



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

BAYESÇİ İSTATİSTİK DERSİ

PROF.DR.MEHMET ALİ CENGİZ

3. Hafta

Önsel dağılım

Bir parametrenin önsel dağılımı, veriyi analiz etmeden önce parametre hakkında kesin olmayan bilgilerinizi içeren olasılık dağılımıdır. Önsel dağılım ve olabilirlik fonksiyonunun çarpımı parametrenin sonsal dağılımını verir. Sonsal dağılımı kullanarak tüm çıkarımlarınızı yapabilirsiniz. Önsel dağılım kullanmaksızın modelleme veya Bayesci çıkarım yapamazsınız.

ÖNSEL DAĞILIMIN SEÇİMİ

Önsel dağılım açık bir şekilde bilinmiyorsa bu durumda objektif veya subjektif olarak uygun bir önsel seçilebilir. Herhangi bir θ parametresi için en uç objektif önsel

$$f(\theta) = \begin{cases} c & \theta \in R_\theta \\ \theta & \theta \notin R_\theta \end{cases}$$

$$f(\theta/X) \propto L(\theta; X)f(\theta)$$

$$f(\theta/X) \propto L(\theta; X) \quad (f(\theta) = 1) \text{ (önseli düzgün dağılım seçtik.)}$$

$$P(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = \theta_0 \\ 0 & \theta \neq \theta_0 \end{cases} \Rightarrow P(\theta/X) = P(\theta)$$

Verilen parametre verilerden tamamen bağımsızdır.

ÖRNEK: Herhangi bir tesadüfi değişken ; $X / \pi \sim B(\pi)$

$$P(X/\pi) = \begin{cases} \pi & x = 1 \\ 1 - \pi & x = 0 \end{cases}$$

$$P(X/\pi) = \begin{cases} \pi^x (1 - \pi)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

Böyle x tesadüfi değişkenlerinden 50 tane gözlemimiz olsun

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 31 \quad (31 \text{ tane başarılı varmış.})$$

Olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\pi; X) = \prod_{i=1}^{50} P(x_i/\pi) = \pi^{31} \cdot (1 - \pi)^{19}$$

Veya

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^{50} \pi^{x_i} \cdot (1 - \pi)^{1-x_i} \\ &= \pi^{\sum x_i} (1 - \pi)^{\sum (1-x_i)} \\ &= \pi^{31} (1 - \pi)^{19} \end{aligned}$$

$$\ell(\pi; X) = 31 \log \pi + 19 \log(1 - \pi)$$

$$\frac{d\ell}{d\pi} = \frac{31}{\pi} + \frac{19}{1 - \pi} = 0 \Rightarrow \hat{\pi} = 0.62$$

(Önseli 1 kabul ettiğimizdeki bayesle, klasik olasılık aynıdır.)

%95 güven aralıklarını hesaplamak gerekirse;

$$\hat{\pi} \pm \sum_{0.025} \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}} = 0.62 \pm 1.960 \sqrt{\frac{0.62 \times 0.38}{50}} \Rightarrow (0.49; 0.75)$$

$\alpha = 2$, $\beta = 2$ olacak şekilde $\pi \in (0,1)$ için önsel dağılımı β olarak kabul edelim.

Beta dağılımı:

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \pi < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\underbrace{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}} \pi^{\alpha-1} (1 - \pi)^{\beta-1} \\ &= c \cdot \pi^{\alpha-1} (1 - \pi)^{\beta-1} \end{aligned}$$

$$f(\pi) = \frac{\Gamma(2 + 2)}{\Gamma(2) \cdot \Gamma(2)} \pi^{2-1} (1 - \pi)^{2-1}$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2) \cdot \Gamma(2)} \pi(1 - \pi) = \frac{3!}{1! \cdot 1!} \pi(1 - \pi) = 6\pi(1 - \pi) = f(\pi) ; \quad \pi \in (0,1)$$

$$f(\theta/X) \propto L(\theta; X)f(\theta)$$

Sabit olduğu için orantıya kattık.

$$f(\pi/X) \propto L(\pi; X)f(\pi)$$



$$\propto \pi^{31}(1-\pi)^{19}6\pi(1-\pi)$$

$$\propto \underbrace{\pi^{32}(1-\pi)^{20}}$$

Sonsal dağılım, β fonksiyonuna benziyor.

$$c = \frac{\Gamma(33+21)}{\Gamma(33)\Gamma(21)} \Rightarrow \text{orantıdaki sabit (c)'yi verir.}$$

NOT: Subjektif olasılık (BAYESÇİ YAKLAŞIM) açık ve doğrudan çıkarımlar yapar ve mevcut bütün bilgiyi kullanır. Klasik olasılık ise çıkarımlar için sınırlamalara sahiptir ve mevcut bütün bilgiyi (mesela önsel bilgiyi) kullanmaz.

Genel prensipler başlığından devam ediyoruz:

$X = (X_1, X_2)$ şeklinde iki parça halinde yazarsak ve $X_1 \perp X_2$ (birbirinden ayrı) ise θ parametresi için;

$$f(\theta/X_1) = \frac{f(X_1/\theta)f(\theta)}{f(X_1)} \propto L(\theta; X_1)f(\theta)$$

Bayes ifadesini X_1 için yazdık.

$$f(\theta/X_1, X_2) = \frac{f(X_2/\theta)f(\theta/X_1)}{f(X_2/X_1)} \propto L(\theta; X_2)f(\theta/X_1)$$

$$\propto \underbrace{L(\theta; X_2)L(\theta; X_1)}_{L(\theta; X_1, X_2)} f(\theta)$$

$$L(\theta; X_1, X_2)$$

θ parametremizi $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ gibi iki parametreye ayırırsak. Ama sadece θ parametresi üzerinde çıkarım (işlem) yapmak istiyorsak; θ_2 boş (saçma) parametre olur. BU durumda θ_1 'in marjinal (sonsal) dağılımı:

$$f(\theta/X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1, \theta_2/X) d\theta_2$$

Eğer;

$L(\theta_1, \theta_2; X)$ $X; \theta_2$ 'ye bağlı değilse $X; \theta_1$ bilindiğinde θ_2 hakkında herhangi bir bilgi vermez ve θ_2 veriden tanımlanamaz denir. (Veriden bağımsız)

$$f(\theta_1/X) \propto L(\theta_1; X)f(\theta_1)$$

$$f(\theta_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_2$$

OBJEKTİF ÖNSEL DAĞILIMLAR

Objektif önseller deneye dolayısıyla deney yapan kişiye bağlı olmayan ön bilginin genel ifadesidir. Birçok objektif önsel alternatif vardır. Biz sadece en çok kullanılan birkaç tanesinin üzerinde duracağız.

1) Düzgün (Uniform) Önsel Dağılım: Dönüşüm yaptığımızda önselimiz üniform olmuyor değişiyordu.

Parametreler hakkında fazla bilginiz yoksa veya hiç bilginiz yoksa Bayes-Laplace önermesi; $f(\theta) \propto L$, $\theta \in \mathbb{R}_0$ biçiminde ifade edilen bir düzgün önseli kullanmamızı önerir.

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq \theta \leq b \\ 0 & , \quad - \end{cases} \quad \mathcal{R}_\theta, a \text{ ile } b \text{ arasında sınırlıdır.}$$

$$a = 0, b = 1 \text{ için } f(\theta) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

$$a = 2, b = 5 \text{ için } f(\theta) = \begin{cases} 3 & , \quad 2 \leq \theta \leq 5 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

Hepsi birer sabittir.(c'dir) Her sabit (c) yani 1,3,... 1 ile orantılıdır. Bu nedenle

$$f(\theta) \propto 1 \text{ 'dir.}$$

\mathcal{R}_θ sınırsız ise; $-\infty < \theta(\mathcal{R}_\theta) < \infty$

$$\int_{a=-\infty}^{b=\infty} f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} d\theta \rightarrow \infty$$

Yakınsak çıkmadığından düzgün değildir.

Bunun anlamı; $f(\theta)$ düzgün dağılımlı değildir. Biz bunu improper(düzgün olmayan) olarak ifade edeceğiz. $f(\theta)$ improperdir. Bu problemi aşmak için bölgesel düzgün önseller kullanılır. \mathbb{R}_θ sınırlı olursa ;

$$(1 \leq \theta \leq 3) \rightarrow f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} & , \quad 1 \leq \theta \leq 3 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{3-1} d\theta = \frac{\theta}{3-1} \Big|_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

\Rightarrow yakınsaktır.

$$f(\theta/a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad \theta \in (a, b) \\ 0 & , \quad \theta \notin (a, b) \end{cases}$$

ÖRNEK: Bir kavşakta 3'er dakika boyunca 300 kez sağa dönen araçların sayısı

x_1, x_2, \dots, x_{300} olsun.

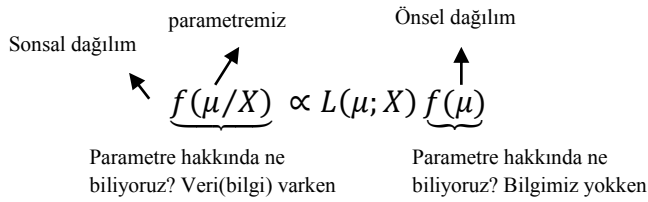
$\bar{X} = \frac{3 \times 67}{75}$ bulunmuştur.

x_i : Aracın 1 dakika süre içinde sağa dönmesi

bu tesadüfî değişkenlerin her biri μ ortalamalı ve birbirinden bağımsız Poisson dağılımına sahip olduğu biliniyorsa uniform önseli kullanarak sonsal dağılımını hesaplayınız.

$$x_i/\mu \sim P_o(\mu) \quad i = 1, \dots, 300$$

$$\underbrace{f(x/\mu) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x_i!}}_{3 \text{ tane vardır.}}, \quad x \in \mathbb{Z}^+$$



$$L(\mu; X) = \prod_{i=1}^{300} \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-300\mu} \cdot \mu^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{300} x_i!} \propto e^{-300\mu} \cdot \mu^{\sum x_i} = e^{-300\mu} \cdot \mu^{1168}$$



Bu sabiti hesaplamak yerine orana katarız.

$$\begin{aligned} L(\mu; X) \propto e^{-300\mu} \mu^{1168}, \quad f(\mu) \propto 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow f(\mu/X) \propto L(\mu; X) \underbrace{f(\mu)}_1 & \\ \Rightarrow f(\mu/X) \propto e^{-300\mu} \cdot \mu^{1168} & \end{aligned}$$

Eğer orana kattığımız sabiti de bulmamız istenirse;

Gamma dağılımına uyup uymadığına bakarız.

$$\mu/\alpha, \beta \sim Ga(\alpha, \beta)$$

Bunun dağılım fonksiyonu;

$$f(\mu/\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha \mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}^+$$

Ya da

$$f(\mu/\alpha, \beta) = \frac{\mu^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\mu/\beta}, \quad \mu \in \mathbb{R}^+$$

$$c = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{sabit})$$

diğer kalan ifade; $\mu^{\alpha-1} e^{-\beta\mu}$ bizim ifademizde vardı. ($e^{-300\mu} \mu^{1168}$)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - 1 = 1168 \\ \beta = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow c = \frac{300^{1169}}{\Gamma(1169)}$$

O halde sonsal ifademiz;

$$f(\mu/X) = \frac{300^{1169}}{1168!} e^{-300\mu} \mu^{1168}$$

bulunur.

$$f(\mu/X) = \frac{L(\mu; X) f(\mu)}{f(X)}$$

↓

$f(\mu/X) \propto L(\mu; X) f(\mu)$ olmuştur.

$\mu \in \mathbb{R}^+$ dır. Çünkü \bar{X} ortalama negatif olamaz (oranların ortalaması negatif olamaz.)

$f(\mu/X)$ bir dağılıma benzediği durumlarda işimiz kolaydır.

$f(\mu) \propto 1$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ önseli düzgün kabul ettik. Şimdi bunda bir değişiklik yapalım: λ parametrelili olan poisson dağılımı

$\lambda = \frac{1}{\mu}$ parametrelili olsun. Böyle seçersek acaba önsellerde bir farklılık olur mu?

$$P(X/\lambda) = \frac{1}{\lambda^x \cdot x!} e^{-1/\lambda} \quad x \in X^+$$

$$(eskisi: f(X/\mu) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!} \quad \lambda = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ koyduk.})$$

Bizim üzerinde durduğumuz (değişken değiştirmede) parametrelerdir ve parametremiz olan μ sürekli. ($\mu \in \mathbb{R}^+$) o halde Jakobiyen koyacağız. (poissonun kesikli dağılım olması bizi ilgilendirmiyor.)

$$f(\lambda) = f(\mu)|J|, \quad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(\lambda) \propto 1 \cdot \left| \frac{d\mu}{d\lambda} \right|$$

$$f(\lambda) \propto 1 \cdot \left| -\frac{1}{\lambda^2} \right| \Rightarrow f(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \text{düzgün dağılımlı değildir.}$$

()

SONUÇ: Parametrelerin önsel dağılımı düzgün(uniform) iken parametreler üzerinde yaptığımız bir takım dönüşümlerle başka bir dağılıma dönüşebilir. $f(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^2}$ ifadesinde olduğu gibi. Bunu da kullanabiliriz

Ancak kullanacağımız bu önsel artık düzgün dağılımlı değildir. Ancak bazı önseller, parametrelerin dönüşümü altında sabittir. Bu tür önsellere sabit(değişmeyen) önseller denir. Şimdi bu sabit(değişmeyen) önsellere bakacağız.