<u>Önsel dağılım</u>

Bir parametrenin önsel dağılımı, veriyi analiz etmeden önce parametre hakkında kesin olmayan bilgilerinizi içeren olasılık dağılımıdır. Önsel dağılım ve olabilirlik fonksiyonunun çarpımı parametrenin sonsal dağılımını verir. Sonsal dağılımı kullanarak tüm çıkarımlarınızı yapabilirsiniz. Önsel dağılım kullanmaksızın modelleme veya Bayesci çıkarım yapamazsınız.

ÖNSEL DAĞILIMIN SEÇİMİ

Önsel dağılım açık bir şekilde bilinmiyorsa bu durumda objektif veya subjektif olarak uygun bir önsel seçilebilir. Herhangi bir θ parametresi için en uç objektif önsel

$$f(\theta) = \begin{cases} c & \theta \in R_\theta \\ \theta & \theta \notin R_\theta \end{cases}$$

$$f(\theta/X) \propto L(\theta;X)f(\theta)$$

$f(\theta/X) \propto L(\theta;X)$ $\quad (f(\theta) = 1)$ (önseli düzgün dağılım seçtik.)

$$P(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = \theta_0 \\ 0 & \theta \neq \theta_0 \end{cases} \Rightarrow P(\theta/X) = P(\theta)$$

Verilen parametre verilerden tamamen bağımsızdır.

ÖRNEK: Herhangi bir tesadüfi değişken ; $\quad X\,/\,\pi \sim B(\pi)$

$$P(X/\pi) = \begin{cases} \pi & x = 1 \\ 1-\pi & x = 0 \end{cases}$$

$$P(X/\pi) = \begin{cases} \pi^{x}(1-\pi)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

Böyle x tesadüfi değişkenlerinden 50 tane gözlemimiz olsun

$\sum_{i=1}^{50} x_i = 31$ $\quad$ (31 tane başarılı varmış.)

Olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\pi;X) = \prod_{i=1}^{50} P(x_i/\pi) = \pi^{31}.(1-\pi)^{19}$$

Veya

$$= \prod_{i=1}^{50} \pi^{x_i}.(1-\pi)^{1-x_i}$$

$$= \pi^{\sum x_i}(1-\pi)^{\sum(1-x_i)}$$

$$= \pi^{31}(1-\pi)^{19}$$

$$\ell(\pi : X) = 31 log\pi + 19\log(1-\pi)$$

$$\frac{d\ell}{d\pi} = \frac{31}{\hat{\pi}} + \frac{19}{1-\hat{\pi}} = 0 \Longrightarrow \hat{\pi} = 0.62$$

(Önseli 1 kabul ettiğimizdeki bayesle, klasik olasılık aynıdır.)

%95 güven aralıklarını hesaplamak gerekirse;

$$\hat{\pi} \pm \sum\nolimits_{025} \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} = 0.62 \pm 1.960\sqrt{\frac{0.62 \times 0.38}{50}} \Longrightarrow (0.49; 0.75)$$

$\alpha = 2,\ \beta = 2$ olacak şekilde $\pi \in (0,1)$ için önsel dağılımı β olarak kabul edelim.

Beta dağılımı:

$\alpha > 0,\ \ \beta > 0, \qquad 0 < \pi < 1$ olmak üzere

$$f(\pi) = \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}} \pi^{\alpha-1}(1-\pi)^{\beta-1}$$

$$= c.\pi^{\alpha-1}(1-\pi)^{\beta-1}$$

$$f(\pi) = \frac{\Gamma(2+2)}{\Gamma(2).\Gamma(2)} \pi^{2-1}(1-\pi)^{2-1}$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2).\Gamma(2)} \pi(1-\pi) = \frac{3!}{1!.1!}\pi(1-\pi) = 6\pi(1-\pi) = f(\pi) \quad ; \quad \pi \in (0,1)$$

$$f(\theta/X) \propto L(\theta; X) f(\theta)$$

Sabit olduğu için orantıya kattık.

$$f(\pi/X) \propto L(\pi; X) f(\pi)$$

$$\propto \pi^{31}(1-\pi)^{19} 6\pi(1-\pi)$$

$$\propto \underbrace{\pi^{32}(1-\pi)^{20}}$$

Sonsal dağılım, β fonksiyonuna benziyor.

$$c = \frac{\Gamma(33+21)}{\Gamma(33).\Gamma(21)} \Longrightarrow orantıdaki\ sabit\ (c)'yi\ verir.$$

NOT: Subjektif olasılık (BAYESCİ YAKLAŞIM) açık ve doğrudan çıkarımlar yapar ve mevcut bütün bilgiyi kullanır. Klasik olasılık ise çıkarımlar için sınırlamalara sahiptir ve mevcut bütün bilgiyi (mesela önsel bilgiyi) kullanmaz.

Genel prensipler başlığından devam ediyoruz:

$X = (X_1, X_2)$ şeklinde iki parça halinde yazarsak ve $X_1 \perp X_2$ (birbirinden ayrı) ise θ parametresi için;

$$f(\theta/X_1) = \frac{f(X_1/\theta)f(\theta)}{f(X_1)} \propto L(\theta; X_1)f(\theta)$$

Bayes ifadesini X_1 için yazdık.

$$f(\theta/X_1, X_2) = \frac{f(X_2/\theta)f(\theta/X_1)}{f(X_2 / X_1)} \propto L(\theta; X_2)f(\theta / X_1)$$

$$\propto \underbrace{L(\theta; X_2)L(\theta; X_1)}_{L(\theta; X_1, X_2)} f(\theta)$$

θ parametremizi $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ gibi iki parametreye ayırırsak. Ama sadece θ parametresi üzerinde çıkarım (işlem) yapmak istiyorsak; θ_2 boş (saçma) parametre olur. BU durumda $\theta_1'in$ marjinal (sonsal) dağılımı:

$$f(\theta/X) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\theta_1, \theta_2/X)\, d\theta_2$$

Eğer;

$L(\theta_1, \theta_2\,; X)$ $X; \theta_2$ ‘ye bağlı değilse $X; \theta_1$ bilindiğinde θ_2 hakkında herhangi bir bilgi vermez ve θ_2 veriden tanımlanamaz denir. (Veriden bağımsız)

$$f(\theta_1/X) \propto L(\theta_1; X) f(\theta_1)$$

$$f(\theta_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_2$$

OBJEKTİF ÖNSEL DAĞILIMLAR

Objektif önseller deneye dolayısıyla deney yapan kişiye bağlı olmayan ön bilginin genel ifadesidir. Birçok objektif önsel alternatif vardır. Biz sadece en çok kullanılan birkaç tanesinin üzerinde duracağız.

1) **Düzgün (Uniform) Önsel Dağılım**: Dönüşüm yaptığımızda önselimiz üniform olmuyor değişiyordu.

Parametreler hakkında fazla bilginiz yoksa veya hiç bilginiz yoksa Bayes-Laplace önermesi; $f(\theta) \propto L\,,\ \theta \in \mathbb{R}_0$ biçiminde ifade edilen bir düzgün önseli kullanmamızı önerir.

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \le \theta \le b \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

$\mathcal{R}_\theta$, a ile b arasında sınırlıdır.

$$a = 0, b = 1 \ i\c{c}in \quad f(\theta) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \theta \le 1 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

$$a = 2, b = 5 \ i\c{c}in \quad f(\theta) = \begin{cases} 3 & , \quad 2 \le \theta \le 5 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

Hepsi birer sabittir.(c’dir) Her sabit (c) yani 1,3,… 1 ile orantılıdır. Bu nedenle

$f(\theta) \propto 1$ ‘dir.

$\mathcal{R}_\theta$ sınırsız ise; $-\infty < \theta(\mathcal{R}_\theta) < \infty$

$$\int_{a=-\infty}^{b=\infty} f(\theta)\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} d\theta \to \infty$$

Yakınsak çıkmadığından düzgün değildir.

Bunun anlamı; $f(\theta)$düzgün dağılımlı değildir. Biz bunu improper(düzgün olmayan) olarak ifade edeceğiz. $f(\theta)$ improperdir. Bu problemi aşmak için bölgesel düzgün önseller kullanılır. $\mathbb{R}_\theta$ sınırlı olursa ;

$$(1 \le \theta \le 3) \to f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} & , \quad 1 \le \theta \le 3 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

$$\int_1^3 \frac{1}{3-1} d\theta = \frac{\theta}{3-1} \Bigg|_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$\Longrightarrow yakınsaktır.$

$$f(\theta/a\,, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad \theta \in (a, b) \\ 0 & , \quad \theta \notin (a, b) \end{cases}$$

ÖRNEK: Bir kavşakta 3'er dakika boyunca 300 kez sağa dönen araçların sayısı

$x_1, x_2, \ \dots \ , x_{300}$ olsun.

$\bar{X} = \frac{3\times 67}{75}$ bulunmuştur.

x_i: Aracın 1 dakika süre içinde sağa dönmesi

bu tesadüfi değişkenlerin her biri μ ortalamalı ve birbirinden bağımsız Poisson dağılımına sahip olduğu biliniyorsa uniform önseli kullanarak sonsal dağılımını hesaplayınız.

$x_i/\mu \sim P_o(\mu) \qquad i = 1, \dots ,300$

$$\underbrace{f(x/\mu) = \frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x_i!}}_{3\ tane\ vardır.}, \qquad x \in \mathbb{Z}^+$$

Sonsal dağılım parametremiz Önsel dağılım

$$\underbrace{f(\mu/X)}_{\text{Parametre hakkında ne biliyoruz? Veri(bilgi) varken}} \propto L(\mu;X)\,\underbrace{f(\mu)}_{\text{Parametre hakkında ne biliyoruz? Bilgimiz yokken}}$$

$$L(\mu;X)=\prod_{i=1}^{300}\frac{e^{-\mu}.\mu^{x}}{x!}=\frac{e^{-300\mu}.\mu^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{300}x_i!}\propto\; e^{-300\mu}.\mu^{\sum x_i}=e^{-300\mu}.\mu^{1168}$$

Bu sabiti hesaplamak yerine orana katarız.

$$L(\mu;X)\propto\; e^{-300\mu}\mu^{1168},\qquad f(\mu)\propto 1\;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(\mu/X)\;\propto\;L(\mu;X)\,\underbrace{f(\mu)}_{1}$$

$$\Longrightarrow f(\mu/X)\;\propto\;e^{-300\mu}.\mu^{1168}$$

Eğer orana kattığımız sabiti de bulmamız istenirse;

Gamma dağılımına uyup uymadığına bakarız.

$\mu/\alpha\,,\beta\sim Ga(\alpha,\beta)$

Bunun dağılım fonksiyonu;

$$f(\mu/\alpha\,,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\mu}\;,\qquad \mu\in\;\mathbb{R}^{+}$$

Ya da

$$f(\mu/\alpha\,,\beta)=\frac{\mu^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\mu/\beta}\;,\qquad \mu\in\;\mathbb{R}^{+}$$

$$c=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\quad(sabit)$$

$diğer\ kalan\ ifade;\ \mu^{\alpha-1}e^{-\beta\mu}\ bizim\ ifademizde\ vardı.(e^{-300\mu}\mu^{1168})$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - 1 = 1168 \\ \beta = 300\end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{300^{1169}}{\Gamma(1169)}$$

O halde sonsal ifademiz;

$$f(\mu/X) = \frac{300^{1169}}{1168!} e^{-300\mu} \mu^{1168}$$

bulunur.

$$f(\mu/X) = \frac{L(\mu;X)f(\mu)}{f(X)}$$

Bunu kaldırdık orana ekledik.

$f(\mu/X) \propto L(\mu;X)f(\mu)$ olmuştur.

$\mu \in \mathbb{R}^+$ dır. Çünkü $\bar{X}$ ortalama negatif olamaz(oranların ortalaması negatif olamaz.)

$f(\mu/X)$ bir dağılıma benzediği durumlarda işimiz kolaydır.

$f(\mu) \propto 1$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ önseli düzgün kabul ettik. Şimdi bunda bir değişiklik yapalım: λ parametreli olan poisson dağılımı

$\lambda = \frac{1}{\mu}$ parametreli olsun. Böyle seçersek acaba önsellerde bir farklılık olur mu?

$$P(X/\lambda) = \frac{1}{\lambda^x . x!} e^{-1/\lambda} \qquad x \in X^+$$

$$\left(eskisi: f(X/\mu) = \frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!} \qquad \lambda = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}\ koyduk.\right)$$

Bizim üzerinde durduğumuz (değişken değiştirmede) parametrelerdir ve parametremiz olan μ süreklidir. ($\mu \in \mathbb{R}^+$) o halde Jakobiyen koyacağız.(poissonun kesikli dağılım olması bizi ilgilendirmiyor.)

$$f(\lambda) = f(\mu)|J|, \qquad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(\lambda) \propto 1. \left|\frac{d\mu}{d\lambda}\right|$$

$f(\lambda) \propto 1.\left|-\frac{1}{\lambda^2}\right| \quad \Rightarrow \quad f(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^2} \quad \rightarrow düzgün\ dağılımlı\ değildir.$

$\begin{pmatrix} eskisi; f(\mu) \propto 1\ idi\ yani\ düzgn\ dağılımlıydı. \\ Fakat\ sonradan\ bulduğumuz\ düzgün\ dağılımlı\ mı? \end{pmatrix}$

SONUÇ: Parametrelerin önsel dağılımı düzgün(uniform) iken parametreler üzerinde yaptığımız bir takım dönüşümlerle başka bir dağılıma dönüşebilir. $f(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^2}$ ifadesinde olduğu gibi. Bunu da kullanabiliriz

Ancak kullanacağımız bu önsel artık düzgün dağılımlı değildir. Ancak bazı önseller, parametrelerin dönüşümü altında sabittir. Bu tür önsellere sabit(değişmeyen) önseller denir. Şimdi bu sabit(değişmeyen) önsellere bakacağız.

2.Jeffreys'in Sabit(Değişmeyen) Önseli (parametreler için)

Jeffreys' in önseli oldukça faydalıdır (Jeffreys 1961). Lokal üniformal özelliğe sahiptir: aralık dışında büyük değerleri olmayan ve olabilirliğin anlamlı olduğu bölgede çok fazla değişmeyen bir önseldir. Fisher bilgi matrisi üzerine temeldir.

θ parametresi için $f(\theta) \propto \sqrt{\mathrm{I}(\theta)} \quad : \quad \theta \in \mathcal{R}_\theta$

Burada ;

$$\mathrm{I}(\theta) = -E\left\{\frac{d^2 log f(X/\theta)}{d\theta^2}\right\}$$

$\mathrm{I}(\theta)'$ya Fisher'in beklenen bilgisi denir. Bu tej parametre içindir. Eğer θ parametre vektörüyse (yani birden fazla parametre varsa örneğin; normal dağılım: μ , σ^2 parametreleri vardır.)

$\mathrm{I}(\theta)$ yoğunluk fonksiyonunun Hessian matrisinin beklenen değerinin (-) işaretlisidir.

$f(\theta) \propto |\mathrm{I}(\theta)|^{1/2}$

$f(X/\theta_1, \theta_2)$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2 logf}{d\theta_1{}^2} & \frac{d^2 logf}{d\theta_1 d\theta_2} \\ \frac{d^2 logf}{d\theta_2 d\theta_1} & \frac{d^2 logf}{d\theta_2{}^2} \end{bmatrix}$$

NOT: θ parametreleri birbirinden bağımsız ise önsel dağılım tek değişkenli sabit önselin çarpımına eşittir.

ÖRNEK: X tesadüfi değişkeni μ ortalamalı Poisson dağılımına sahip iseJeffreys'in sabit önselini bulalım:

$X/\mu \sim Po(\mu)$

$$P(X/\mu) = \frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!} \quad , \; x \in \mathbb{Z}^{+}$$

$$\mathrm{I}(\mu) = -E\left\{\frac{d^2 logf(X/\mu)}{d\mu^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d^2 \log(\frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!})}{d\mu^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d^2(x\log\mu - \mu - \log x!)}{d\mu^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d}{d\mu}(\frac{x}{\mu} - 1)\right\}$$

$$= -E\left(-\frac{x}{\mu^2}\right) = -\left(-\frac{1}{\mu^2}\right)E(x) = \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{I}(\mu) = \frac{1}{\mu} \Rightarrow f(\mu) \propto \sqrt{\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad , \qquad \mu \in \mathbb{R}^{+}$$

ÖRNEK: X tesadüfi değişkeni λ ortalamalı üstel dağılıma sahipse Jeffreys'in sabit önselini hesaplayınız.

$X/\lambda \sim Ex(\lambda)$

$f(X/\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+$

$$\mathrm{I}(\lambda) = -E\left\{\frac{d^2 log f(X/\lambda)}{d\lambda^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d^2 \log(\lambda e^{-\lambda x})}{d\lambda^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d^2(\log\lambda - \lambda x}{d\lambda^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d}{d\lambda}(\frac{1}{\lambda} - x)\right\} = -E\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = -\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{I}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow f(\lambda) \propto \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

ÖRNEK: X tesadüfi değişkeni μ ortalamalı σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip olsun.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) μ ve $\sigma^{2\prime}$nin bağımlı olduğu koşulu altında Jeffreys'in sabit önselini bulunuz.(ortak)

b) μ ve $\sigma^{2\prime}$ nin birbirinden bağımsız olduğu koşulu altında Jeffreys'in sbit önselini bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $f(X/\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$$\lambda=\frac{1}{\sigma^2}\ diyelim\ \Rightarrow\ f(X/\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(x-\mu)^2\right\}\ ,\qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\ell_f=logf(X/\mu,\lambda)=\frac{1}{2}log\lambda-\frac{1}{2}log2\pi-\frac{1}{2}\lambda(x-\mu)^2$$

$$\mathrm{I}(\mu,\lambda)=-E\begin{bmatrix}\frac{d^2\ell_f}{d\mu^2} & \frac{d^2\ell_f}{d\mu d\lambda}\\ \frac{d^2\ell_f}{d\lambda d\mu} & \frac{d^2\ell_f}{d\lambda^2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\ell_f}{d\mu}=\lambda(x-\mu)$$

$$\frac{d^2\ell_f}{d\mu^2}=-\lambda$$

$$\frac{d^2\ell_f}{d\mu d\lambda}=x-\mu$$

$$\frac{d\ell_f}{d\lambda}=\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{d^2\ell_f}{d\lambda^2}=-\frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\frac{d^2\ell_f}{d\lambda d\mu}=x-\mu$$

$$\mathrm{I}(\mu,\lambda)=-E\begin{bmatrix}-\lambda & x-\mu\\ x-\mu & -\frac{1}{2\lambda^2}\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}E(-\lambda) & E(x-\mu)\\ E(x-\mu) & E(-\frac{1}{2\lambda^2})\end{bmatrix}$$

$E(x)=\mu\ old.$

$$= -\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2\lambda^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\lambda^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{I}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\lambda^2} \end{bmatrix} \Rightarrow Fisher'in\ bilgi\ matrisi$$

$$f(\lambda, \mu) \propto \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\lambda^2} \end{vmatrix}^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2\lambda^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$f(\lambda, \mu) \propto \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow f(\lambda, \mu) \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad , \lambda = \sigma^2$$

$$f(\lambda, \mu) \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$\downarrow$

bağımlı iken

$$f(\mu, \sigma) = f(\mu, \lambda).|J|$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}}}.\left|-\frac{2}{\sigma^3}\right|$$

$$\propto \sigma.\frac{2}{\sigma^3} \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

b)

$\mu \perp \lambda$ (birbirinden bağımsız)

$$f(\mu, \lambda) = f(\mu) f(\lambda)$$

$$f(\mu) \propto \sqrt{\mathrm{I}(\mu)}$$

$$\mathrm{I}(\mu) = -E\left\{\frac{d^2 log f(X/\mu)}{d\mu^2}\right\}$$

$$logf(X/\mu) = \frac{1}{2}log\lambda - \frac{1}{2}log2\pi - \frac{\lambda}{2}(x-\mu)^2$$

$$= -E\left\{\frac{d}{d\mu}[\lambda(x-\mu)]\right\}$$

$$= -E(-\lambda) = \lambda \ \rightarrow sabit$$

$$\mathrm{I}(\mu) = \lambda \ \Rightarrow f(\mu) \propto \sqrt{\lambda} \ \propto 1 \ \ (\lambda \, sabit \ olduğundan)$$

$$f(\lambda) \propto \ \sqrt{\mathrm{I}(\lambda)}$$

$$\mathrm{I}(\lambda) = -E\left\{\frac{d^2logf(X/\lambda)}{d\lambda^2}\right\}$$

$$= -E\left\{\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2}(x-\mu)^2\right]\right\}$$

$$= -E\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}\right\} = \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\mathrm{I}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} \ \Rightarrow \ f(\lambda) \propto \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\lambda} \ \propto \ \frac{1}{\lambda}$$

$$f(\mu,\lambda) = f(\mu)f(\lambda) \propto 1.\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(\mu,\lambda) \ \propto \ \frac{1}{\lambda} \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+(standart \ hata \ negatif \ olamaz.)$$

Dağılım	**Referans önseli**	**Sonsal referans**
$X/\pi \sim B(\pi)$	$f(\pi) \propto Be(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$f(\pi\ /\ X) = Be(\frac{1}{2}+\sum x, \frac{1}{2}+n-\sum x)$
$X/\mu \sim Po(\mu)$	$f(\mu) \propto \mu^{-1/2}\ , \quad \mu \in \mathbb{R}^+$	$f(\mu/X) = Ga(\frac{1}{2}+\sum x, n)$
$X/\pi \sim Nb(r,\pi)$ $r\ biliniyorsa$	$f(\pi) \propto \pi^{-1}(1-\pi)^{-1/2}, \pi \in (0,1)$	$f(\pi\ /\ X) = Be(nr, \frac{1}{2}+\sum x - nr)$
$X/\lambda \sim U(0,\lambda)$	$f(\lambda) \propto \lambda^{-1}\ , \ \lambda \in \mathbb{R}^+$	$f(\lambda/X) = Pa(n, \chi_{(n)})$
$X/\lambda \sim Ex(\lambda)$	$f(\lambda) \propto \lambda^{-1}\ , \ \lambda \in \mathbb{R}^+$	$f(\lambda/X) = Ga(n, \sum x)$
$X/\mu \sim N(\mu,\lambda^{-1})$ $\lambda\ biliniyorsa$	$f(\mu) \propto 1\ , \mu \in \mathbb{R}$	$f(\mu/X) = N(\bar{X}, \frac{1}{n\lambda})$
$X/\lambda \sim N(\mu,\lambda^{-1})$ $\mu\ biliniyorsa$	$f(\lambda) \propto \lambda^{-1}\ , \ \lambda \in \mathbb{R}^+$	$f(\lambda/X) = Ga(\frac{n}{2}, \frac{\sum(X-\mu)^2}{2})$
$X/\mu,\lambda \sim N(\mu,\lambda^{-1})$	$f(\mu,\lambda) \propto \lambda^{-1}; \begin{cases} \mu \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$	$f(\mu/X) = St(n-1, \bar{X}. \frac{n(n-1)}{\sum(X-\bar{X})^2})$ $f(\lambda/X) = Ga(\frac{n-1}{2}, \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{2})$

ÖRNEK: $x/\mu \sim Po(\mu)$ ise referans önselimiz $f(\mu) \propto \mu^{-1/2}$ hakkında bir sonsal dağılım bulalım.

$f(\theta/X) \propto L(\theta; X)f(\theta)$

$$f(X/\theta) = \frac{e^{-\theta}.\theta^{x}}{x!}$$

$$L(\theta; X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}.\theta^{x}}{x!} = \frac{e^{-n\theta}.\theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$f(\theta/X) \propto \frac{e^{-n\theta}.\theta^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.\theta^{-1/2}$$

$$\propto e^{-n\theta}.\theta^{-\frac{1}{2}+\sum x_i} \sim Ga(\frac{1}{2} + \sum x\,, n)$$

SONUÇ:

Eğer parametre uzayı sonlu ve kesikli ise uniform(düzgün) önseli kullanılmalıdır.

Parametre uzayı sürekli ise; Jeffreys'in sabit önselini ve buna benzer olan referans önseli kullanılmalıdır.

Sürekli parametreler için mümkünse bağımsızlık kabulünü yapmak tavsiye edilir.(önsellikte kesinlik yoktur.) Parametre uzayı kesikli ve sonsuzsa sanki sürekliymiş gibi işlem görür.