerken kolaylık olsun diye bu yayılı kuvvetin yerine geçen bir bileşke kuvvet göz önüne alınır.



Statik dersinde kuvvet vektörünün bir tesir çizgisi vardır. Bileşke ağırlık kuvvetinin de bir tesir çizgisi vardır ve nereden geçtiği bilinmelidir. Bir cisim herhangi bir noktasından tavana bir iple asılarak ağırlık kuvvetinin tesir çizgisi bulunabilir. Çünkü ağırlık kuvvetinin tesir çizgisi daima ip ile çakışıktır. Farklı noktalardan asarak elde edilen farklı tesir çizgilerinin hepsinin aynı bir noktada kesiştiği görülür. İşte bu noktaya **kütle merkezi** veya **ağırlık merkezi** denir.



Ağırlık Merkezinin Belirlenmesi



$$\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dW}{W}$$

$W = mg$ and $dW = g\, dm$

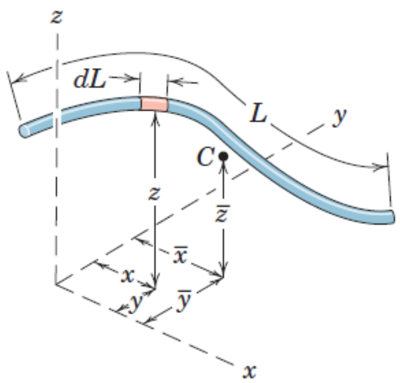
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\rho\,dV}{\int \rho\,dV}$$

Çizgi, Alan ve Hacimlerin Geometrik Merkezleri

-Çizgiler

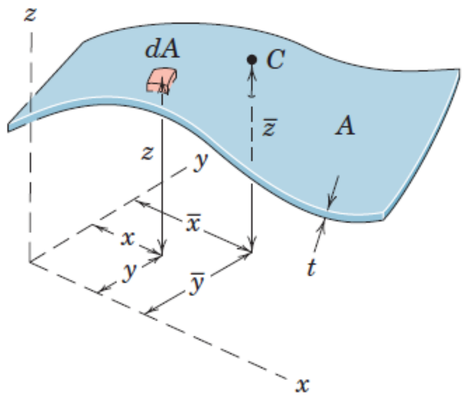
$$dm = \rho A\,dL$$



$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dL}{L}$$

- Alanlar

$$dm = \rho t\,dA$$



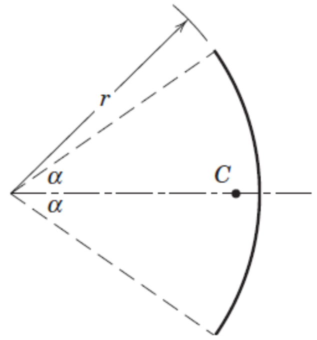
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dA}{A}$$

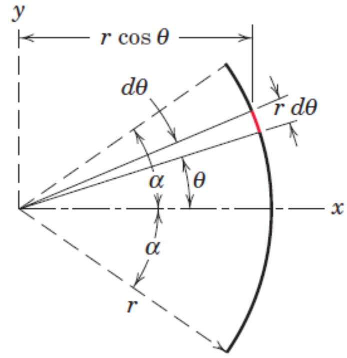
- Hacimler

$$dm = \rho\,dV.$$

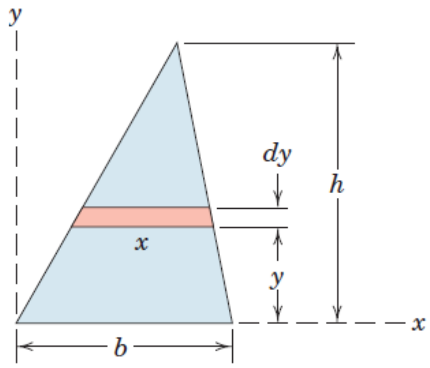
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V}$$

Bir dairesel yayın geometrik merkezi:



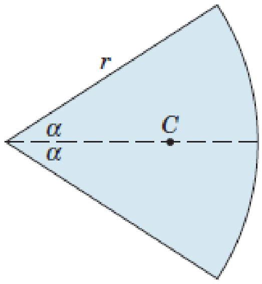


Bir üçgen alanın geoemtrik merkezi:

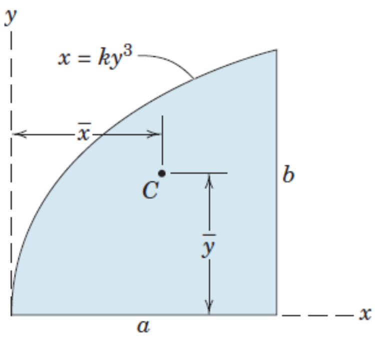


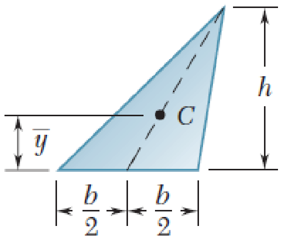
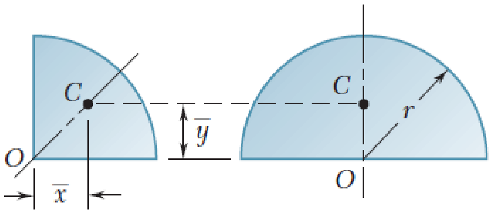
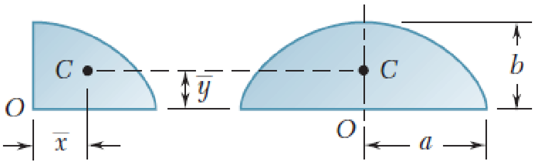
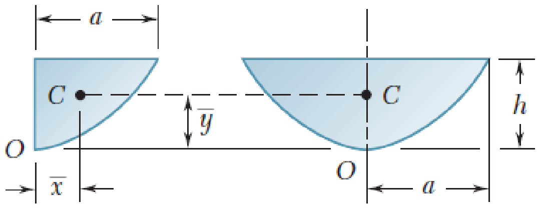
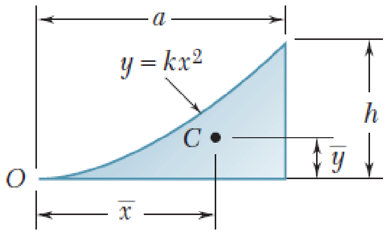
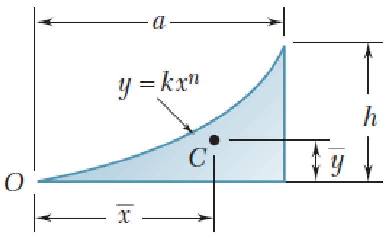
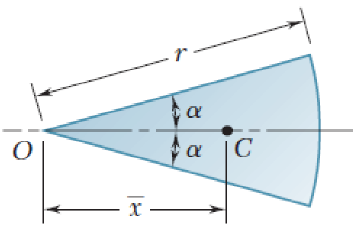
Dr. Kürşat GÜLTEKİN

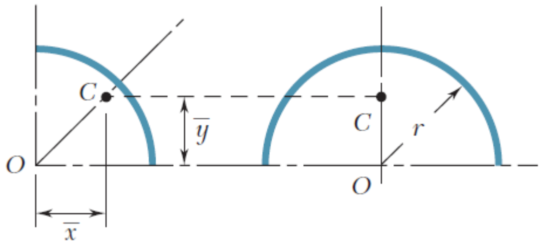
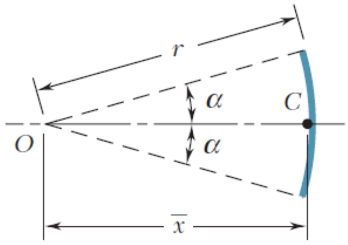
Bir daire diliminin geometri merkezi:



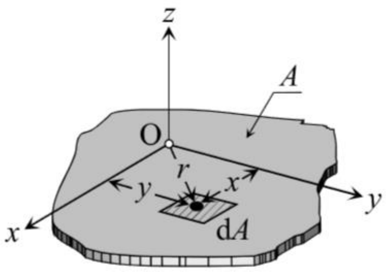
Örnek: Geometrik merkezinin yerini bulunuz.



	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
	0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
	0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
	$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
	0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
	$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Length
	$\dfrac{2r}{\pi}$	$\dfrac{2r}{\pi}$	$\dfrac{\pi r}{2}$
	0	$\dfrac{2r}{\pi}$	πr
	$\dfrac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Alan ve Çizgilerin Birinci Momentleri



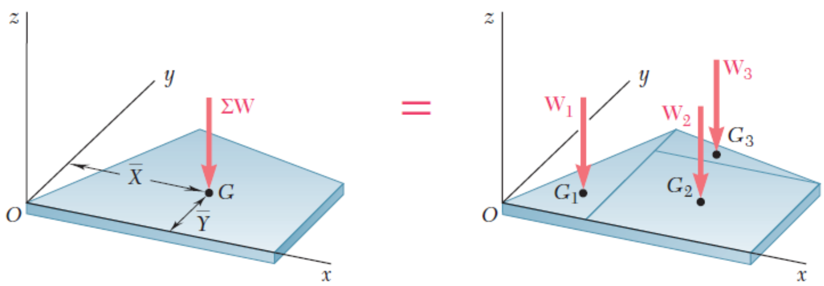
$$Q_y = \int x \, dA \qquad Q_x = \int y \, dA$$

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A$$

Birleşik Cisimler

Bileşik cisim, dikdörtgen, üçgen, yarım daire şeklinde birbirine bağlı basit şekilli cisimlerden oluşur. Böyle bir cisim genellikle parçalara bölünür, bu parçaların herbirinin ağırlığı ve ağırlık merkezinin konumu bilinirse, tüm cismin ağırlık merkezini belirlemek için integral işlemine gerek kalmaz.

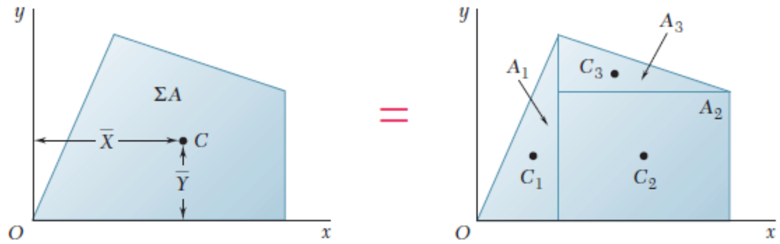
Basit geometrik alanların oluşturduğu kompozitalanların merkezlerinin bulunması için, kompozit alanı oluşturan bileşenlerin merkezleri kullanılır.



$$\Sigma M_y : \quad \bar{X}\,\Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

$$\Sigma M_x : \quad \bar{Y}\,\Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

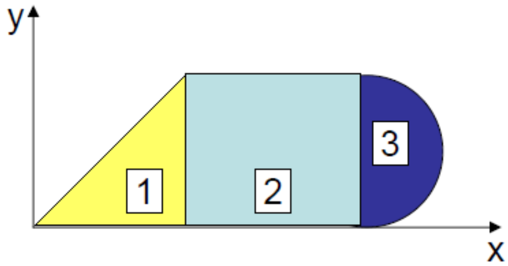
$$\overline{X}\Sigma W = \Sigma\overline{x}W \qquad \overline{Y}\Sigma W = \Sigma\overline{y}W$$



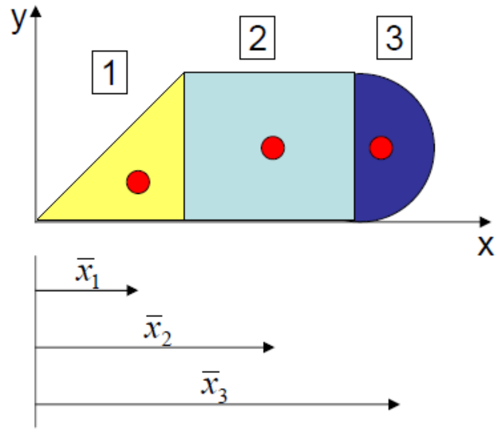
$$\bar{x} = \frac{\Sigma A x_c}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma A y_c}{\Sigma A}$$

$$Q_y = \overline{X}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \overline{x}_1 A_1 + \overline{x}_2 A_2 + \cdots + \overline{x}_n A_n$$
$$Q_x = \overline{Y}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \overline{y}_1 A_1 + \overline{y}_2 A_2 + \cdots + \overline{y}_n A_n$$

$$Q_y = \overline{X}\Sigma A = \Sigma\overline{x}A \qquad Q_x = \overline{Y}\Sigma A = \Sigma\overline{y}A$$



$$\overline{x} = \frac{\int_A x\,dA}{dA} = \frac{\int_{A1} x\,dA + \int_{A2} x\,dA + \int_{A3} x\,dA}{\int_{A1} dA + \int_{A2} dA + \int_{A3} dA}$$

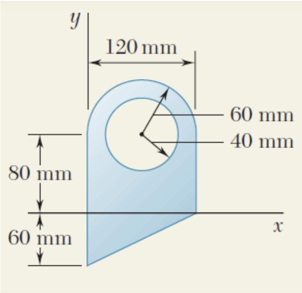


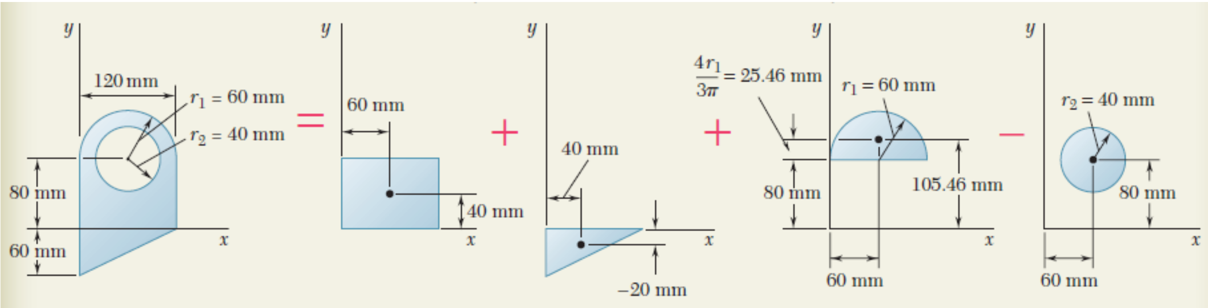
$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 A_1 + \overline{x}_2 A_2 + \overline{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum \overline{x}_i A_i}{\sum A_i} \qquad \overline{y} = \frac{\sum \overline{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

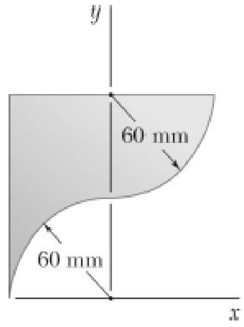
Homojen bir cismin kütle merkezi bulunurken cismin sadece geometrisi ile ilgilenmek yeterli olur. Cismin sedece geometrisi ile ilgilenilerek bulunan merkeze geometrik merkez denir. Homojen bir cismin kütle merkezi geometrik merkez ile çakışıktır. Dolayısı ile herhangi bir cismin, cisim homojen kabul edilerek, kütle merkezi bulunursa geometrik merkezi bulunmuş olur.

Örnek: Gösterilen düzlem alanın x ve y eksenlerine göre birinci momentlerini ve geometrik merkezinin yerini bulunuz.

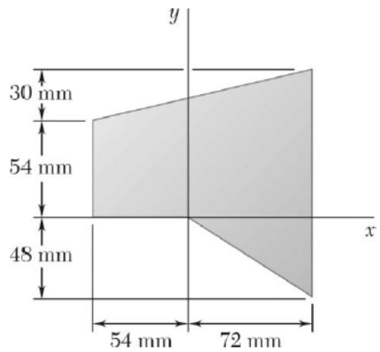




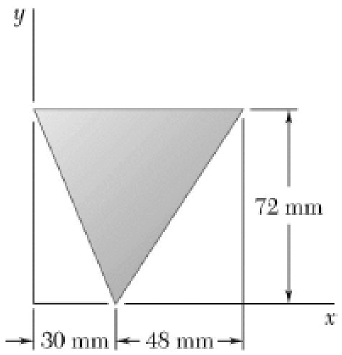
Örnek:



Örnek:



Örnek:



Örnek: