

NORMAL DAĞILIŞLI BAĞIMSIZ İKİ GRUP ORTALAMALARI TESTİ

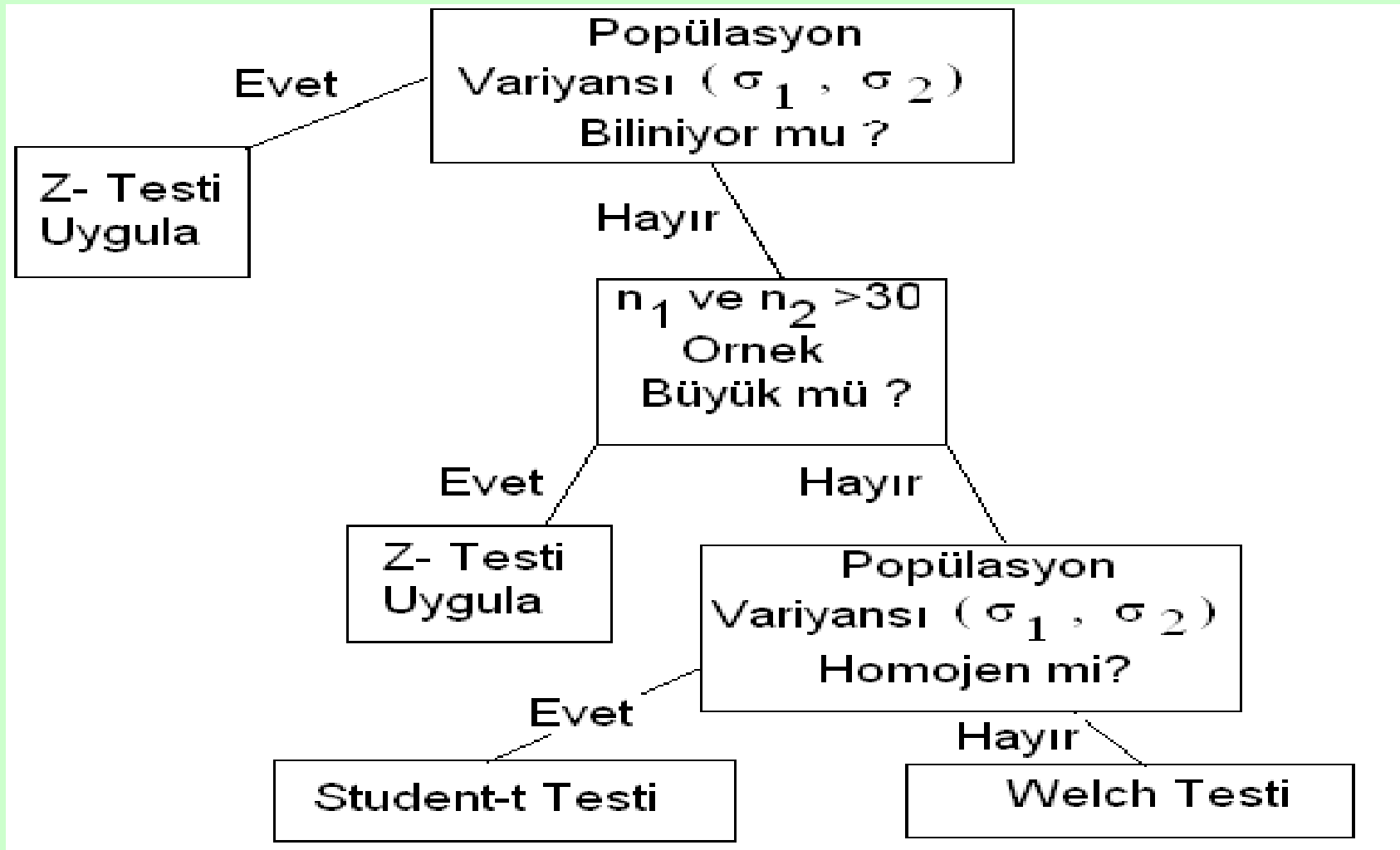
BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ A.D.

İKİ ORTALAMA ARASINDAKİ FARKIN ($\mu_1 - \mu_2$) TESTİ

İki ortalama arasındaki farkın testi yapılırken, kullanılacak test istatistikleri popülasyon varyansının bilinmesi ve örnek büyüklüğü dikkate alınarak aşağıdaki şekilde bir sınıflama yapılabilir :Gözlemler Normal dağılış gösteriyorsa, ve:

- 1)** Populasyon varyansları (σ^2_1 , σ^2_2) biliniyor veya populasyon varyansları bilinmiyor ancak; örnekler büyükse ($n \geq 30$)
- 2)** Populasyon varyansları bilinmiyor fakat homojen kabul edilebiliyorsa ($\sigma^2_1 = \sigma^2_2$),
- 3)** Populasyon varyansları bilinmiyor fakat homojen kabul edilemiyorsa ($\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$),

Test Tercihi Nasıl Yapılır?



Bu varsayımları kontrol için yapılacak kontroller

- Normallik ve simetriyi kontrol et
 - Ortalama ve medyanı incele
 - Çarpıklık ve basıklık katsayılarını incele
 - Her grubun histogram ve kutu grafiklerini çiz ve incele
- Variyans homojenliğini kontrol için
 - Kutu grafiklerini incele
 - Serpilme grafiklerini incele
- Aşırı gözlemleri belirlemek için
 - Kutu grafikleri incele
 - Serpilme grafiklerini incele
 - Histogramları incele

Populasyon varyansları (σ^2_1 , σ^2_2) biliniyorsa Z-test istatistiği)

- σ^2_1 ve σ^2_2 'nin değerleri biliniyorsa $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezine karşılık
 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ alternatif hipotezinin testi için

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx N_Z(0,1)$$

- test istatistiğinin değeri $\pm Z_{(1-\alpha/2)}$ cetvel değeri (burada yer alan indis kullanılan Z-cetveline göre farklı şekillerde yazılabilir, bu gösterim sağ kuyruk değerin cetveldən okunması hali için geçerlidir) ile karşılaştırılır. Eğer $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ ise $Z_{(1-\alpha)}$ cetvel değeri ile,
- eğer $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ ise Z_α cetvel değeri ile karşılaştırılır.

Popülasyon Variyansı (σ^2_1 , σ^2_2) Biliniyor.

- Araştırmacı, Psikoloji ve sosyoloji öğrencilerinin paranoya testinden aldıkları puanları karşılaştırmak için bir araştırma yapıyor.

Psikoloji ve sosyoloji öğrencilerine MMPI testi $N(50,10)$ uygulanıyor.

13 psikoloji öğrencisinin ortalama test puanı=**63.46**,

11 sosyoloji bölümü öğrencisinin ortalama puanı ise **53.81** olarak bulunuyor. Her iki grup ortalamalarının farklı olup olmadığını test ediniz.

Hipotezler: iki farklı şekilde kurulabilir:

$$H_0 : \mu_p = \mu_s$$

$$H_1 : \mu_p \neq \mu_s$$

$$H_0 : \mu_p - \mu_s = 0$$

$$H_1 : \mu_p - \mu_s \neq 0$$

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ

A.D.

Test İstatistiği (Z) Hesabı ve Karar verilmesi

Verilenler :

$$\alpha = .05,$$

$$n_p = 13,$$

$$n_s = 11$$

$$\bar{x}_p = 63.46, \bar{x}_s = 53.81$$

$$Z_{\text{hesap}} = \frac{\bar{x}_p - \bar{x}_s}{\sqrt{\frac{\sigma_p^2}{n_p} + \frac{\sigma_s^2}{n_s}}}$$

$$= \frac{63.46 - 53.81}{\sqrt{\frac{100}{13} + \frac{100}{11}}}$$

$$= \frac{9.64}{4.10}$$

$$= 2.35$$

$$p(z > 2.35) = .00949$$

$$p(z < -2.35) = .00949, \quad P_h = 0.0188$$

$$P_h = 0.0188 < 0.05 = P_c = \alpha$$

H0 ret edilir

Karar: Psikoloji bölümü öğrencilerinin MMPI puan ortalamaları sosyoloji bölümü öğrencilerinden önemli derecede farklıdır ($p < 0.05$)

Ortalama Farkının % 95 lik Güven Sınırları

$$\bar{X}_p - \bar{X}_s \pm \left(Z_{crit} * \sqrt{\frac{\sigma_p^2}{n_p} + \frac{\sigma_s^2}{n_s}} \right)$$

$$\Rightarrow (63.46 - 53.81) \pm \left(1.96 * \sqrt{\frac{100}{13} + \frac{100}{11}} \right)$$

$$\Rightarrow 9.65 \pm (1.96 * 4.09)$$

$$\Rightarrow (1.62, 17.68)$$

ÖRNEK : (σ^2_1, σ^2_2) Biliniyor,

- Variyansı $\sigma^2_1 = 12$ olan bir popülasyondan $n_1 = 8$, varyansı $\sigma^2_2 = 15$ olan diğer popülasyondan ise $n_2 = 6$ fertlik örnekler alınmıştır.

Populasyonlar normal dağılımlı olarak farzedildiğinde.

- Örnek ortalamaları bulunduğuna göre %1 önem seviyesinde ortaya atılan
 - $H_0: \mu_1 = \mu_2$ veya $\mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezine karşı,
 - $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ veya $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ hipotezine karşı
- kontrol edilmek istenirse, ortalamaların farkın dağılışı;

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \approx N \left[(\mu_1 - \mu_2); \left(\frac{12}{8} + \frac{15}{6} \right) \right]$$

şeklinde bir dağılış gösterir.
Buna göre **Z test** istatistiği ,

$$Z = \frac{(15-11) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{12}{8} + \frac{15}{6}}} = \frac{(15-11) - (0)}{\sqrt{\frac{12}{8} + \frac{15}{6}}} = 2.00 \approx N_Z(0,1)$$

Yukarıda hesaplanan **Z = 2.00** değeri, $P(Z < z_\alpha)$ için hazırlanmış cetvelden $\pm Z_{(1-\alpha/2)}$, yani $\alpha=0.01$ için $Z_{(1-0.01/2)} = Z_{0.995}$ cetvel değeri ile veya $P(Z > z_\alpha)$ için hazırlanmış cetvelden $Z_{(\alpha/2)} = Z_{0.005}$ cetvel değeri ile karşılaştırılır.

Karar Aşaması:

$Z_{0.005} = \pm 2.58$ olduğundan mutlak değer olarak karşılaştırma yapılır ve $|2.0| < |2.58|$ olur. Buna göre H_0 hipotezi reddedilmemiştir.

<u>Z</u>	<u>Eklemeli p</u>	<u>Kuyruk p</u>
2.56	0.9948	0.0052
2.57	0.9949	0.0051
2.58	0.9951	0.0049

Variyanslar (σ^2_1 , σ^2_2) Bilinmiyorsa Örnek Tahminleri Kullanılır

iki grup için varyans tahmini

$$Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = Var(\bar{X}_1) + Var(\bar{X}_2) - 2 \text{cov}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

1. İki grup bağımsız ise:  Bu 3. terim sıfır olur !

- Variyanslar heterojen ise:

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= Var(\bar{X}_1) + Var(\bar{X}_2) + 0 \\ &= \frac{Var(X_1)}{n_1} + \frac{Var(X_2)}{n_2} \end{aligned}$$

- İki grup variyanıı homojense:

Yani, $Var(X_1) = Var(X_2)$ ise

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= \frac{Var(X)}{n_1} + \frac{Var(X)}{n_2} \\ &= Var(X) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \end{aligned}$$

$$Var(X) = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Varyanslar bilinmiyor fakat homojense ($\sigma^2_1 = \sigma^2_2$) bu durumda Student t-test istatistiği kullanılır :

- $H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ hipotezi yapılan test sonucunda kabul edildiğinde
- iki örnekli t-istatistiği kullanılır.
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ için t-istatistiği;

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \approx t_{(n_1 + n_2 - 2; \alpha / 2)}$$

olup burada,

Ortak variyans (S_p^2) hesabı

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

dir.

İlgili hipotezler ve kritik tablo değerleri,

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ için $\pm t_{(\alpha/2; n_1+n_2-2)}$
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ için $+ t_{(\alpha; n_1+n_2-2)}$
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ için $- t_{(1-\alpha/2; n_1+n_2-2)}$

(tablodan okunan t değerinin negatif değerlisi alınır) cetvel değerleri ile karşılaştırılır.

Örnek: Elle ve SPSS ile Çözümü,

- Psikologlar uykunun hatırlama üzerine etkisini araştırıyor. Günde 8 saat uyuyan 12 öğrenci ile günde 5 saat uyuyan diğer 12 öğrenciye hatırlama testi uyguluyor. Aldığı puanlar aşağıdaki şekilde belirleniyor.

8 saat uyuyan		5 saat uyuyan	
55	58	48	55
43	45	38	40
51	48	53	49
62	54	58	50
35	56	36	58
48	32	42	25

Hipotez ve Test İstatistiği

$$\begin{array}{ll} H_0 : \mu_1 = \mu_2 & H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 & \text{veya} \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{array}$$

Şeklinde H_0 ve H_1 kurulabilir

$$\alpha = 0.05, \quad n_1 = 12, \quad n_2 = 12$$

$$t_{\text{hes}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$S_p = S_{\text{ortak}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{(11)9.06^2 + (11)10.02^2}{22}} = 9.5509$$

$$t_h = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(48.92 - 46.00)}{9.5509 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = \frac{2.92}{3.899} = 0.748$$

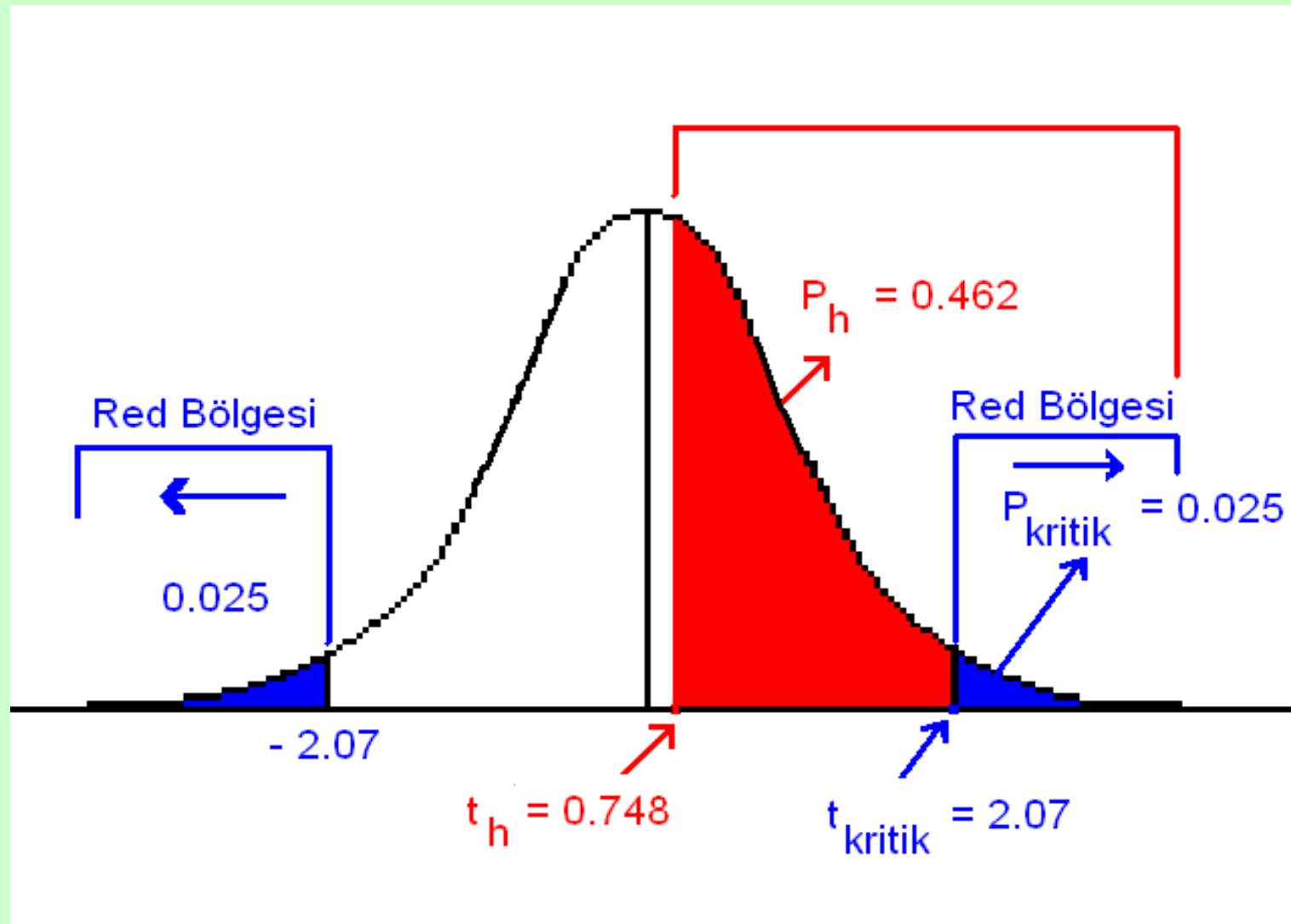
$$p_h = 0.462 > 0.05 = p_{\text{kritik}} = \alpha$$

Veya

$$|t_h(22) = 0.748| < |2.07 = t_{\text{kritik}}(22)|$$

Ho ret edilemez, Karar: İki grup arasında istatistiki olarak önemli bir fark yoktur ($p > 0.05$)

Kritik Dağılış Değeri ve olasılığı



Ortalama Farkının Güven sınırları

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm \left(t_{\text{kritik}} * S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

$$2.92 \pm (2.074 * 3.899) \Rightarrow (-5.17, 11.00)$$

SPSS Çözümü: Gurup-1 tanımlayıcı istatistikleri

GROUP			Statistic	Std. Error
MEMORY	1.00	Mean	48.9167	2.61539
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	
			Upper Bound	
			43.1602	
			54.6731	
		5% Trimm ed Mean	49.1296	
		Median	49.5000	
		Variance	82.083	
		Std. Deviation	9.05999	
		Minimum	32.00	
		Maximum	62.00	
		Range	30.00	
		Interquartile Range	12.2500	
		Skewness	-.601	.637
		Kurtosis	-.255	1.232

Gurup-2 tanımlayıcı istatistikleri

GROUP			Statistic	Std. Error
MEMORY	2.00	Mean	46.0000	2.89200
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	
			Upper Bound	
			39.6348	
			52.3652	
		5% Trimmed Mean	46.5000	
		Median	48.5000	
		Variance	100.364	
		Std. Deviation	10.01817	
		Minimum	25.00	
		Maximum	58.00	
		Range	33.00	
		Interquartile Range	16.0000	
		Skewness	-.687	.637
		Kurtosis	.048	1.232

	GROUP	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
MEMORY	1.00	12	48.9167	9.05999	2.61539
	2.00	12	46.0000	10.01817	2.89200

Variyanslar homojense ilk satır esas alınır
Değilse ikinci satır esas alınır.

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
MEMORY	Equal variances assumed	2.56	.618	.748	22	.462	2.9167	3.69922	-5.16982	11.00315
	Equal variances not assumed			.748	21.781	.462	2.9167	3.69922	-5.17453	11.00786

Variyans homojenlik testi
 $0.618 > 0.05$ homojendir

Hesaplanan t-istatistiği
 $t=0.748$

Hesaplanan p olasılığı
0.462

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ
A.D.

ÖRNEK:

Denek sayısı farklı olan iki gruptan birincisine A muamelesi, ikincisine B muamelesi uygulanıyor. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde bulunuyor:

											ni		S_i^2
A Muamelesi	18	13	12	14	19	17	11	15	18	13	10	15	8
B Muamelesi	12	8	15	9							4	11	10

$H_0 ; \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ ' in testi için basit olarak F testi ile varyans homojenlik kontrolü yapılırsa;

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ olur.}$$

4 den küçükse kabaca homojen kabul edilebilir.

BIYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ

A.D.

- Bu değer, F max tablo değeri $F_{(3,9,0.05)} = 3.86$ değeri ile karşılaştırılırsa varyansların homojen olduğuna dair sıfır hipotezi reddedilemez ($P > 0.05$).
- Madem ki varyanslar homojen kabul edilebilmekte, bu durumda ortak bir varyans altında her iki örneğin varyansını birleştirmek mümkündür.
- Böylece **birleştirilmiş** (ortak) **varyans**,

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} = \frac{(10 - 1) \cdot 8 + (4 - 1) \cdot 10}{(10 + 4 - 2)} = 8.5$$

Test İstatistiği Hesabı

olur.

Bu durumda

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ karşı ,

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ testi için t-istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$t = \frac{(15 - 11) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{8.5 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right)}} = \frac{(15 - 11) - (0)}{\sqrt{8.5 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4} \right)}} = 2.32 \approx t_{(n_1 + n_2 - 2; \alpha / 2)}$$

$|2.32| > |t_{(12, 0.05)} = 2.18|$ olduğundan H_0 reddedilir. Yani **karar**: iki muamele ortalaması istatistiki olarak birbirinden önemli derecede farklıdır ($P < 0.05$).

Bu test istatistiğinde
iki örnek büyüklüğü ($n_1 = n_2 = n$) eşit ise,
birleştirilmiş varyans S^2_p daha kolay hesaplanır.

$S^2_p = (S^2_1 + S^2_2) / 2$ ve t-istatistiği daha basit yazılabilir:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)}} \approx t_{(2.n - 2; \alpha / 2)}$$

olur.

Varyanslar (σ^2_1 ve σ^2_2) bilinmiyor ve eşit varsayılamıyorsa ($\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$) yaklaşık t-testi olan Satterthwaite -t (t'-test istatistiği) kullanılır:

$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$, $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ hipotezleri, variyans heterojenlik testlerinden biri ile veya iki varyansın oranına ait F dağılışı ile test edildiğinde, H_0 ret edilirse popülasyon varyanslarının eşit olmadığına karar verilir.

Dolayısıyla bu durumda ortak bir varyans (S^2_p) bulunamayacaktır. Bu durumda t benzeri bir test istatistiği olan **t'** istatistiği kullanılabilir.

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 ,$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ için sözü edilen test istatistiği,

$$t' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = t_{(v, \alpha / 2)}$$

şeklindedir ve Welch veya Satterthwaite testi, yaklaşık t dağılışı gösterir.

Bu test istatistiğine ait cetvel değeri yeni bir serbestlik derecesi (**v**) hesaplanarak elde edilebilir.

- $w_1 = S^2_1 / n_1$ ve $w_2 = S^2_2 / n_2$ denirse, yaklaşık serbestlik derecesi (**v**) aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)^2}{\frac{\mathbf{w}_1^2}{\mathbf{n}_1 - 1} + \frac{\mathbf{w}_2^2}{\mathbf{n}_2 - 1}}$$

Veya doğrudan t değerleri kullanılabilir

Dolayısıyla $t' \sim t_{(v, \alpha/2)}$ dağılışı gösterir. t cetvelinden v serbestlik dereceli $\alpha/2$ olasılıklı değer bulunur ve hesaplanan değerle karşılaştırılır.

t' 'ne ait cetvel değerinin bir başka hesaplanış şekli ise şöyledir: t-Cetvelinden (n_1-1) s.d. için t_1 değeri ve (n_2-1) s.d. için t_2 değeri' okunur, aşağıdaki formül yardımı ile doğrudan karşılaştırılacak değer bulunur. Bu t' cetvel değeri,

$$t' \text{ (cetvel)} = \frac{w_1 \cdot t_1 + w_2 \cdot t_2}{w_1 + w_2}$$

formülü ile bulunabilir.

Örnek

	A muamelesi	B muamelesi
	100	113
	101	117
	100	105
	105	115
	101	116
	104	108
	102	120
	-	118
	-	116
	-	112
n_i	7	10
Ortalamalar	101.86	114.00
S_i^2	3.81	19.43

Variyans homojenlik kontrolü yapmak için,

- $H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$, $H_1: \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ hipotezi test edilecek olursa, $F = 19.43 / 3.81 = 5.10 > 4.10 = F_{9,6,0.05}$ olduğundan varyanslar heterojendir.

Dolayısıyla t' istatistiği kullanılmalıdır.

Hipotezler ,

- $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$,
- $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ise ;

Test İstatistiği Hesaplanması

$$t' = \frac{(101.85 - 114.00) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{3.81}{7} + \frac{19.43}{10}}} =$$
$$\frac{(101.85 - 114.00) - (0)}{\sqrt{\frac{3.81}{7} + \frac{19.43}{10}}} =$$
$$\frac{12.25}{1.577} = -7.762 \approx t_{(v, \alpha / 2)}$$

yaklaşık serbestlik derecesi ,

Yaklaşık Serbestlik Derecesi (v) Hesabı

$$v = \frac{\left(\frac{3.81}{7} + \frac{19.43}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{3.81}{7}\right)^2}{7-1} + \frac{\left(\frac{19.43}{10}\right)^2}{10-1}} = 13.196 \approx 13$$

Karar Aşaması:

Cetvelden $t_{13,0.05} = 2.160$ bulunur. $|7.762| > |2.160|$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir.

Diğer bir yol, t' cetvel değeri hesaplanırsa ;

$t_1 = t_{6,0.05} = 2.447$, $t_2 = t_{9,0.05} = 2.262$ olduğundan

$$w_1 = 3.81 / 7 = 0.5443 \quad w_2 = 19.433 / 10 = 1.9433$$

bulunur ve buradan,

$$t' \text{ cetvel} = (0.5443 \times 2.447 + 1.9433 \times 2.262) / (0.5443 + 1.943) = 5.728 / 2.4876 = 2.302$$

olarak bulunur.

Yine, $|7.762| > |2.302|$ olduğundan H_0 reddedilir.

SPSS Çözümü

- Welch istatistiği sapmasız tahmin verir, ancak düzeltilmemiş-t değerinden daha az güçlüdür.
- Eğer popülasyon variyansları heterojense düzeltilmemiş-t değeri sapmalı tahmin verecektir.

		t-test for Equality of Means						
		t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
							Lower	Upper
DV	Equal variances assumed	.228	18	.822	.2000	.87560	-1.63956	2.03956
	Equal variances not assumed	.228	10.368	.824	.2000	.87560	-1.74160	2.14160

SPSS de Variyanslar Eşit değilse Uygulanan Formüller

Serbestlik derecesi düzeltilir:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{(n_2 - 1)c^2 + (n_1 - 1)(1 - c^2)}$$

$$c = \frac{\frac{S_1^2}{n_1}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

NORMAL DAĞILIŞLI
BAĞIMLI İKİ GRUP
OLMASI DURUMUNDA ORTALAMALARIN
FARKLILIĞININ KONTROLÜ İÇİN TESTLER

- Deneme üniteleri çifti, tesadüfi olmaktan ziyade benzer iseler veya tabii birer eş iseler, bu özellik deneysel hatayı düzeltmek için kullanılabilir.
- Bunlar, genellikle aynı fert üzerinde farklı zamanlarda ölçümler alındığında ve bunların karşılaştırılması söz konusu olduğunda, ikiz canlılardan birine bir muamele diğerine başka bir muamele uygulandığında ve iki muamelenin karşılaştırılması istendiği vb durumlarda ortaya çıkar.

- Eşleştirilmiş fertlerle yapılan testlerde kullanılan test istatistiği daha önceki grup karşılaştırmalarında kullanılanlardan daha farklıdır. Çünkü grup karşılaştırmalarında X_1 ile X_2 değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktaydı. Eşleştirilmiş gözlemlerde ise X_{1i} ve X_{2i} (kısaca X_1 ve X_2) ölçümleri aynı birey üzerinde veya çok benzer bireyler üzerinden yapıldığı için bağımlı olacaktır. Yani $n_1 = n_2 = n$ (gözlem çifti sayısı) olacağından,

Gözlemler bağımlı ise ortalamaların farkının variyanstaki farklılık

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) - 2 \cdot \text{Cov}(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - \left(2 \cdot \frac{\sigma_{12}}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - 2 \cdot \rho_{12} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \\ &= \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} - 2 \cdot \rho_{12} \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{n} \end{aligned}$$

olur.

X_1 ile X_2 arasında **pozitif korelasyon** varsa standart hata **$2 \cdot \rho \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2) / n$** kadar küçülecektir.

Dolayısıyla bu durumda eş yapma yöntemi uygulanması gerekirken veriye grup karşılaştırması yapılırsa, standart hata yapay olarak küçüleceğinden **önemli çıkmaması gereken farklılık önemli çıkacaktır**. Negatif korelasyon olması durumunda da bunun tersine standart hata yapay olarak büyütüleceğinden gerçekte önemli çıkacak bir fark, önemsiz bulunabilecektir.

- Eşli karşılaştırmada gözlem çiftleri arasındaki korelasyonun etkisini yok etmek için ortalamaların farkı yerine gözlem çiftlerinin farkları alınarak bu farkların ortalamasının sıfırdan veya belirli bir değerden farklılığı test edilir.

Bağımlı Gruplarda Eşli (Paired) Gözlemler T- Testi

Oral Kontraseptif alındığında bayanların sistolik kan basıncında yükselme olduğu iddia edilmektedir. Tesadüfen seçilen **10** bayanın oral kontraseptif almadan **önce ve sonra** sistolik kan basınçları ölçülüyor,

Aşağıdaki değerler bulunuyor.

Buna göre iddianın doğru olup olmadığını kontrol ediniz($\alpha=0.05$).

Test eşli karşılaştırma çünkü, ölçümler aynı kişiler üzerinde yapılmış ve gözlemler bağımlıdır.

Eşli (Paired) Gözlemler Testi Örnek:

OC-Öncesi	OC-Sonrası	$d=b-a$	d^2
115	128	13	169
112	115	3	9
107	106	-1	1
119	128	9	81
115	122	7	49
138	145	7	49
126	132	6	36
105	109	4	16
104	102	-2	4
115	117	2	4
	Toplam	48	418

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ

A.D.

Hipotezler:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ veya

Hipotezler farkların ortalaması δ Cinsinden Yazılırsa;

$H_0: \delta = 0$ ve $H_1: \delta \neq 0$ şeklinde de kurulabilir.

Bunun için farkların ortalaması ve variyansı bulunursa

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{48}{10} = 4.8$$

$$S^2_d = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{418 - \frac{48^2}{10}}{10-1} = 20.8$$

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ

A.D.

Bunlar kullanılarak test istatistiği hesaplanabilir.

$$t = \frac{d - \delta}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}} = \frac{4.8 - 0}{\sqrt{\frac{20.8}{10}}} = \frac{4.8}{1.44} = 3.33 \approx t_{(n-1; \alpha/2)}$$

Önem seviyesi, $\alpha=0.01$ ise,

$t_h=3.33 > t_{(9,0.005)} = 3.25$ olduğundan H_0 red edildi, yani

Karar:

Oral kontraseptif alınmasının sistolik kan basıncı üzerine önemli bir etkisi vardır ($p<0.01$).

Eşli t- Testi İçin Örnek 2

Akciğer fonksiyonunun bir ölçüsü olan **FEV** (**f**orced **e**xpiratory **v**olume) belirleniyor.

İddia:

20 yaşından sonra akciğer fonksiyonu azalıyor.

Deneme:

Aynı kişilerin 18 ve 22 yaşında iken FEV değerleri ölçülüyor.

Aşağıdaki sonuç bulunuyor.

Buna göre bu iddiayı kabul eder misiniz ($\alpha=0.05$)?

	Önce-FEV	Sonra-FEV	Fark=Ö-S
	(18 Yaş)	(22 yaş)	0,27
	3,22	2,95	0,31
	4,06	3,75	-0,15
	3,85	4,00	0,08
	3,50	3,42	0,03
	2,80	2,77	0,05
	3,25	3,20	0,30
	4,20	3,90	0,29
	3,05	2,76	0,11
	2,86	2,75	0,18
Ortalama	3,50	3,32	0 ,1470
Standart Hata			0 . 0476

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0;$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ veya $H_0: \delta = 0$, $H_1: \delta > 0$

Değişken	N	Ort	Stsap.	SH
Fark (Ö-S)	10	0,1470	0,1505	0,0476

$$t = \frac{0.1470 - 0}{\frac{0.1505}{\sqrt{10}}} = 3.09 > t_{9,0.05} = 1.833$$

Buna göre H_0 reddedilir

T- dağılışı Tablo Değerleri

t- Dağılışının Kritik Değerleri
İki yönlü test değerleri
(Tek yönlü test değerleri)

sd	0.2 (0.1)	0.1 (0.05)	0.05 (0.025)	0.02 (0.01)	
4	1,533	2,132	2,776	3,747	
5	1.476	2.015	2.571	3.365	
6	1.440	1.943	2.447	3.143	
7	1.415	1.895	2.365	2.998	
8	1.397	1.860	2.306	2.896	
9	1.383	1.833	2.262	2.821	

Güven Sınırları

Güven sınırı için iki yönlü t-tablo değeri kullanılır.

Farkın %95 güven sınırları: $(0,0393; 0,2547)$

$$0.1470 - 2.262 * 0.0476 = 0.0393$$

$$0.1470 + 2.262 * 0.0476 = 0.2547$$

Farkların T-Testi

$$H_0: m_1 - m_2 = 0;$$

$$H_1: m_1 - m_2 > 0$$

$$t = 3,09 \quad \text{P-olasılığı} = 0,006$$

Karar: FEV değerleri önemli derecede düşmüştür.

Örnek 3

- Yürüyüşten **önceki ve sonraki** PEFR değerleri arasındaki fark:

Hasta	Önce (PEFR)	Sonra (PEFR)	Fark=di= (önce-sonra)
1	312	300	12
2	242	201	41
3	340	232	108
4	388	312	76
5	296	220	76
6	254	256	-2
7	391	328	63
8	402	330	72
9	290	231	59

SPSS Çözümü

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Önce	323,889	9	59,8257	19,9419
	Sonra	267,778	9	50,0069	16,6690

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Önce & sonra	9	,821	,007

Paired Samples Test

Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
			Lower	Upper			
56,1111	34,1740	11,3913	29,8427	82,3796	4,926	8	,0012

Hesaplanan t-değeri

Hesaplanan olasılık değeri

Yürüyüşten önceki ve sonraki PEFR değerleri arasındaki fark:

- Farkların ortalaması = 56.11111 ($n = 9$)
- Standart sapması = 34.17398
- Standart hatası = 11.39133

Farkların ortalamasının % 95 lik güven sınırları

Alt güven sınırı = 29.84266,

Üst güven sınırı = 82.37956

Serbestlik derecesi (df) = 8

- $t = 4.925774$