T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDSİLİK FAKÜLTESİ

Makina Mühendisliği Bölümü

MAK 315 ISI TRANSFERİ

Isı Yayılım Denklemi, Sınır Şartları, Boyutsuz Sayılar

4. Hafta

özenilen üniversite

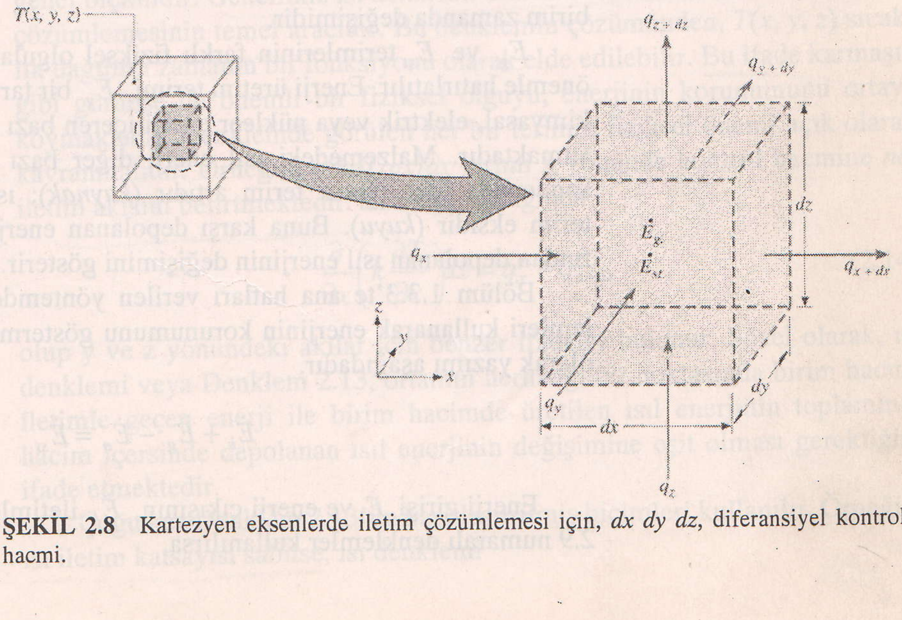
2.3
Isıl Yayılım Denklemi

Isı iletim çözümlemesinde asıl amaç, verilen sınır koşulları için bir ortamda *sıcaklık dağılımını* belirlemektir. Başka bir deyişle, ortamda sıcaklığın yerel olarak nasıl değiştiği *bulunmak* istenir. Bu dağılım bilindiğinde, ortam içinde veya yüzeyinde herhangi bir noktadaki iletimle ısı akısı Fourier yasasından hesaplanabilir. İlgilenilen diğer önemli büyüklükler de belirlenebilir. Bir katı için sıcaklık dağılımı bilgisi, ısıl gerilmeler, genleşme ve yer değiştirmelerin belirlenmesi ile yapısal bütünlüğün soruşturulmasında kullanılabilir. Sıcaklık dağılımı ayrıca bir yalıtım malzemesinin kalınlığının optimize edilmesinde, malzeme ile kullanılan yapıştırıcı veya kaplamanın uyumunun belirlenmesinde de kullanılabilir.

Bu aşamada sıcaklık dağılımının nasıl belirlenebileceği ele alınmakta, enerji korunumu ilkesinin uygulandığı ve Bölüm 1.3.3'te açıklanan yöntem izlenmektedir. Başka bir deyişle, bir diferansiyel kontrol hacmi tanımlandıktan sonra, ilgili ısı geçiş türleri belirlenmekte ve uygun an denklemleri yazılmaktadır.

Sonuç, verilen sınır koşulları için, çözümü ortamdaki sıcaklık dağılımını sağlayan bir diferansiyel denklemdir.

İçinde kütlesel hareket olmayan ve $T(x, y, z)$ sıcaklık dağılımının kartezyen eksen takımında gösterildiği homojen bir ortam ele alınsın. Enerji korunumu uygulanarak, önce şekil 2.8'de gösterildiği gibi sonsuz küçük bir kontrol hacmi $dx \cdot dy \cdot dz$ tanımlanır. İkinci adım bu kontrol hacmi ile ilgili enerji etkileşimlerini ele almaktır. Sıcaklık gradyanları varsa kontrol yüzeylerinin her biri üzerinde iletimle ısı geçişi olacaktır. x, y ve z eksenleri



ŞEKİL 2.8 Kartezyen eksenlerde iletim çözümlemesi için, $dx\ dy\ dz$, diferansiyel kontrol hacmi.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.15}$$

olup, burada $\alpha = k/\rho\, c_p$ *ısıl yayılım* katsayısıdır. Sürekli rejim için, depolanan enerjide değişme olmayacaktır. Bu nedenle Denklem 2.13 aşağıdaki biçime dönüşür :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=0 \tag{2.16}$$

Ayrıca, ısı geçişi *bir boyutlu* ise örneğin sadece x yönünde ise ve *ısı üretimi yoksa* Denklem (2.16) aşağıdaki biçimde yazılabilir:

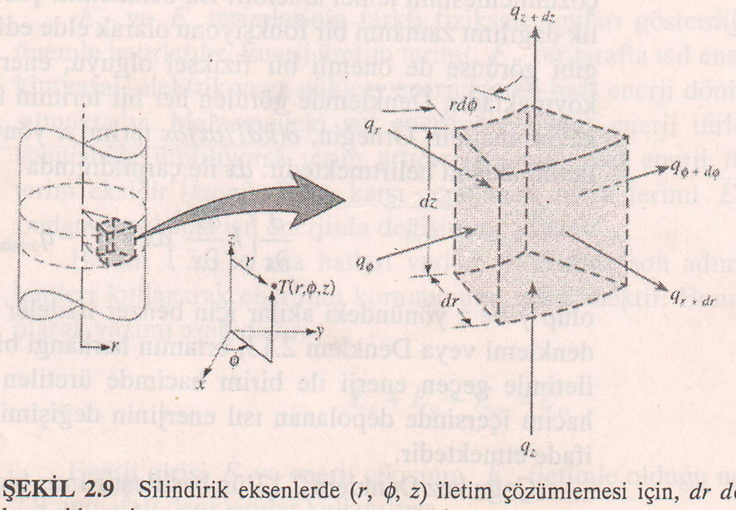
$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \tag{2.17}$$

Bu sonuçtan yapılacak önemli bir gözlem, *ısı üretiminin olmadığı, bir boyutlu sürekli rejim için,* geçiş yönünde ısı akısının sabit olduğudur $(dq''_x / dx = 0)$.

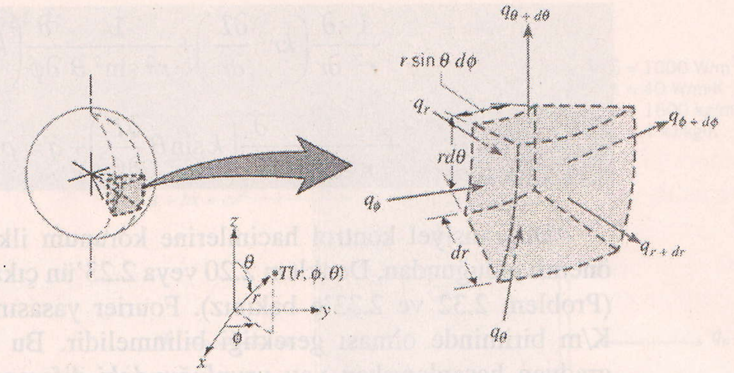
Isı denklemi silindirik ve küresel eksenlerde de yazılabilir. Bu iki eksen sistemi için diferansiyel kontrol hacimleri Şekil 2.9 ve 2.10'da gösterilmektedir.

Silindirik Eksenler Denklem 2.3'teki ∇ del operatörü silindirik eksenlerde gösterildiğinde, ısı akısı vektörünün genel biçimi ve buna bağlı olarak Fourier yasası

$$q''=-k\nabla T=-k\left(i\frac{\partial T}{\partial r}+j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}+k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.18}$$



ŞEKİL 2.9 Silindirik eksenlerde $(r,\ \phi,\ z)$ iletim çözümlemesi için, $dr\ d\phi\ dz$, diferansiyel kontrol hacmi.



ŞEKİL 2.10 Küresel eksenlerde (r, ϕ, θ) iletim çözümlemesi için, $dr.\ r \sin\theta\, d\phi.\ rd\theta$, diferansiyel kontrol hacmi.

olup, burada

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\phi'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \qquad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{2.19}$$

sırasıyla radyal, açısal ve eksenel yönlerde ısı akısı bileşenleridir. Şekil 2.9'daki diferansiyel kontrol hacmine enerji dengesi uygulanarak ısı denkleminin aşağıdaki genel şekli elde edilir.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(kr\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(kr\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho\, c_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.20}$$

Küresel Eksenler Küresel eksen takımında ısı akısı vektörü ve Fourier yasasının genel biçimi

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r}+j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \tag{2.21}$$

olup, burada

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \qquad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \tag{2.22}$$

sırasıyla radyal, kutupsal ve azimut yönlerinde ısı akısı bileşenleridir. Şekil 2.10'daki diferansiyel kontrol hacmine enerji dengesi uygulanırsa, ısı denkleminin aşağıda verilen genel biçimi elde edilir.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.23)$$

Diferansiyel kontrol hacimlerine korunum ilkesini uygulama becerisi önemli olduğundan, Denklem 2.20 veya 2.23'ün çıkartılmasına çalışılmalıdır (Problem 2.32 ve 2.33'e bakınız). Fourier yasasında sıcaklık gradyanının K/m biriminde olması gerektiği bilinmelidir. Bu nedenle, açısal eksende gradyan hesaplanırken yay *uzunluğundaki* diferansiyel değişme cinsinden ifade edilmelidir. Örneğin, bir silindirik eksen takımının açısal yöndeki ısı akısı $q''_\phi = -k(\partial T/\partial\phi)$ *değil* $q''_\phi = -(k/r)(\partial T/\partial\phi)$ olarak yazılmalıdır.

ÖRNEK 2.2

1 m kalınlığındaki bir duvarda belirli bir andaki sıcaklık dağılımı

$$T(x) = a + bx + cx^2$$

olarak verilmekte, burada a = 900 °C, b = −300 °C/m ve c = −50 °C/m² iken T derece Celcius ve x metre olmaktadır. Özelikleri ρ = 1600 kg/m³, k = 40 W/m · K ve c_p = 4 kJ/kg · K olan duvarın 10 m²'lik bölümünde $\dot{q}$ = 1000 W/m³ düzgün dağılımlı bir ısı üretimi vardır.

1. Duvara birim zamanda giren (x = 0) ve çıkan (x = 1 m) ısıyı belirleyin.
2. Duvarda depo edilen enerjinin zamanla değişimini bulun.
3. x = 0.025 ve 0.5 m de sıcaklığın zamanla değişimini hesaplayın.

ÇÖZÜM

Bilinen: Düzgün dağılımlı ısı üreten bir boyutlu duvarda t anındaki $T(x)$ sıcaklık dağılımı.

İstenen:

1. q_i (x = 0) giren ve q_o (x = 1) çıkan ısı,
2. $\dot{E}_{st}$ duvarda depolanan enerjinin zamanla değişimi,
3. x = 0.025 ve x = 0.5 m de sıcaklığın zamanla değişimi.

2.4
Sınır ve Başlangıç Koşulları

Bir ortamda sıcaklık dağılımını belirlemek için ısı denklemini çözmek gerekir. Bu çözüm ortamın *sınırlarında* var olan fiziksel koşullara ve olay zamana bağlı ise,ortamın bir *başlangıç* anındaki haline bağlıdır. *Sınır koşulları* matematiksel olarak değişik biçimlerde gösterilebilir. Isı denklemi uzamsal eksenlerde ikinci mertebede olduğundan sistemin çözümünde kullanılan eksenlerin her biri için iki sınır koşulu yazılmalıdır. Bununla beraber, denklem zamana göre birinci mertebede olduğundan *başlangıç koşulu tektir*.

Isı geçişinde, genellikle karşılaşılan üç çeşit sınır koşuluTablo 2.1'de özetlenmektedir. Koşullar $x = 0$ yüzeyinde bir boyutlu bir sistem için belirtilmektedir. Isı geçişi artı x yönündedir, zamana bağlı olabilen sıcaklık dağılımı $T(x, t)$ ile gösterilmiştir. Birinci koşul yüzeyin sabit bir T_s sıcaklığında olduğu duruma karşı gelmektedir. Bu koşul genellikle *Dirichlet* veya *birinci tür* sınır koşulu olarak adlandırılır. Ergimekte olan bir katı veya kaynamakta olan bir sıvı ile temasta tutulan bir yüzey için bu koşul oldukça doğrudur. Yüzey faz değişim sıcaklığında kalırken her iki durumda da yüzeyde ısı geçişi vardır. İkinci koşul, yüzeyde sabit veya değişmeyen bir q_s ısı akısının varlığına karşı gelir. Bu ısı akısı yüzeydeki sıcaklık gradyanına bağlıdır ve Fourier yasası ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

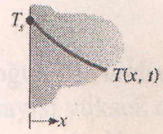
$$q''_x(0) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$$

TABLO 2.1 Yüzeyde ($x = 0$), ısı yayılma denklemi için sınır koşulları.

1. Sabit yüzey sıcaklığı

$$T(0, t) = T_s \qquad (2.24)$$

Dirichlet

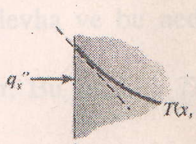


2. Sabit yüzey ısı akısı

(a) sonlu ısı akısı

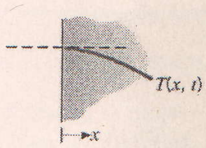
Neumann

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q''_s \qquad (2.25)$$



(b) adyabatik veya yalıtılmış yüzey

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (2.26)$$



3. Yüzeyde taşınım olması

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] \qquad (2.27)$$