

İKİ BAĞIMSIZ GRUP KARŞILAŞTIRILMASI

WILCOXON SIRA SAYILARI TOPLAMI

MANN-WHITNEY-U TESTİ

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ

Wilcoxon Sıra Sayılar Toplamı Testi

Bireyler	1	2	3	n_1	..	n_2	
Grup1	X_1	X_2	X_{n_1}			
Grup2	Y_1	Y_2	Y_{n_2}	

$$n_1 \leq n_2, n_1 + n_2 = N$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 ;$$

veya $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ veya $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ olabilir.

Böyle bir hipotezi test için X değerlerinden δ_0 çıkarılarak elde edilen değerler Y lerle birlikte büyüklük sırasına dizilir.

Eğer $\delta_0 = 0$ ise doğrudan X ler ve Y ler karıştırılarak büyüklük sırasına dizilir. Sonra gözlemlere sıra puanları verilir.

Wilcoxon Sıra Sayıları Toplam Testi

Daha sonra X lerle ilgili gözlem değerlerine ait sıra puanları esas alınarak W_1 ve W_2 hesaplanır.

W_1, W_2 den küçük n için hesaplanan test istatistiği W_h olarak adlandırılır.

$$W_h = \sum_{i=1}^{n_1} Ri$$

Tablodan doğrudan W_c değer (kısaca C denirse) okunur ve hesaplanan W_h ile karşılaştırılır.

Wilcoxon Sıra Sayıları Toplam Testi

H1 hipotezinin tek veya çift yönlü oluşuna göre ret bölgeleri değişir.

1. H1 de ret bölgesi

$W_h \geq W_C$ ve $W_h \leq (n_1(N+1) - W_C)$ dir.

2. H1 için: $W_h \geq W_{C1}$ ve

3. H1 için $W_h \leq W_{C2}$ olur.

Yani:

$$P(W_h \geq W_C) = \alpha/2,$$

$$P(W_h \geq W_{C1}) = \alpha,$$

$$P(W_h \leq W_{C2}) = \alpha$$

Wilcoxon Sıra Sayıları Toplam Testi

Örnek büyükse ($n_{\text{büyük}} > 20$) Z yaklaşımı kullanılabilir.

$$\mu_w = \frac{n_1 \cdot (N + 1)}{2} \text{ ve } \sigma_w^2 = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (N + 1)}{12}$$

$$Z = \frac{W - \mu_w}{\sqrt{\sigma_w^2}}$$

Mann-Whitney-U Testi

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - W_1$$

veya

$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2 + 1)}{2} - W_2 \quad ; \quad U_1 = n_1 \cdot n_2 - U_2 \text{ dir.}$$

Test istatistiği olarak hesaplanan **U1** ve **U2** den küçük olan **U** alınarak bu **Uh** test istatistiği tablodan okunan kritik **Uc** değeri ile karşılaştırılır.

$U_h \leq U_c$ ise H_0 ret edilir.

Örnek büyükse Z yaklaşımı kullanılır.

Z- Yaklaşımı ve bağ düzeltmesi

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{N}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (N + 1)}{12}}}, \text{ burada } N = n_1 + n_2 \text{ dir.}$$

Bağlı gözlemler varsa düzeltme yapılır.

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{N}}{\sqrt{\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{N(N-1)}\right) \cdot \left(\frac{N(N^2-1)}{12} - \sum T\right)}}, \text{ burada } N = n_1 + n_2 \text{ dir.}$$

Burada $\sum T = \frac{t^3 - t}{12}$ dir. t : her bir çiftteki bağli gözlem sayisidir.

U ile W arasında ilişki vardır.
Her iki test sonucunda da aynı karar verilir.

$$U = \frac{n_1(N + n_2 + 1)}{2} - W$$

Örnek:

X:68,65,80,61,64,64,63,73,75,71; $n_1=10$

Y: 70,70,71,72,72,71,75,74,81,72,74,71, $n_2=12$

Birleştirilmiş örnek ve sıra puanları:

Sıraya dizilmiş veriler:

61,63,64,64,65,68,70,70,71,71,71,71,72,72,72,73, 74,74,75,75, 80, 81

Bunlara Ait Sıra puanları:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

Bağa göre ayarlanmış sıra puanları:

1,2,3.5,3.5,5,6,7.5,7.5, 10.5, 10.5, 10.5, 10.5, 14,14,14, 16,
17.5,17.5,19.5,19.5, 21,22

Agirlik Artislar, Sira Puanlari ve Gruplar

61	1,0	1
63	2,0	1
64	3,5	1
64	3,5	1
65	5,0	1
68	6,0	1
70	7,5	2
70	7,5	2
71	10,5	1
71	10,5	2
71	10,5	2
71	10,5	2

72	14,0	2
72	14,0	2
72	14,0	2
73	16,0	1
74	17,5	2
74	17,5	2
75	19,5	1
75	19,5	2
80	21,0	1
81	22,0	2
Ağırlık artışı	Sıra puanları	gruplar

X	R	Y	R
68	6	70	7.5
65	5	70	7.5
80	21	71	10.5
61	1	72	14
64	3.5	72	14
64	3.5	71	10.5
63	2	75	19.5
73	16	74	17.5
75	19.5	81	22
71	10.5	72	14
		74	17.5
		71	10.5
Toplam	88		165

Küçük Toplam **88** dir.

$$\sum R_i = 88$$

Wilcoxon sıra puanları toplamı hesabı:

Wh=88, dir.

Mann-Whitney- U test istatistiği hesabı:

$$U_1 = 10 \times 12 + \frac{10 \times (11)}{2} - 88 = 87$$

veya

$$U_2 = 10 \times 12 + \frac{12 \times (13)}{2} - 165 = 33 ;$$

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 - U_2 \text{ dir.}$$

U'lardan küçük olan, **Uh=33** değeri test istatistiği olarak alınır.

Wilcoxon Testi Sonucu Karar

- Her iki grup için sıra puanlarının toplamları bulunursa: $n_1=10$, için $W_1=88$, $n_2=12$ için $W_2=165$ olur. Buna göre küçük olan alınır, $W_h=88$ alınır.
- Wilcoxon kritik değerler tablosuna bakıldığında $n_1=10, n_2=12$ için kritik değer 85 dir. Yani $W_h \leq 85$ olursa H_0 red edilecektir.
- Örneğimizde $W_h=88 > W_c=85$ olduğundan H_0 ret edilemez.

Yani gruplar arasında önemli bir fark yoktur ($p > 0.05$).

Wilcoxon Sıra Puanları Toplamı W için Kritik Değerler

3

Bağımsız Grupların Karşılaştırılması P 'nin %5 ve %1 düzeyinde
%5 Kritik Noktalar

$n1 \rightarrow$ Küçük n değeri bu yönde seçilir

$n2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4			10							
5		6	11	17						
6		7	12	18	26					
7		7	13	20	27	36				
8	3	8	14	21	29	38	49			
9	3	8	15	22	31	40	51	63		
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78	
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99

Mann-Whitney –U Testi Sonucu Karar

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - W_1$$

veya

$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2 + 1)}{2} - W_2 \quad ; \quad U_1 = n_1 \cdot n_2 - U_2 \text{dir.}$$

- Formülünden faydalanılarak U1 ve U2 hesaplanabilir.

Buna göre

$$U_1 = 10 \times 12 + \frac{10 \times (11)}{2} - 88 = 87$$

veya

$$U_2 = 10 \times 12 + \frac{12 \times (13)}{2} - 165 = 33 ;$$

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 - U_2 \text{ dir.}$$

Bunlardan hangisi küçükse (bazı tablolarda büyük olan) o değer Mann-Whitney'in Tablo değeri ile karşılaştırılır.

Eğer $U_h \leq U_c$ ise H_0 Ret edilir.

- Burada $U_h = 33 > U_c = 29$ olduğundan *H₀ kabul* edilir.

Mann-Whitney U Testi Kritik (iki yönlü) değerleri

n_2	α	n_1									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	.05	--	0	0	1	1	2	2	3	3	4
	.01	--	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	.05	--	0	1	2	3	4	4	5	6	7
	.01	--	--	0	0	0	1	1	2	2	3
5	.05	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11
	.01	--	--	0	1	1	2	3	4	5	6
6	.05	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	9
7	.05	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18
	.01	--	0	1	3	4	6	7	9	10	12
8	.05	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22
	.01	--	1	2	4	6	7	9	11	13	15
9	.05	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26
	.01	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18
10	.05	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29
	.01	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21
11	.05	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33
	.01	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24
12	.05	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37

Wilcoxon için Z Yaklaşımı

Bu formül

$$\mu_w = \frac{n_1 \cdot (N + 1)}{2} \text{ ve } \sigma_w^2 = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (N + 1)}{12}$$

$$Z = \frac{W - \mu_w}{\sqrt{\sigma_w^2}}$$

$$\mu_w = \frac{10 \cdot (22 + 1)}{2} = 115 \text{ ve } \sigma_w^2 = \frac{10 \cdot 12 \cdot (22 + 1)}{12} = 230$$

$$Z = \frac{88 - 115}{\sqrt{230}} = \frac{-27}{15.17} = -1.78; \quad |-1.78| < |1.96| H_0 \text{ Kabul}$$

Mann-Whitney için Z Yaklaşımı

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{(n_1 \cdot n_2)}{(N(N-1))}\right) \cdot \left(\frac{(N^3(N-1))}{12} - \sum T\right)}} , \text{ burada } N = n_1 + n_2 \text{ dir.}$$

Burada $\sum T = \frac{t^3 - t}{12}$ dir. t : herbir çiftteki bağlı gözlem sayısıdır.

Mann-Whitney Z-Yaklaşımı

Sayılar yerine konursa:

$$Z = \frac{33 - \frac{10 \cdot 12}{2}}{\sqrt{\left(\frac{10 \cdot 12}{22(22-1)}\right) \cdot \left(\frac{22^3(22-1)}{12} - \sum T\right)}} = \frac{33 - 60}{\sqrt{\frac{120}{462} \cdot (885.5 - 25.25)}} = \frac{-27}{14.95} = -1.8$$

SPSS sonucu

Ranks

	GRUP	N	Mean Rank	Sum of Ranks
AGIR	1,00	10	8,80	88,00
	2,00	12	13,75	165,00
	Total	22		

Test Statistics^b

	AGIR
Mann-Whitney U	33,000
Wilcoxon W	88,000
Z	-1,789
Asymp. Sig. (2-tailed)	,074
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,080 ^a

a. Not corrected for ties.

b. Grouping Variable: GRUP

W için Z istatistiği