**SUBJEKTİF ÖNSEL DAĞILIMLAR(Bilgi verici önseller)**

Subjektif önsel dağılımlar $\theta$ parametre hakkında bilgi varken kullanılşan bilgi verici (informative) önsellerdir. Genel olarak 4 şekilde hesaplanabilir.

**a)Düzeltilmiş Histogram:**

$\mathcal{R}_\theta$ parametre uzayı kesikli bölgelere ayrılır. Her bölgeye bir olasılık karşılık getirilir. Ve bu olasılıklar $f(\theta)$ önsel yoğunluk fonksiyonunu oluşturmak için düzgünleştirilir.

**b)Düzeltilmiş Birikimli Yoğunluk Fonksiyonu:**

$\theta'$nın farklı değerleri için birikimli olasılıklar belirlenir. Bu olasılıklar $f(\theta)'$yı elde etmek için düzeltme işlemine tabi tutulur.

**c)Göreceli (Nisbi) Olabilirlik:**

$\theta'$nın farklı değerleri için göreceli yoğunluk fonksiyonları belirlenir ve bunlar kullanılarak $f(\theta)$ için düzgün bir yüzey elde temek için tahminler yapılır.

Bu metotlar tesadüfi ve hesaplaması belirsizdir. Daha iyi bir yaklaşım $f(\theta)$ için genel bir form oluşturmak ve $\theta'$nın önsel momentleri ve nicelikleri ($\theta'$nın varyansı , standart sapması gibi ) hakkındaki bilgileri kullanarak hiper parametrelerini oluşturmaktadır.(Dağılımların üstel dağılımlar olduğunu göstermek için kullandığımız parametrelere hiper parametreler denir.)

**d)Eşlenik (conjugate) Önsel**

**Tanım:**

$\theta$ parametresi için $f(\theta)$ önsel dağılımların ailesi $\mathcal{F}$ olsun. Eğer $\forall f(\theta)$ için elde edilecek $f(\theta/X) \propto L(\theta;X)\, f(\theta)$ sonsal dağılım $\mathcal{F}$ ailesinin bir elemanıysa böyle bir kümeye $f(\theta/X)'$den yapılan örnekleme altında kapalıdır denir. Böyle aileler ya hesaplaması kolay ya da uygundur. Her ikisinin de aynı anda gerçekleşme olasılığı zordur. Sadece üstel dağılımlar ailesi için her iki durumda geçerli olabilir.

$\theta$ için;

$f(X/\theta) = exp\{a(x)b(\theta) + c(x) + d(\theta)\}$ $\;$ *üstel ailesinin genel formu*

$f(\theta) \propto exp\{k_1 b(\theta) + k_2 d(\theta)\}$ ifadesine $\theta$ için doğal eşlenik önsel denir. $k_1$ ve $k_2$ uygun sabitlerdir.

**ÖRNEK:** $x/\mu \sim Po(\mu)$ olsun. $f(X/\mu) = \frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!}$ üstel ailesi formunda yazınız.

**ÇÖZÜM:**

$x = loge^x = e^{logx}$ olduğundan

$$. f(X/\mu) = log\left\{exp\left[\frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!}\right]\right\}$$

$$= exp\left\{log\left[\frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!}\right]\right\}$$

$$= exp\{log\mu^x - logx! + loge^{-\mu}\}$$

$$= exp\{xlog\mu - logx! - \mu\}$$

$f(X/\mu) = exp\{a(x)b(\mu) + c(x) + d(\mu)\}$

$a(x) = x$

$b(\mu) = log\mu$

$c(x) = -logx!$

$d(\mu) = -\mu$

$\mu$ parametreli Poisson dağılımını üstel ailesinden olduğunu gösterdik.

$f(\theta) \propto g(\theta) exp\{k_1 b(\theta) + k_2 d(\theta)\}$ ifadesine eşlenik(conjugate) önsel denir.

$$f(\theta/X) \propto L(\theta; X)\, f(\theta) \ \propto g(\theta) exp\left[\left\{k_1 + \sum_{i=1}^{n} a(x_i)\right\} b(\theta) + (k_2 + n) d(\theta)\right]$$

**ÖRNEK:** $X/\mu \sim Po(\mu)$ sahipse eşlenik önselini elde ediniz.

$$f(X/\mu) = \frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!} = exp\{xlog\mu - logx! - \mu\} \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$a(x) = x$

$b(\mu) = log\mu$

$c(x) = -logx!$

$d(\mu) = -\mu$

$f(\mu) \propto exp\{k_1 log\mu + k_2(-\mu)\} = e^{k_1 log\mu + k_2(-\mu)} = e^{k_1 log\mu}.e^{k_2(-\mu)} = \mu^{k_1}\exp(-k_2\mu)$

$f(\mu) \propto \mu^{k_1} e^{(-k_2\mu)}$ , $\quad \mu > 0 \sim Ga(k_1 + 1, k_2)$

Gamma dağılımı;

$X/\alpha, \lambda$

$$f(X/\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \propto x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

$f(\mu/k_1, k_2) \propto \mu^{k_1-1} e^{-k_2\mu}$

**ÖRNEK:** $X\ /\ \lambda \sim Ex(\lambda)$ ise eşlenik önselini elde ediniz.

**ÇÖZÜM:**

$$f(X/\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} = exp\{\log(\lambda e^{-\lambda x})\}$$

$$= exp\{log\lambda - \lambda x\} \quad , x > 0$$

Önce üstel ailesi formuna benzetmek gerekir.

$a(x) = x$

$b(\lambda) = -\lambda$

$c(x) = 0$

$d(\lambda) = log\lambda$

$f(\lambda) \propto exp\{k_1(-\lambda) + k_2(log\lambda)\}$

$f(\lambda) \propto \lambda^{k_2} e^{-k_1\lambda}, \qquad \lambda > 0$

$f(\lambda) \propto Ga(k_2 + 1, k_1)$

| **Dağılım** | **Eşlenik önsel** | **Eşlenik sonsal** |
|---|---|---|
| $X/\mu\,,\lambda \sim N(\mu, \lambda^{-1})$ <br> $\mu, \lambda$ bilinmiyorsa | $f(\mu, \lambda) = Ng(a, b, c, d)$ | $f(\mu/X) = St\left\{2c + n, \frac{ab + \sum x}{b + n}, \frac{(b + n)(2c + n)}{2d + \sum(X - \bar{X})^2 + \frac{bn(a - \bar{X})^2}{b + n}}\right\}$ <br><br> $f(\lambda/X) = Ga\left\{c + \frac{n}{2}, d + \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{2} + \frac{bn(a - \bar{X})^2}{2(b + n)}\right\}$ |

| Dağılım | Eşlenik önsel | Sonsal eşlenik |
|---|---|---|
| $X/\pi \sim B(\pi)$ | $f(\pi) = Be(a,b)$ | $f(\pi\ /\ X) = Be(a + \sum x, b + n - \sum x)$ |
| $X/\mu \sim Po(\mu)$ | $f(\mu) = \ Ga(a,b)$ | $f(\mu/X) = Ga(a + \sum x, b + n)$ |
| $X/\pi \sim Nb(r,\pi)$ $r\ biliniyorsa$ | $f(\pi) = Be(a,b)$ | $f(\pi\ /\ X) = Be(a + nr, b + \sum x - nr)$ |
| $X/\lambda \sim U(0,\lambda)$ | $f(\lambda) = Pa(a,b)$ | $f(\lambda/X) = Pa(a + n, max\{b, \chi_{(n)}\})$ |
| $X/\lambda \sim Ex(\lambda)$ | $f(\lambda) = Ga(a,b)$ | $f(\lambda/X) = Ga(a + n, b + \sum x)$ |
| $X/\mu \sim N(\mu,\lambda^{-1})$ $\lambda\ biliniyorsa$ | $f(\mu) = N(a,b^{-1})$ | $f(\mu/X) = N(\frac{ab + \lambda \sum x}{b + n\lambda}, \frac{1}{b + n\lambda})$ |
| $X/\lambda \sim N(\mu,\lambda^{-1})$ $\mu\ biliniyorsa$ | $f(\lambda) = Ga(c,d)$ | $f(\lambda/X) = Ga(c + \frac{n}{2}, d + \frac{\sum (X-\mu)^2}{2})$ |

Eşlenik önselleri kullanarak $f(\theta/X) \propto L(\theta;X)f(\theta)$ elde ediyoruz. Buradan da sonsal eşlenikler( referanslar gibi) elde edilebilir.

Eğer $\theta$ iki parametreden oluşuyorsa bu durumda üstel dağılımlar ailesini;

$f(X/\theta) = exp\{a_1(x)b_1(\theta) + a_2(x)b_2(\theta) + c(x) + d(\theta)\}$ şeklinde ifade edebiliriz.

⇒ doğal eşlenik önselimiz

$f(\theta) \propto exp\{k_1 b_1(\theta) + k_2 b_2(\theta) + k_3 d(\theta)\}$'dır.

Burada $k_1, k_2, k_3$ uygun sabitlerdir.

$f(\theta) \propto g(\theta) exp\{k_1 b_1(\theta) + k_2 b_2(\theta) + k_3 d(\theta)\}$ eşlenik önsel

$\theta_1 \perp \theta_2$ ise bu durumda koşullu eşlenik önseli kullanabiliriz. Yani; $\theta_1$ biliniyorsa

$f(\theta) \propto exp\{k_1(\theta_1)b_1(\theta) + k_2(\theta_1)b_2(\theta) + k_3(\theta_1)d(\theta)\}$ ifadesi $\theta_2$ için doğal eşlenik olacaktır.

Eğer $\theta_2$ biliniyorsa;

$f(\theta) \propto exp\{k_1(\theta_2)b_1(\theta) + k_2(\theta_2)b_2(\theta) + k_3(\theta_2)d(\theta)\}$ ifadesi $\theta_1$ için doğal eşlenik olacaktır.

**ÖRNEK**: $X/\mu\,,\sigma \sim N(\mu,\sigma^2)$ sahipse $\mu$ ve $\sigma^2$ parametreleri için eşlenik önseli hesaplayınız.

**ÇÖZÜM:**

$\lambda = \frac{1}{\sigma^2}$ alırsak

$$f(X/\mu\,,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\, exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$\propto exp\left\{\frac{-\lambda x^2}{2} + \lambda\mu X - \frac{\lambda\mu^2}{2} + \frac{log\lambda}{2}\right\}$$

$$f(X/\theta) = exp\{a_1(x)b_1(\theta) + a_2(x)b_2(\theta) + c(x) + d(\theta)\}$$

$$a_1(x) = x^2$$

$$b_1(\lambda) = -\frac{\lambda}{2}$$

$$a_2(x) = x$$

$$b_2(\lambda,\mu) = \lambda\mu$$

$$c(x) = 0$$

$$d(\lambda,\mu) = \frac{-\lambda\mu^2}{2} + \frac{log\lambda}{2}$$

$$f(\mu,\lambda) \propto exp\left\{k_1(-\frac{\lambda}{2}) + k_2(\lambda\mu) + k_3(\frac{-\lambda\mu^2}{2} + \frac{log\lambda}{2})\right\}$$

$k_1, k_2, k_3$ sabit ; $\lambda, \mu$ esas parametre.

$$f(\mu,\lambda) = \lambda^{\frac{k_3}{2}} exp\left\{-\frac{\lambda}{2}(k_1 - 2k_2\mu + k_3\mu^2\right\} \; ; \; \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Gamma Normal dağılım

**UYGULAMA**

**1)** Ardışık Bernoulli denemelerinde $\pi$ başarı olasılığı $\frac{1}{3}$ ortalamaya ve $\frac{1}{32}$ varyansa sahip olsun.20 denemede 8 başarı gözlemlenirse $\pi$ için eşlenik önseli kullanarak $\pi'$nin sonsal beklenen değerini ve varyansını hesaplayınız.

**ÇÖZÜM:**

$\forall\pi \sim B(\pi) \Rightarrow f(\pi) = Be(a,b) \qquad E(\pi) = \frac{1}{3} \quad , \ Var(\pi) = \frac{1}{32}$

$$E(\pi) = \frac{a}{a+b}$$

$$Var(\pi) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

$$E(\pi) = \frac{a}{a+b} \Rightarrow (a+b)E(\pi) = a$$

$$\Rightarrow (a+b) = \frac{a}{E(\pi)} \Rightarrow b = \frac{a}{E(\pi)} + a$$

$$\Rightarrow b = a(\frac{1}{E(\pi)} - 1)$$

$$Var(\pi) = \frac{aa(\frac{1}{E(\pi)} - 1)}{\left(a + a(\frac{1}{E(\pi)} - 1)\right)^2 \left(a + a(\frac{1}{E(\pi)} - 1) + 1\right)}$$

$$Var(\pi) = \frac{\{E(\pi)\}^2\{1 - E(\pi)\}}{a + E(\pi)}$$

$$a = \frac{\{E(\pi)\}^2\{1 - E(\pi)\}}{Var(\pi)} - E(\pi)$$

$$b = a(\frac{1}{E(\pi)} - 1)$$

$$a = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 (1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{32}} - \frac{1}{3} = \frac{55}{27}$$

$$b = \frac{55}{27}\left(\frac{1}{1/3} - 1\right) = \frac{110}{27}$$

$f(\pi) = Be(a,b) = \mathrm{Be}(\frac{55}{27}, \frac{110}{27})$ önselin parametrelerini bulduk.

Sonsal eşleniğini bulmamız için sonsal dağılımı bulmak gerekir.

$$f(\pi/X) \propto L(\pi;X)f(\pi)$$

$$\propto Be(a+\sum X, b+n-\sum X)$$

$$\propto Be(\frac{55}{27}+8,\ \frac{110}{27}+20-8)$$

$\propto Be\left(\frac{271}{27}, \frac{434}{27}\right)$ sonsal dağılımı bulduk. Sonsalın a ve b değerlerini bulalım.

$$E(\pi) = \frac{a}{a+b}$$

$$Var(\pi) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

$$E(\pi/X) = \frac{a'}{a'+b'}$$

$$Var(\pi/X) = \frac{a'b'}{(a'+b')^2(a'+b'+1)}$$

(Hiper parametreler)

$$Be\left(a' = \frac{271}{27}, b' = \frac{434}{27}\right)$$

$$E(\pi/X) = \frac{\frac{271}{27}}{\frac{271}{27}+\frac{434}{27}} \cong 0.384$$

$$Var(\pi/X) = \frac{\frac{271}{27}\cdot\frac{434}{27}}{\left(\frac{271}{27}+\frac{434}{27}\right)^2\left(\frac{271}{27}+\frac{434}{27}+1\right)} \cong 0.00873$$

Bu soruda 3 tane beklenen değer var.

| $\frac{1}{3} = 0.33$ | $\frac{8}{20} = 0.40$ | $0.384$ |
|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ |
| $\pi$'nin önseli hiçbir hesaplama yapmadan bize verilen bilgi | Gözlem değerlerinden elde ettiğimiz, örneklemden elde ettiğimiz değer | İkisinin birleşiminden elde edilen değer |

3 beklenen değerde birbirlerine yakın değerlerdir.

**2)** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun. $\sigma$ hakkında önsel bilgi yok iken $\mu$ için önsel medyan 5 , $\theta_1 = 4.5$ $\theta_3 = 5.5$ olduğu bilinsin. $\lambda = \frac{1}{\sigma^2}$ için sabit önsel ve $\mu$ için eşlenik önsel alınarak ve önsellerin bağımsızlığı altında $f(\mu,\lambda) =$?

**ÇÖZÜM:**

$$f(\mu,\lambda) = f(\mu).f(\lambda)\ (bağımsız\ old.)$$

$$f(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda} \quad , \quad f(\mu) = N(a, \frac{1}{b})$$

$\theta_1$ , $\theta_3$ kartiller $\quad \theta_1 : 1.\,çeyrek \quad \theta_3 : 3.\,çeyrek$

$$\frac{\theta_1+\theta_3}{2} = \theta_2\ (medyan)$$

$$\theta_3 - \theta_1 = \mathcal{R}\ (Range) = Genişlik = Güven\ aralığı$$

Normal dağılım için; $f(\mu) \sim N\left(a, \frac{1}{b}\right) \Rightarrow \theta_1 \cong \underbrace{a}_{ortalama} - \underbrace{0{,}6745}_{tablo\ değeri}\ \underbrace{\sqrt{1/b}}_{standart\ sapma}$

$$\Rightarrow \theta_3 \cong \underbrace{a}_{ortalama} + \underbrace{0{,}6745}_{tablo\ değeri}\ \underbrace{\sqrt{1/b}}_{standart\ sapma}$$

Temel istatistik bilgilerinden G.A.

$$2a = \theta_1 + \theta_3 \Rightarrow a = \frac{\theta_1+\theta_3}{2} = \theta_2 = 5{,}0 (Medyan)$$

$$b \cong 1.82 \;\Rightarrow f(\mu) = N(5.0\,,\frac{1}{1.82})$$

$$f(\mu,\lambda) = f(\mu).f(\lambda)$$

$$\propto \frac{1}{\lambda} exp\{-0.91(\mu-5.0)^2\}$$

$$f(\mu) = N\left(5.0,\frac{1}{1.82}\right) \Rightarrow f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/1.82}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-5)^2}{1/1.82}\right]}$$

$$\propto e^{-0.91(\mu-5)^2}$$

$$f(\mu,\lambda) \sim Ng(a,b,c,d)$$

$$f(\mu,\lambda) = f(\mu\,/\lambda).f(\lambda)$$

$$f(\mu,\lambda) \sim Ng(a,b,c,d) \Rightarrow f(\mu) \sim N(a,\frac{1}{b\lambda})$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/b\lambda}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-a)}{\sqrt{1/b\lambda}}\right]^2}$$

$$= \frac{\sqrt{b\lambda}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b\lambda}{2}(\mu-a)^2} \propto \; e^{-\frac{b\lambda}{2}(\mu-a)^2}$$

Benzerliği kurarsak $k_1,\; k_2\,, k_3$' ü $a, b, c, d$ cinsinden yazabiliriz.

$$a = \frac{k_2}{k_3} \;\;,\;\; b = k_3 \;\;, c = \frac{k_3}{2} + 1 \;\;,\;\; d = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1 - {k_2}^2}{3}\right)$$

**NOT:** Subjektif önseller seçilirken aşağıdakiler göz önüne alınmalıdır.Eğer parametreler kesikli ve sonlu ise düzeltilir.Hİstogram yöntemi, parametreler sürekli ise doğal eşlenik önseli kullanmak tavsiye edilir. Eğer parametreler sonsuz kesikli ise sürekliymiş gibi işleme tabi tutulur.