ONDOKUZ MAYıS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MMB621 MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

11. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

DR. MAHMUT CAN ŞENEL

ŞUBAT 2021

SAMSUN

BÖLÜM 11

11. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

11.1. Giriş

Birçok durumlarda diferansiyel denklemlerin analatik olarak kapalı çözümleri bulunmamakta, bunlar da pratik bakımdan yararlı olmamaktadır. Böyle hallerde veya $y'=f(x, y)$ diferansiyel denklemin türev değerlerinin sürekli değil de ayrık noktalardaki değerler olarak verilmesi halinde problemi nümerik metotlar kullanarak çözmek daha yararlı olacaktır.

Diferansiyel denklemin çözümü, diferansiyel denklemi ve bu denklemin ilk şartlarını sağlayan fonksiyonu bulmaktır.

Diferansiyel denklemin çözümü, diferansiyel denklemi ve bu denklemin ilk şartlarını sağlayan fonksiyonu bulmaktır.

Genel olarak y=f(x) ile ifade edilen bir y fonksiyonunun n mertebeli diferansiyel denklemi:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

veya

$$y^{(n)} + g_1 y^{(n-1)} + \cdots + g_{n-1} y^1 + g_n . y = h(x)$$

olarak tanımlanır. Burada y fonksiyonunun x değişkenine göre türevleri y', y'',...., $y^{(n)}$ ile gösterilmiştir. Denklemdeki türevlerin katsayıları g_k fonksiyonları sadece x fonksiyonu ise böyle bir denkleme **lineer diferansiyel denklem**, eğer g_k terimleri sadece x değil y ve y'nin türevlerinin fonksiyonları ise denklem **lineer olmayan diferansiyel denklem** olarak adlandırılır.

Lineer olsun olmasın mertebesi n olan bir diferansiyel denklemin çözümü için n tanesınır şartı gereklidir. Sınır şartlarının hepsi, n tanesi sadece bir noktadaverilmiş ise böyle bir probleme **başlangıç değer problemi**, eğer n tane sınır şartının bir kısmı bir noktada diğerleri başka noktada verilmişse böyle bir probleme de **sınır değer problemi** denir. Mühendislik hesaplamalarında sınır değer problemleri genellikle **iki nokta sınır değer problemi** halindedir.

Örnek:

1. dereceden basit diferansiyel denklem $y'=y$ ise bu denklemin genel çözümü; $y(x)=c.e^{x}$, c=sabit olacaktır.

2. dereceden denklem $y''=y$, bu denklemin genel çözümü; $y(x)=C_1.e^{x}+C_2.e^{-x}$ şeklindedir.

11.2. Bir Başlangıç Değer Problemi

Sınır şartı $y(x_i)=y_i$ olarak bir i noktasında verilen bir i noktasında verilen bir $y'=f(x, y)$ denkleminin kapalı çözümü;

$$y = \int f(x,y)dx + C = F(x,y) + C$$

şeklinde yazılabilir. Sınır şartı olan $x=x_i$ için $y=y_i$ kullanarak;

$$y_i = F(x_i, y_i) + C$$

$C = y_i - F(x_i, y_i)$ bulunur. Bu ise;

$$y = y_i + F(x,y) - F(x_i, y_i)$$

sonucunu verir. Özellikle

$$y_{i+1} = y_i + F(x_{i+1}, y_{i+1}) - F(x_i, y_i)$$

yazılır ve bu denklem diğer bir şekilde,

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$$

şeklini alır.

İnteralin değerinin bulunması problemin çözümünü verir. Bu integralin bulunması için y_{i+1} ve f_{i+1} değerlerinin bilinmesi gereklidir. Halbuki y_{i+1} bilinmeyen ve bulunması istenen değerdir. Bu nedenle, bu integralin değerini bulacak metotlar geliştirilmiştir.

11.3. Euler Metodu

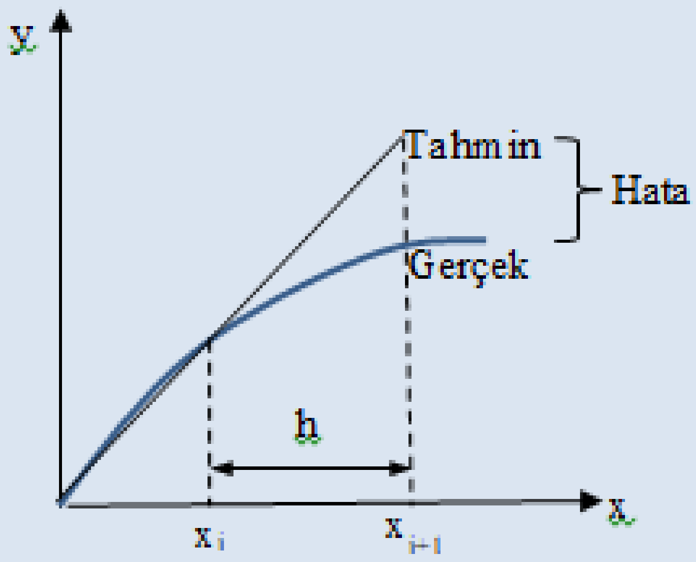
h, x değişkenine verilen bir pozitif artış olmak üzere $x_i=x_0+h$ şeklindedir. Buradan $h=x_{i+1}-x_i$ değerinin yeteri kadar küçük olması halinde f(x, y) fonksiyonunun x_i, x_{i+1} aralığında sabit olması varsayılarak;

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx = h.f(x_i,y_i)$$

yazılır ve böylece y_{i+1} değeri

$$y_{i+1} = y_i + h.f(x_i,y_i)$$

olarak bulunur.



Euler yöntemi

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^3 - 20x + 8.5$$

h=0.5 alarak x=0'dan x=4'e kadar integre edin.

Başlangıç koşulu x=0 için y=1'dir.

$$y(0.5) = y(0) + f(0,1).0.5$$

Burada y(0)=1 ve x=0'daki eğim tahmini

$$f(0,1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

olur. Dolayısıyla,

$$y(0.5) = 1.0 + 8.5(0.5) = 5.25$$

ve x=0.5'teki gerçek çözüm,

$$y = -0.5(0.5)^4 + 4.(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 = 3.21875$$

olarak elde edilir. Böylece hata,

$$E_t = gerçek - yaklaşık = 3.21875 - 5.25 = -2.03125$$

Örnek:

y'=y diferansiyel denkleminin y(0)=1 başlangıç değeri ile h=0.01 alarak Euler metodu ile;

$$y(0.01) = y_1 = 1 + 0.01 = 1.01$$

$$y(0.02) = y_2 = 1.01 + 0.01(1.01) = 1.0201$$

$$y(0.03) = y_3 = 1.0201 + 0.01(1.0201) = 1.030301$$

$$y(0.04) = y_4 = 1.030301 + 0.01(1.030301) = 1.0406$$

çözümü bulunur.

Gerçek analatik çözüm;

$y=e^x$, x=0.04'deki gerçek değer y=1.0408'dir.

11.4. Taylor Serisi Yardımı ile Diferansiyel Çözümü

$y'=f(x, y)$ denklemi $y(x_0)=y_0$ başlangıç şartıyla veriliyor. Eğer $y(x)$ bu sistemin çözümüyse $x=x_0$ civarında $y(x)$ Taylor Serisine açılırsa;

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \cdots$$

Bu açılımdaki katsayılar bulunarak yerine konursa verilen diferansiyel denklem bir seri şeklinde ifade edilmiş olur.

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Diferansiyel denklemini y(0)=1 başlangıç şartını kullanarak Taylor serisi yardımıyla çözünüz.

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

$$y(x_0)\ ilk\ şart\quad x = 0\ için\ y(0) = 1$$

$$y'(x_0) = y'(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y''(x) = 1 + y', \qquad y''(0) = 1 + 1 = 2$$

$$y'''(x) = y'', \qquad y'''(0) = 2$$

$$y^{iv}(x) = y''', \qquad y^{iv}(0) = 2$$

verilen diferansiyel denklemin çözümü:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + hata$$

Örnek:

$$xy' = x - y$$

diferansiyel denklemini y(2)=2 için x=2.1 civarında Taylor serisi yardımıyla çözünüz.

İlk birkaç türevin x=2, y=2 için değerleri;

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \quad , \qquad y_0' = 0$$

$$y'' = \frac{-y}{x} + \frac{y}{x^2} \quad , \qquad y_0'' = 1/2$$

$$y''' = \frac{-y''}{x} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} \quad , \qquad y_0''' = -3/4$$

$$y^{iv} = \frac{-y'''}{x} + \frac{3y''}{x^2} - \frac{6y'}{x^3} + \frac{6y}{x^4} \quad , \qquad y_0^{iv} = 3/2$$

x_0=2 civarında Taylor serisi;

$$y(x) = y_0 + (x-2)y_0' + \frac{1}{2}y_0''(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3 y_0''' + \frac{1}{24}(x-2)^4 y_0^{iv} + \cdots$$

Türevler yerine konursa;

$$y(x) = 2 + (x-2)0 + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \frac{1}{16}(x-2)^4$$

olur. x=2.1 için;

$$y(2.1) = 2.00238$$

11.5. Picards Metodu

Bu metotta bir y'=f(x, y) diferansiyel denkleminin iterasyonla çözümü;

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$$

şeklinde elde edilir.

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

diferansiyel denklemindex=0.2 için y değerini tahmin ediniz. y(0)=1 başlangıç şartı olarak kabul edilecektir.

$f(x, y)=x-y$, $x_0=0$, $y_0=1$ veriliyor.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx = 1 + \int_0^x (x-1)dx = 0.5x^2 - x + 1$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(x, y_1)dx = 1 + \int_0^x (x - 0.5x^2 + x - 1)dx = -\frac{1}{6}x^3 - x^2 - x + 1$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x f(x, y_2)dx = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x - 1\right)dx = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$$

.....

$x = 0.2$ $için$ $y_0 = 1,$ $y_2 = 0.83867,$ $y_4 = 0.83746$

$y_1 = 0.82,$ $y_3 = 0.8374$

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = 3x + y^2$$

diferansiyel denklemini x=0.1 civarında çözünüz. y(0)=1 başlangıç şartı kabul edilecektir.

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(x, y_0)dx = 1 + \int_0^x (3x + 1)dx = 1.5x^2 + x + 1$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(x, y_1)dx = 1 + \int_0^x (3x + y_1^2)dx$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x f(x, y_2)dx = 1 + \int_0^x \left(\frac{9}{4}x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1\right)dx$$

$x_0=0.1$, $y_0=1$, $y_1=1.115$, $y_2=1.1264$, $y_3=1.2172$

11.6. Runge-Kutta Yöntemleri

Runge-Kutta yöntemleri, yüksek dereceli türevlerin hesaplanmasına gerek olmaksızın Taylor serisi yaklaşımının doğruluğunu yakalamaktadır. Bu yöntemlerin çok çeşidi vardır, ancak tümü genel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_{i+1} = y_i + \emptyset(x_i, y_i, h)h$$

Burada $\emptyset(x_i, y_i, h)$ artım fonksiyonu diye adlandırılır ve aralık boyunca temsili türev olarak yorumlanabilir. Artım fonksiyonu;

$$\emptyset(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \cdots + a_n k_n$$

Burada a'lar sabittir, k'ler ise aşağıdaki gibidir.

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h,\ \ y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h,\ \ y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

....

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h,\ \ y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-2,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Burada p'ler ve q'lar sabittir. k'lerin tekrarlamalı bağlantılar olduğuna dikkat edin. Yani k_2 eşitliğinin içinde k_1, k_3 eşitliğinin içinde k_2 şeklinde devam etmektedir.

11.6.1. İkinci Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

şeklindedir. Burada

$$k_1 = f(x_i + y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, \; y_i + q_{11} k_1 h)$$

a_1, a_2, p_1 ve q_{11} değerleri ikinci dereceden Taylor serisine açılırsa;

$$a_1 + a_2 = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = 1 - a_2$$

$$a_2 p_1 = 0.5 \quad ve \quad a_2 q_{11} = 0.5 \quad \rightarrow \quad p_1 = q_{11} = 0.5 a_2$$

Farklı a_2 değerleri için 3 farklı versiyon vardır.

Tek Düzeltme Katsayılı Heun Yöntemi

$$a_2 = 0.5 \quad \rightarrow \quad a_1 = 0.5 \quad ve \quad p_1 = q_{11} = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

olur. Burada;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h,\ \ y_i + k_1 h)$$

şeklindedir.

Orta Nokta Yöntemi

$$a_2 = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = 0 \quad ve \quad p_1 = q_{11} = 1/2$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

olur. Burada;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + 0.5h,\ \ y_i + 0.5k_1 h)$$

şeklindedir.

Ralston Yöntemi

$$a_2 = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{3} \quad ve \quad p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

olur. Burada;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h,\ y_i + \frac{3}{4}k_1 h)$$

şeklindedir.

Örnek:

$$f(x,y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

denklemini, adım büyüklüğünü 0.5 alarak x=0'dan x=4'e kadar sayısal olarak integre etmek için orta nokta yöntemini ve Ralston yöntemini kullanın. Bu sonuçları, diğer ikinci dereceden Runge-Kutta algoritmaları (bu ise düzeltmesiz Heun yöntemi) ile elde edilenlerle karşılaştırınız.

Orta nokta yönteminde ilk adım k_1'i hesaplamaktır.

$$k_1 = -2(0) + 12(0)^3 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$k_2 = -2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5 = 4.21875$$

$$y(0.5) = 1 + 4.21875(0.5) = 3.109375$$

$$\varepsilon_t = \%3.4$$

Ralston yöntemiyle ilk aralık için k_1=8.5'e eşittir.

$$k_2 = -2(0.375)^3 + 12(0.375)^2 - 20(0.375) + 8.5 = 2.58203125$$

Ortalama eğim;

$$\emptyset = \frac{1}{3}(8.5) + \frac{2}{3}(2.58203125) = 4.5546875$$

Bu değerlerle ilk tahmin hesaplanırsa;

$$y(0.5) = 1 + 4.5546875(0.5) = 3.27734375$$

$$\varepsilon_t = \% - 1.82$$

bulunur. Hesaplara devam edilmiş ve sonuçlar özetlenmiştir.

		Heun		Orta Nokta		Ralston RK	
x	$y_{gerçek}$	y	$\lvert\varepsilon_t\rvert$%	y	$\lvert\varepsilon_t\rvert$%	y	$\lvert\varepsilon_t\rvert$%
0.0	1.00000	1.00000	0	1.00000	0	1.0000	0
0.5	3.21875	3.43750	6.8	3.109375	3.4	3.277344	1.8
1.0	3.00000	3.37500	12.5	2.81250	6.3	3.101563	3.4
1.5	2.21875	2.68750	21.1	1.984375	10.6	2.347656	5.8
2.0	2.00000	2.50000	25.0	1.75	12.5	2.140625	7.0
2.5	2.71875	3.18750	17.2	2.484375	8.6	2.855469	5.0
3.0	4.00000	4.37500	9.4	3.81250	4.7	4.117188	2.9
3.5	4.71875	4.93750	4.6	4.609375	2.3	4.800781	1.7
4.0	3.00000	3.00000	0	3	0	3.031250	1.0

11.6.2. Üçüncü Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

k_1, k_2, k_3 ve k_4 gibi katsayılar kullanılarak yi+1 ifadesi;

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

Burada,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h,\ y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

şeklindedir.

11.6.3. Dördüncü Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

En çok rağbet gören Runge-Kutta yöntemleri dördüncü derecedendir. İkinci dereceden yaklaşımlarda olduğu gibi, sonsuz sayıda versiyon vardır. Aşağıdaki form en yaygın kullanılanıdır ve bu nedenle de biz onu klasik dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi diye adlandırıyoruz.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Burada,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + k_3 h)$$

olarak verilir.

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^{1/2}$$

diferansiyel denklemini x=0.4, y=0.41 başlangıç şartlarında x=0.8 için Runge-Kutta metodu ile çözün.

$$(x_0, y_0) = (0.4, 0.41), \quad h = 0.4, \quad k_1 = \sqrt{0.81} = 0.9$$

$$k_2 = f(x_0 + h, \ y_0 + k_1) = 1.253$$

$$k_3 = f(x_0 + h, \ y_0 + k_2) = 1.308125$$

$$k_4 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \ y_0 + 0.5k_1\right) = 1.090875$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + k_3 + 4k_4)h = 0.84811$$

veya

$$k_1 = \sqrt{0.81} = 0.9, \qquad k_2 = f(x_0 + h/2, \ y_0 + 0.5k_1) = 1.090875$$

$$k_3 = f(x_0 + h/2, \ y_0 + k_2/2) = 1.108225$$

$$k_4 = f(x_0 + h, \ y_0 + k_3) = 1.2858$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h = 0.84893$$

11.7. Diferansiyel Denklem Sistemleri

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \quad ve \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

şeklinde verilen diferansiyel denklem sisteminde başlangıç şartları x0, y0, z0 olmak üzere Picards, Euler, Runge-Kutta veya Taylor metotlarıyla çözüme ulaşılabilir. Bunlar 1. mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

Örnek:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z) = x + z \quad ve \quad \frac{dz}{dx} = g(x,y,z) = x - y^2$$

diferansiyel denklem sisteminde x=0.1 için y, z değerlerini tahmin ediniz. Başlangıç şartları y=2, z=1 (x=0 için)

Picards Metodu:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0,z_0)dx = 2 + \int_{0}^{x} (1+x)dx = 2 + x + 0.5x^2$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x,y_0,z_0)dx = 1 + \int_{0}^{x} (-4+x)dx = 1 - 4x + 0.5x^2$$

İkinci yaklaşımla;

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1,z_1)dx = 2 + \int_{0}^{x} (1 - 3x + 0.5x^2)dx = 2 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x_1} g(x,y_1,z_1)dx = 1 + \int_{0}^{x} \left(-4 - 3x - 3x^2 - x^2 + \frac{1}{4}x^4\right)dx$$

$$= 1 - 4x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{20}x^5$$

Üçüncü yaklaşımla;

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2, z_2)dx = 2 + \int_{0}^{x} \left(1 - 3x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right)dx$$

$$y_3 = 2 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5$$

$$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y_2, z_2)dx = 1 + \int_{0}^{x} \left(x - 4 - 4x + 5x^2 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{31}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{36}x^6\right)dx$$

$$z_3 = -4x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{31}{60}x^5 + \frac{1}{12}x^6 - \frac{1}{252}x^7$$

$x = 0.1$ *için*

$y_1 = 2.105 \qquad z_1 = 0.605$

$y_2 = 2.08517 \qquad z_2 = 0.58397$

$y_3 = 2.08447 \qquad z_3 = 0.58672$

bulunur.

11.8. Yüksek Mertebeli Diferansiyel Denklemler

Bunlar ortak çözülerek birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürülebilen yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerdir. n. dereceden bir diferansiyel denklem;

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots$$

şeklindedir. Bu denklem 1. mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

Başlangıç şartları $x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = (y_1)_0, \quad y'' = (y_2)_0, \quad y_{n-1} = (y_{n-1})_0$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-4y=0$$

diferansiyel sisteminde Runge-Kutta metodunu kullanarak y değerini x=0.1 için tahmin edin.

Başlangıç şartları;

$$f(x,y,z)=\frac{dy}{dx}=z, \qquad \frac{dz}{dx}=4y-2xz=g(x,y,z), \qquad y=0.2, \qquad \frac{dy}{dx}=0.5, \qquad x=0$$

Başlangıç şartları $(x_0,\ y_0,\ z_0)=(0,\ 0.2,\ 0.5)$

$$h=0.1, \quad f_0=0.5, \quad g_0=0.8$$

$$k_1=hf_0=0.05$$

$$l_1=hg_0=0.08$$

$$k_2=hf(x_0+h/2,\ y_0+k_1/2,\ z_0+l_1/2)=0.1(0.54)=0.054$$

$$l_2=hg(x_0+h/2,\ y_0+k_1/2,\ z_0+l_1/2)=0.1(0.848)=0.0848$$

$$k_3=hf(x_0+h/2,\ y_0+k_2/2,\ z_0+l_2/2)=0.1(0.5423)=0.05423$$

$$l_3=hg(x_0+h/2,\ y_0+k_2/2,\ z_0+l_2/2)=0.1(0.85371)=0.085377$$

$$k_4=hf(x_0+h,\ y_0+k_3,\ z_0+l_3)=0.1(0.58377)=0.058377$$

$$y=y_0+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=0.2+0.0541863=0.254$$