

Bağımlı İki Grup Testi (Wilcoxon Sıra Sayıları İşaret Testi)

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ A.D.

Tek Örnek İçin Test

- Wilcoxon sıra sayıları işaret testi benzer, simetrik bir dağılışlı ana kütleden örneklemin geldiğini varsayar.
- Bu simetriklik varsayımı ile dağılışın Normallik varsayımı sağlanır anlamı taşıyor. Kabaca Medyanın altında ve üstünde kalan sayıların eşitliği anlamı taşıyor.

- Wilcoxon sıra sayıları işaret testi işleminde W_s test istatistiği hesaplanır. Bu istatistik beklenen değer ile karşılaştırılır.
- Tek Örnek durumunda her değişkenin gözlenen değerinden H_0 altındaki hipotezde belirtilen medyan değeri çıkarılarak fark bulunur, bu farkların sıra puanlarından test istatistiği hesaplanır.

Örnek Uygulama

- Normal hassaslıktaki ciltlerdeki kahverengi leke sayısı sağa çarpık bir dağılışı gösterir. Dolayısıyla bu tip verileri en iyi temsil eden merkezi ölçü medyandır.
- Normal renkli ciltlerdeki 1 dm^2 deki leke sayısı **medyanı** $\eta_0=7$ dir. Güneşe hassas açık renkli ciltlerde de bu leke sayısının aynı olup olmadığı merak ediliyor.

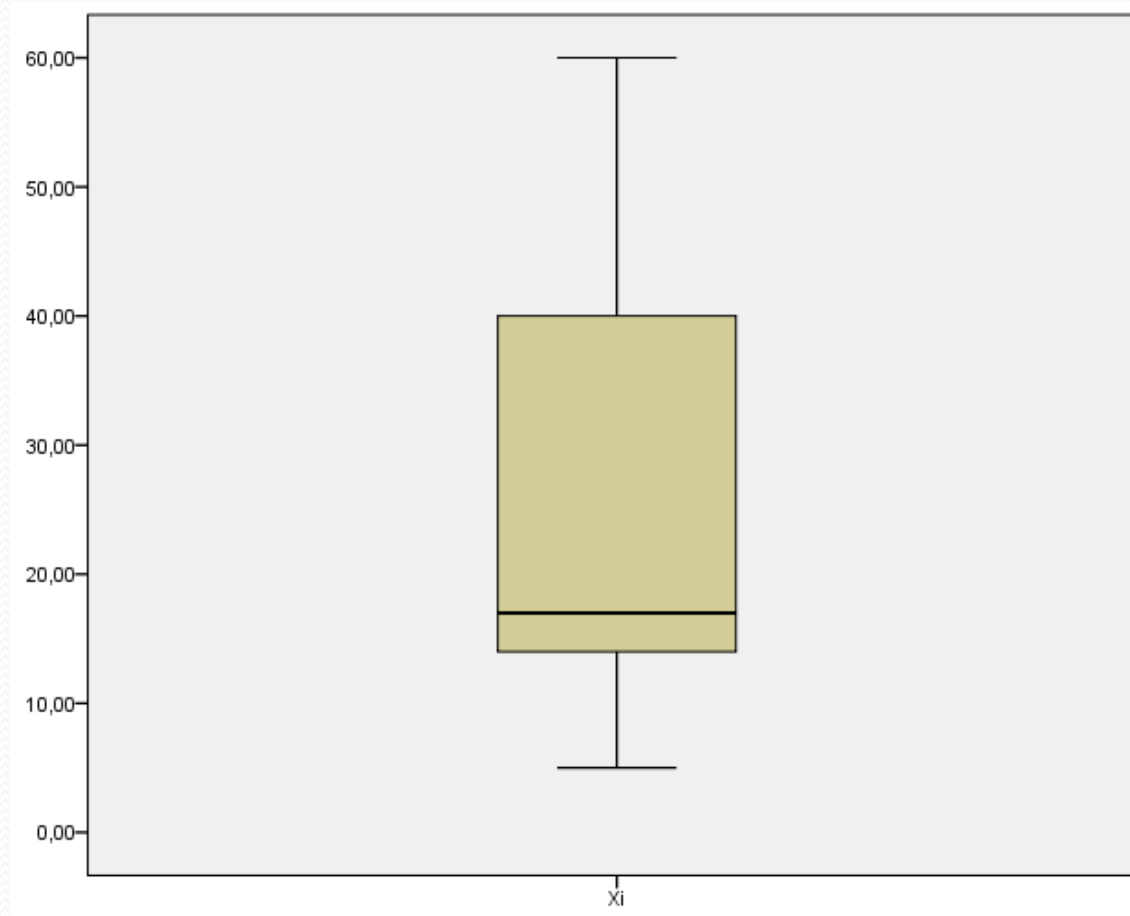
n=13 açık tenli kişi de bu lekeler sayılıyor. Aşağıdaki sayılar bulunuyor.

Hipotezler: medyan ile ilgili,

$H_0: \eta_0 = 7$; $H_1: \eta_0 \neq 7$

Önem düzeyi: $\alpha = 0,05$

Kutu grafik



Kişi	X_i (leke sayısı)	$X_i - \text{medyan}_0$	işaret	$ X_i - \text{medyan}_0 $	Sıra puanı	işaret*sırapuanı
1	17	10	1	10	7	7
2	50	43	1	43	12	12
3	45	38	1	38	11	11
4	60	53	1	53	13	13
5	22	15	1	15	8	8
6	16	9	1	9	6	6
7	8	1	1	1	1	1
8	15	8	1	8	5	5
9	5	-2	-1	2	2	-2
10	40	33	1	33	10	10
11	35	28	1	28	9	9
12	14	7	1	7	4	4
13	13	6	1	6	3	3
					$\Sigma(R+) =$	89
	Medyan=7				$\Sigma(R-) =$	2

- $W_s = \text{Min}[\sum (R_+); \sum (R_-)]$

küçük olan toplam alınır, tablo değeri ile karşılaştırılır.

Tablo değeri (n=13 için $W_{\text{tablo}} = 17$) $W_s < W_{\text{tablo}}$
(2 < 17) olduğu için Ho ret edilir.

Karar: Örneklemin çekildiği ana kütlenin medyanından
(7) önemli derecede farklıdır.

$$W_s = \text{Min}(W^-, W^+) = \text{Min}(89, 2) = 2$$

e.g.: suppose my obtained value is 22, and I had 15 participants.
 The critical value in the table is 25: my obtained value is smaller than this, and so I would conclude that the difference between the two conditions in my study was unlikely to occur by chance ($p < .05$ two-tailed test, or $p < .025$, one-tailed test).

One Tailed Significance levels:			
	0.025	0.01	0.005
Two Tailed significance levels:			
N	0.05	0.02	0.01
6		-	-
7		0	-
8		2	0
9		3	2
10		5	3
11		7	5
12		10	7
13		13	10
14		16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

Sıra sayıları
işaret testi
tablosu.

Bu kesin test
sonucunu
verir.

Hesaplanan test
değeri tablo
değerinden
küçükse H_0
ret edilir.

n	Two-Tailed Test		One-Tailed Test	
	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
5	--	--	0	--
6	0	--	2	--
7	2	--	3	0
8	3	0	5	1
9	5	1	8	3
10	8	3	10	5
11	10	5	13	7
12	13	7	17	9
13	17	9	21	12
14	21	12	25	15
15	25	15	30	19
16	29	19	35	23
17	34	23	41	27
18	40	27	47	32
19	46	32	53	37
20	52	37	60	43
21	58	42	67	49
22	65	48	75	55
23	73	54	83	62
24	81	61	91	69
25	89	68	100	76
26	98	75	110	84
27	107	83	119	92
28	116	91	130	101
29	126	100	140	110
30	137	109	151	120

SPSS Çözümü

Sign Test for Median: x

Sign test of median = 7,000 versus not = 7,000

	N	Below	Equal	Above	P	Median
x	13	1	0	12	0,0034	17,00

Percentiles								
		Percentiles						
		5	10	25	50	75	90	95
Weighted Average (Definition 1)	Xi	5,00	6,20	13,50	17,00	42,50	56,00	.
Tukey's Hinges	Xi			14,00	17,00	40,00		

SPSS 18. Çözümü

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The median of Xi equals 7.	One-Sample Wilcoxon Signed Ranks Test	.002	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

İki Bağımlı Örnek İçin Uygulama

Artritli **12** hastanın ağrısını dindirmek için 2 ağrı kesici (A ve B) veriliyor.
Ağrı dinme saatleri belirleniyor.

Vaka(Case)	İlaç(drug) A	İlaç (Drug) B	Fark(B-A)
1	2,0	3,5	1,5
2	3,6	5,7	2,1
3	2,6	2,9	0,3
4	2,6	2,4	-0,2
5	7,3	9,9	2,6
6	3,4	3,3	-0,1
7	14,9	16,7	1,8
8	6,6	6,0	-0,6
9	2,3	3,8	1,5
10	2,0	4,0	2,0
11	6,8	9,1	2,3
12	8,5	20,9	12,4

Çözüm:

H_0 : Medyan farkları sıfırdır.

(ilaç B- İlaç A) medyan farkı alınıyor.

+1.5, +2.1, +0.3, -0.2, +2.6, -0.1, +1.8, -0.6, +1.5, +2.0, +2.3, +12.4

Gerçek medyan $(1.5+1.8)/2=1.65$ saattir.

Fark	0.1	0.2	0.3	0.6	1.5	1.5	1.8	2.0	2.1	2.3	2.6	12.4
Sıra Puanı	1	2	3	4	5.5	5.5	7	8	9	10	11	12
İşareti	-	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+

Pozitif ve negatif sıra puanları toplamaları W^+ ve W^- hesaplanır.

Çözüm(devam):

$$W^- = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$W^+ = 3 + 5.5 + 5.5 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 71$$

- $N = (n \cdot (n+1)) / 2 = 12 \cdot 13 / 2 = 78 = W^- + W^+$

W^+ ve W^- toplamı 78 eder.

- Test istatistiği: Z yaklaşımı için,

$W_s = \max(W^-, W^+) = 71$ dir. Bunun yerine $W_s = \min(W^-, W^+) = 7$ değeri alınarak da aynı Z sonucu (-Z) elde edilebilir.

- İki bağlı gözlem vardır, düzeltme yapılabilir.

$$\frac{t^3 - t}{48} = \frac{8 - 2}{48} = 0.125.$$

Çözüm(devam):

- Gözlem çifti sayısı $n(> 20)$ ise nonparametrik test için büyük örnek sayılabilir ve bu yaklaşımı kullanılabilir.

$$\mu_w = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{12 \times 13}{4} = 39$$

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} = \sqrt{\frac{12 \times 13 \times 25}{24}} \\ = \sqrt{162.5} = 12.7457$$

$$Z = \frac{71 - \frac{12 \times 13}{4}}{\sqrt{\frac{12 \times 13 \times 25}{24} - \frac{8 - 2}{48}}} = \frac{71 - 39}{\sqrt{162.5 - 0.125}} = 2.511$$

İki yönlü p değeri $p = 0.012$ dir. **Karar:** B ilacı A ilacından daha iyidir.

SPSS Çözümü

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Drug B - Drug A	Negative Ranks	3 ^a	2.33	7.00
	Positive Ranks	9 ^b	7.89	71.00
	Ties	0 ^c		
	Total	12		

a. DRUGB < DRUGA

b. DRUGB > DRUGA

c. DRUGA = DRUGB

Test Statistics^b

	DRUGB - DRUGA
z	-2.511 ^a
Asymp. Sig. (2-tailed)	0.012
Exact Sig. (2-tailed)	0.009
Exact Sig. (1-tailed)	0.004
Point probability	0.001

a. Based on negative ranks

b. Wilcoxon Signed Ranks Test

Wilcoxon Bağımlı Grup Sıra Sayıları İşaret Testi (Wilcoxon Matched-Pairs Signed-Ranks Test)

- Bu test bağımlı iki gruba ait verilerin normal dağılış göstermediği durumlarda kullanılan bir testtir.
- Bu testin parametrik karşılığı eşli-grup t testidir. Bu test tek grup için uygulanan Wilcoxon sıra sayıları işaret testinin (Wilcoxon signed-ranks test) genişletilmiş şeklidir.

Bu testin uygulanabilmesi için eşleştirilmiş ve her birinde n bireyin bulunduğu iki grup meydanlarının farklılığı üzerinde kurulan hipotezi test etmede kullanılır.

Örnek: Tesadüfen seçilen 10 öğrenciye eğitim verilmeden önce ve sonra aldığı puanlar bulunuyor. Buna göre eğitimin sınav puanı üzerine etkisi var mıdır?

Örnek veri ve farklar:

Kişiler	Sonraki X1i	Önceki X2i	Fark D _i =X1i-X2i	D _i nin sıra puanı	İşaretili sıra sayıları
1	9	8	1	2	2
2	2	2	0	-	-
3	1	3	-2	4.5	-4.5
4	4	2	2	4.5	4.5
5	6	3	3	7	7
6	4	0	4	9	9
7	7	4	3	7	7
8	8	5	3	7	7
9	5	4	1	2	2
10	1	0	1	2	2
Farkı <u>sıfırdan farklı</u> olan eşler sayısı n dir.					40.5
					4.5
				Toplam=	45.0

- Pozitif sıra puanlarının toplamı $\sum_{i=1}^9 R(+)$ **45** olarak, negatif sıra puanları toplamı ise $\sum_{i=1}^9 R(-) = \mathbf{4.5}$ olarak bulunmuştur. Her ikisinin toplamı bulunur.
$$\left(\sum_{i=1}^n R(+) \right) + \left(\sum_{i=1}^n R(-) \right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Eğer önceki ve sonraki değerler aynı ise farkların meydanının sıfır olması gerekir.

$\sum_{i=1}^9 R(+)$ ile $\sum_{i=1}^9 R(-)$ değerleri birbirine eşit olması gerekir. Yani her ikisinin de 22.5 olması gerekir.

$$\frac{n(n+1)}{4} = 22.5$$

- Bu değer Wilcoxon W_s istatistiğinin beklenen değeridir. Eğer $\sum_{i=1}^n R(-)$ değeri $\sum_{i=1}^n R(+)$ den önemli derecede büyükse sonraki ölçüm değerlerin önceki değerlerden önemli derecede büyük olduğunu işaret eder.
- $\sum_{i=1}^n R(+)$ ile $\sum_{i=1}^n R(-)$ değeri karşılaştırıldığında **küçük olan** değer test istatistiğinin değeri olarak alınır.

$\sum_{i=1}^9 R(-)$ **4.5** daha küçüktür dolayısıyla
 $\bar{W}_{\text{hesap}} = \mathbf{4.5}$ olur.

Bu istatistik aşağıdaki Wilcoxon kritik tablo değeri ile karşılaştırılır.

n = 9 için Kritik Wilcoxon sıra sayıları işaret testi		
T cetvel Değerleri		
	T_{0.05}	T_{0.01}
Çift yönlü test	5	1
Tek yönlü test	8	3

Farkın önemli olması için $W_{\text{hesap}} \leq W_{\text{cetvel}}$ olması gerekir.

η_D farkın medyanı ise

- $H_0: \eta_D = 0$; $H_0: \eta_D \neq 0$;

Buna göre **4.5** ≤ 5 olduğundan H_0 ret edilir.

Önceki ölçüm değerler ile sonraki değerler arasında önemli fark vardır ($p < 0.05$).

Kısaca $W_{\text{hesap}} = T$, dersek

BÜYÜK ÖRNEKLERDE ($N > 20$) WILCOXON EŞLİ GRUPLAR SIRA

Bağlı gözlemler varsa, Wilcoxon tek örnek sıra sayıları işaret testi için bu bağlı gözlemler için de düzeltme yapılabilir.

$$Z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24} - \frac{\sum_{i=1}^s t^3 - \sum_{i=1}^s t}{48}}}$$

BÜYÜK ÖRNEKLERDE ($N > 20$) WILCOXON EŞLİ GRUPLAR SIRA SAYILARI İŞARET TESTİNE NORMAL YAKLAŞIM

Örnek hacmi nispeten büyük olduğunda normal dağılış yaklaşımı kullanılabilir. T nin beklenen değeri $\frac{n(n+1)}{4}$ dir. Variyansı ise $\frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{24}$ dir. Buna göre normal yaklaşımın test istatistiği Z nin değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$Z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24}}}, \text{ yukarıdaki örnek için bu hesaplanırsa,}$$

$$Z = \frac{4.5 - \frac{9 \times (9+1)}{4}}{\sqrt{\frac{9 \cdot (10) \cdot (19)}{24}}} = -2.13 \text{ dir. İki yönlü } Z \text{ cetvel değeri } Z_{0.05} = 1.96 \text{ olduğundan}$$

Bağ için düzeltme yapılmamış durum.

! mutlak değer olarak $|-2.13| > |1.96|$ olduğundan H_0 ret edilir. Önemli fark vardır. Eğitim etkili olmuştur. Z hesapher zaman negatif çıkar çünkü küçük olan toplam T olarak alınmaktadır. Hipotez tek yönlü olursa Z_h nin mutlak değeri alınarak tek yönlü Z tablo=1.65 ile karşılaştırılır.

Bu istatistikte süreklilik düzeltmesi de yapılabilir.

$$Z = \frac{\left| T - \frac{n(n+1)}{4} \right| - 0.5}{\sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{24}}}, \text{ buna göre } Z = \frac{\left| 4.5 - \frac{9(10)}{4} \right| - 0.5}{\sqrt{\frac{9 \cdot (10) \cdot (19)}{24}}} = 2.07 > 1.96 \text{ } H_0 \text{ ret edilir.}$$

Kişiler	sıra sayıları	t	t ³
1	2	3	27
9	2		
10	2		
3	4.5	2	8
4	4.5		
5	7	3	27
7	7		
8	7		
6	9		
	Toplam	8	62

E

Bağ düzeltmesi doğrudan hesaplanabilir: $\left(\sum_{i=1}^s t^3 - t \right) = (3^3 - 3) + (2^3 - 2) + (3^3 - 3) = 54$

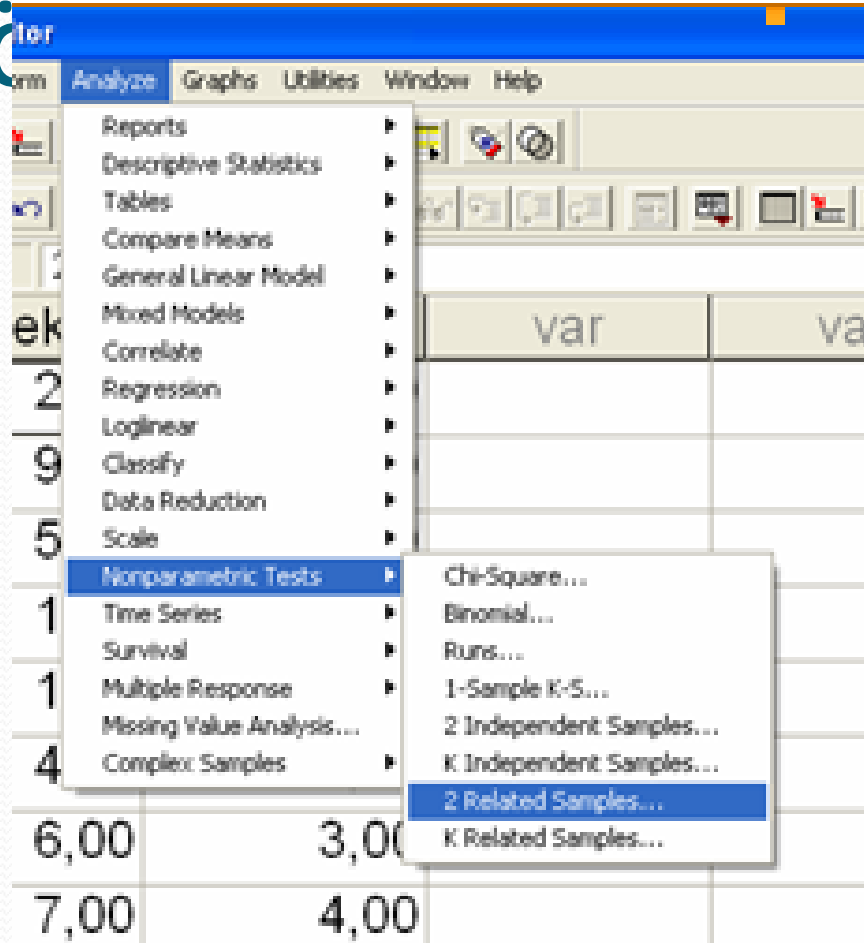
$62 - 8 = 54$ aynıdır.

$$Z = \frac{4.5 - \frac{9(10)}{4}}{\sqrt{\frac{9 \cdot (10) \cdot (19)}{24} - \frac{62 - 8}{48}}} = -2.15 \text{ dir.}$$

Eşli gruplar için bu tip bağlı gözlemler için düzeltme farklı şekilde yapılabilmektedir.
Conover, W. (1999).

$| -2,15 | > | 1,96 |$ H0 ret. Karar: fark önemlidir.

SPSS Çıktıları



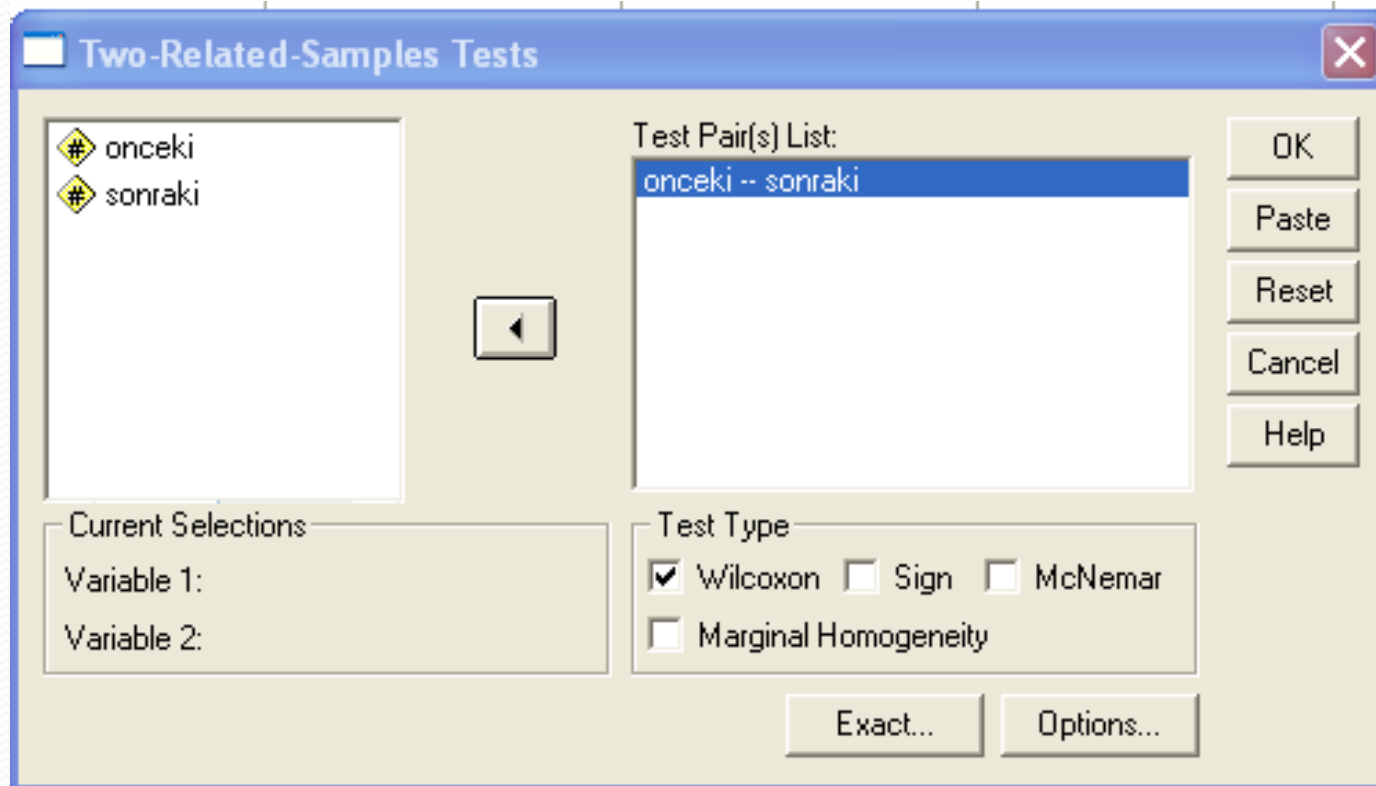


Table A5 Table of Critical T Values for Wilcoxon's Signed-Ranks and Matched-Pairs Signed-Ranks Test

One-tailed level of significance					One-tailed level of significance				
.05 .025 .01 .005					.05 .025 .01 .005				
Two-tailed level of significance					Two-tailed level of significance				
.10 .05 .02 .01					.10 .05 .02 .01				
n					n				
5	0	–	–	–	28	130	116	101	91
6	2	0	–	–	29	140	126	110	100
7	3	2	0	–	30	151	137	120	109
8	5	3	1	0	31	163	147	130	118
9	8	5	3	1	32	175	159	140	128
10	10	8	5	3	33	187	170	151	138
11	13	10	7	5	34	200	182	162	148
12	17	13	9	7	35	213	195	173	159
13	21	17	12	9	36	227	208	185	171
14	25	21	15	12	37	241	221	198	182

15	30	25	19	15	38	256	235	211	194
16	35	29	23	19	39	271	249	224	207
17	41	34	27	23	40	286	264	238	220
18	47	40	32	27	41	302	279	252	233
19	53	46	37	32	42	319	294	266	247
20	60	52	43	37	43	336	310	281	261
21	67	58	49	42	44	353	327	296	276
22	75	65	55	48	45	371	343	312	291
23	83	73	62	54	46	389	361	328	307
24	91	81	69	61	47	407	378	345	322
25	100	89	76	68	48	426	396	362	339
26	110	98	84	75	49	446	415	379	355
27	119	107	92	83	50	466	434	397	373