FRIEDMAN TESTİ

- İki yönlü sınıflamada kullanılan nonparametrik varyans analizidir. Özellikle ilişkili grupların olduğu durumlarda, grupları karşılaştırmak için kullanılır.

Kişi (Blok=i)	Muamele Grupları (j)
1	1, 2,……………………,……k
2	X_{11}, X_{12},,…………… X_{1k}
3	X_{21}, X_{22},,……………X_{2k}
…	……………………………………
…	……………………………………
b	X_{b1}, X_{b2},,……………X_{bk}

Burada X'lere rank verilir.

$$R_j = \sum_{i=1}^{b} R\left(X_{ij}\right)$$

i = 1,2,3,……..b

j = 1,2,3,……..k

R (Xij) : Sıra puanları (i. bloktan, j. grubun sıra puanı)

Rj : j. muamelenin sıra puanları toplamı

- Burada gruplar bağımsız, bloklar bağımlı. Ancak bir bloktaki neticeler, diğer bloktaki neticeleri etkilemiyor. Bir kişide yapılan değişik ölçümler bağımlıdır. Bloklar kendi aralarında bağımsızdır. Her blok içerisindeki gözlemler büyüklük sırasına dizilebilir.

$$\boxed{R_j = \sum_{i=1}^{b} R\left(X_{ij}\right)}$$

- H_0: Bir blok içerisindeki şans değişkenlerinin sıra puanı, başka blok içindeki şans değişkenlerinin sıra puanı birbirine benzerdir. Muameler benzer etkiye sahiptir.

  H_1: En az bir muamele diğerlerinden farklıdır.

$$H = \frac{12}{b \cdot k \cdot (k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right]^2$$

$$H = \frac{12}{b \cdot k \cdot (k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left[R_j^{\,2} - 3b\,(k+1) \right]$$

H değeri χ2 (k-1, α) dağılışıyla ölçülür

Örnek

- 12 doktordan ameliyatta tercih ettiği dört yöntemi, öncelik sırasına göre yazması isteniyor. Veriler aşağıdaki gibidir.

Doktor (blok = i)	Muamele Grupları (j)			
	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	4	2	3	1
3	3	1	2	4
4	4	2	1	3
5	3	1	2	4
6	1	3	2	4
7	2	4	1	3
8	3	1	2	4
9	3	1	2	4
10	4	1	3	1
11	4	2	3	1
12	3	1	2	4
R_j	38	22	25	35

b=12

k=4

$$H=\frac{12}{12\cdot 4\cdot(4+1)}\left[38^2+.....+35^2-3\cdot 12\cdot 5\right]=8,9$$

$$\chi^2_{3,\ 0,05}=7,815$$

$$8,9>7,815$$

olduğu için H0 reddedildi.

Gruplardan en az birisi diğerlerinden farklıdır.

Z Yaklaşımı ile Çözüm

- Beklenen değer = $E\left(R\left(X_{ij}\right)\right)=\dfrac{k+1}{2}$

$$V\left(R\left(X_{ij}\right)\right)=\frac{(k+1)\cdot(k-1)}{12}$$

Sütun toplamlari nin beklenen degerleri bulunursa,

$$E\left(R_j\right)=E\left[\sum_{i=1}^{b} R\left(X_{ij}\right)\right]=\frac{b\,(k+1)}{2}$$

$$V\left(R_j\right)=V\left[\sum_{i=1}^{b} R\left(V_{ij}\right)\right]=\sum_{i=1}^{b} V\left(R\left(X_{ij}\right)\right)=\frac{b\,(k+1)\cdot(k-1)}{12}$$

$$Z=\frac{R_j-E\left(R_j\right)}{\sqrt{V\left(R_j\right)}}$$

- Z'lerin kareler toplamı ne dağılışı gösterir?

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + Z_k^2 \Big\rangle \ \chi^2 \text{ dağılışı gösterir.}$$

$$H' = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left[R_j - E\left(R_j\right)\right]^2}{V\left(R_j\right)}$$

Örnek

- Tesadüfi seçilen 12 öğrenci, öğrenme deneyinde kullanılıyor. Her listede 12 adet kelime çifti var. Fakat listedeki eşlemeler farklı yöntemlerle yapılmıştır. Her öğrenciye önce I. liste veriliyor ve beş dakika üzerinde çalışması isteniyor. Daha sonra kelimeleri hatırlama yeteneği ölçülüyor. Her liste için aynı işlemler yapılıyor ve tam puan “20” olmak üzere puan veriliyor. Bazı listeleri öğrenmek daha kolay mı (öğrenciler birbirinden farklı öğreniyor mu)?

Öğrenci	Liste 1	Liste 2	Liste 3	Liste 4
1	18	14	16	20
2	7	6	5	10
3	13	14	16	17
4	15	10	12	14
5	12	11	12	18
6	11	9	9	16
7	15	16	10	14
8	10	8	11	16
9	14	12	13	15
10	9	9	9	10
11	8	6	9	14
12	10	11	13	16

$$\left.\begin{array}{l} \overline{R}_1 = 2{,}46 \\ \overline{R}_2 = 1{,}63 \\ \overline{R}_3 = 2{,}17 \\ \overline{R}_4 = 3{,}75 \end{array}\right\rangle$$

$$\overline{R}_4 \quad \overline{R}_1 \quad \overline{R}_3 \quad \overline{R}_2$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & b & \\ & & b & c \end{array}$$

$\underline{\text{fark}}$ *

$$\bar{R}_1 = 2{,}46 = b \qquad (\text{orta derece})$$

$$\bar{R}_2 = 1{,}63 = c \qquad (\text{en kötü})$$

$$\bar{R}_3 = 2{,}17 = bc \qquad (\text{orta ile kötü arasında})$$

$$\bar{R}_4 = 3{,}75 = a \qquad (\text{en iyi derece})$$

*Farklı harfler, grup farklılıklarını gösterir.

Güvenlik Sınırı

$$E\left(\overline{X}_1\right)=\mu_1$$

$$V\left(\overline{X}_1\right)=\frac{\sigma_2{}'}{n_1}$$

$$P\left(\overline{X}_1 - t\cdot S_{\overline{X}_1} < \mu < \overline{X}_1 + t\cdot S_{\overline{X}_1}\right)=(1-\alpha)\%$$

t **değeri** $= t_{(n1-1\ ,\ \alpha/2)}$

$$P\left(\overline{X}_1 - t \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n}} < \mu < \overline{X}_1 + t \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n}}\right) = 0{,}95 \ \ (\alpha = 0{,}05 \text{ iken})$$

Örnek: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ *'nin güven sınırı nedir?*

$$E\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) = V\left(\overline{X}_1\right) + V\left(\overline{X}_2\right) - 2\,\mathrm{Cov}\left(\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2\right)$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} - \frac{2\,\sigma_{12}}{n}$$

Bu formülde $n_1 = n_2 = n$ olmalı. Çünkü "n" ler birbirine karşılık incelenir.

$$\left.\begin{aligned}
&\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \\
&n1 = n2 = n \\
&V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - 2\frac{\rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{n}
\end{aligned}\right\rangle \text{ bağımsız ise III. terim yok olur.}$$

$$P\left((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t \cdot S_{\overline{X}_1\overline{X}_2} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t \cdot S_{\overline{X}_1\overline{X}_2}\right) = (1-\alpha)\%$$

$$\left.\begin{aligned}
&(1{,}333 - t \cdot 0{,}555 < \mu_1 - \mu_2 < 1{,}333 + t \cdot 0{,}555) \\
&(-0{,}447 < \mu_1 - \mu_2 < 3{,}114)
\end{aligned}\right\rangle \; t = 3{,}209 \quad \text{iken}$$

Örnek

- Altı at, antrenörleri tarafından farklı üç yüzeydeki pistte yarış performanslarına göre sınıflandırılıyor (puan veriliyor). Yarış pistlerinin yüzeyi; A pisti betondan, B pisti çamurdan ve C pisti de çimenden olmak üzere üç tipten oluşmaktadır. Yüzeyler dışında pistlerin diğer bütün özellikleri aynıdır. Aşağıda her atın her üç yüzeyli pistte koşma durumlarına göre puanları vardır. Yüksek puan alanlar daha iyi performansa işaret etmektedir. Aşağıdaki verilere göre, yarş performans puanları üç pistte farklı mıdır? Yani atların yarışda gösterdiği performansla yarıştıkları pistlerin yüzeyi ilişkili midir?

	A pisti (beton)	B pisti (çamur)	C pisti (çimen)
1. at	3	2	1
2. at	3	2	1
3. at	3	2	1
4. at	3	2	1
5. at	3	2	1
6. at	3	1,5	1,5

H_0: Pistlerin birbirinden farkı yoktur.
H_1: Pistlerin en az biri diğerlerinden farklıdır.

$$H=\frac{12}{b\cdot k\cdot(k+1)}\sum_{j=1}^{k}\left[R_j-\frac{b(k+1)}{2}\right]^2$$

$$H=\frac{12}{b\cdot k\cdot(k+1)}\sum_{j=1}^{k}\left[R_j^{\,2}-3b\,(k+1)\right]$$

H değeri χ2 (k-1, α) dağılışıyla ölçülür

$$H=\frac{12}{6\cdot 3\cdot(3+1)}\left[\left(18^2-3\cdot 6\cdot 4\right)+\left(11{,}5^2-3\cdot 6\cdot 4\right)+\left(6{,}5^2-3\cdot 6\cdot 4\right)\right]=11{,}565$$

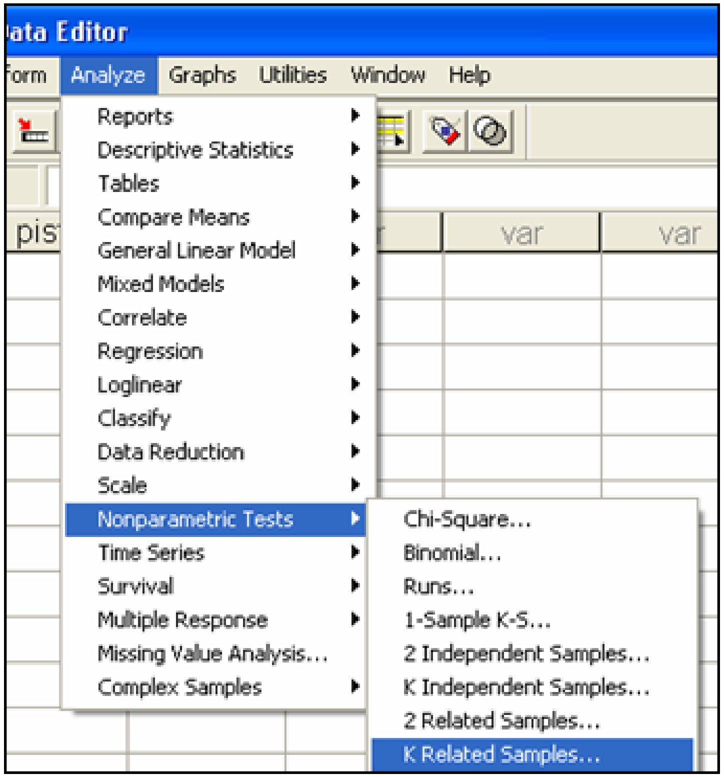
$$\chi^2_{(3-1=2),\ 0{,}05}=5{,}99$$

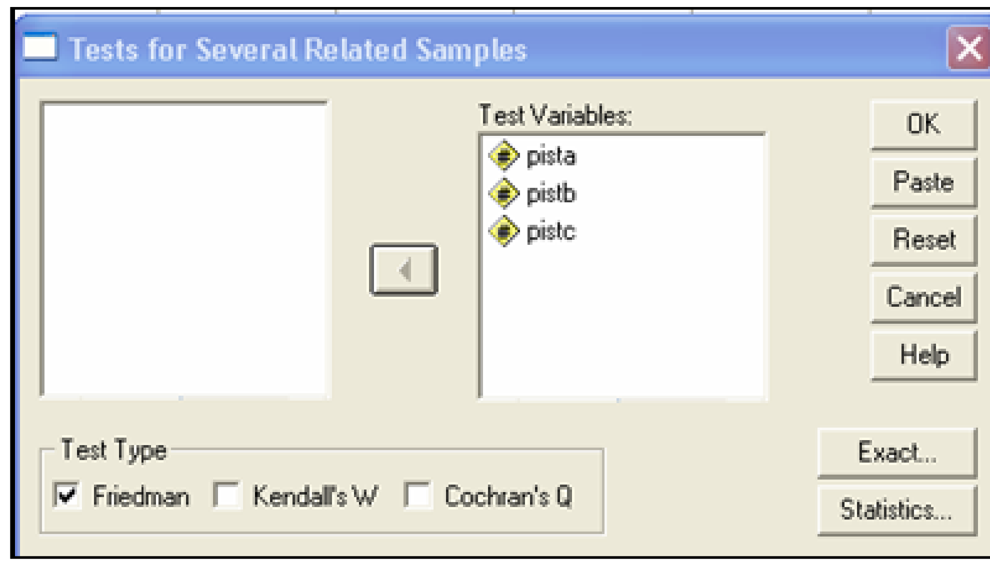
$$\underbrace{11{,}565>5{,}99}$$

Sıfır hipotezi reddedildi. Gruplardan en az birisi diğerlerinden farklıdır.

SPSS'te Yapılış

pista	pistb	pistc
3,00	2,00	1,00
3,00	2,00	1,00
3,00	2,00	1,00
3,00	2,00	1,00
3,00	2,00	1,00
3,00	1,50	1,50





Sonuç

Ranks

	Mean Rank
pista	3,00
pistb	1,92
pistc	1,08

Test Statistics(a)

N	6
Chi-Square	11,565
df	2
Asymp. Sig.	,003

a. Friedman Test

$x2 = 11,565$ ve $p = 0,003 < 0,05$ olduğu için H0 reddedildi. En az pistlerden birisi diğerlerinden farklıdır. Yani gösterdikleri performansla pist yüzeyi arasında ilişki vardır. Farkın hangi gruptan kaynaklandığını saptamak için "Bonferroni düzeltmeli Wilcoxon testi" yapılır.