



ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI



MMB621 MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

2. DETEMİNANTLAR

DR. MAHMUT CAN ŞENEL

ŞUBAT 2021

SAMSUN

3. DETERMİNANT

Determinant, karesel bir matrisi reel sayıya dönüştüren bir fonksiyondur. $N \times n$ boyutlu bir A kare matrisinin determinanı $\det(A) = |A|$ ile gösterilir.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{dir.}$$

3.1. Determinantın Özellikleri

- 1) Bir determinantın bir satırdaki veya bir sütundaki elemanları 0 ise, o determinantın değeri 0'dır.
- 2) Bir determinantta aynı numaralı satırlar ve sütunlar yer değiştirirse, determinantın değeri değişmez.
- 3) Bir determinantın iki satır veya sütunu yer değiştirirse, determinantın işareti değişir.
- 4) Bir determinantın bir sayı ile çarpılması demek herhangi bir satırın veya sütunun o sayı ile çarpılması demektir.
- 5) Bir determinantın iki satır veya sütunu aynı elemanlardan oluşuyorsa veya orantılı ise o determinantın değeri 0'dır.
- 6) Bir determinantta bir satırın veya sütunun elemanlarını bir sayı ile çarpıp bir başka satırın ya da sütunun karşılıklı elemanlarına eklemek determinantın değerini değiştirmez.

Determinantı sıfır olan bir matrise **singüler matris** denir.

3.2. Determinantın Minörleri ve Kofaktörleri

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisin i . satır ve j . sütunu sildikten sonra elde edilen yeni matrisin determinantına a_{ij} elemanının **alt determinantı** veya **minörü** denir ve $|M_{ij}|$ ile gösterilir.

$|A_{ij}| = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$ ifadesine de a_{ij} elemanın **kofaktörü** denir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin 1. satır elemanlarının minör ve kofaktörünü bulunuz.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11 \quad \text{ve} \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7 \quad (A_{13} \text{ elemanının minörü})$$

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1} |M_{11}| = -1 \quad \text{ve} \quad |A_{12}| = (-1)^{1+2} |M_{12}| = 5$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3} |M_{13}| = 7 \quad (A_{13} \text{ elemanının kofaktörü})$$

3.3. Determinant Hesabında Kullanılan Yöntemler

Bir matrisin determinantını bulmak için kullanılan birçok metod vardır. Bu metodlar aşağıda izah edilmiştir.

3.3.1. SARRUS Kuralı

Bu kurala göre ilk iki satır alt tarafa veya ilk iki sütuna sağ tarafa yazılıp esas köşegen çarpımlarından yedek köşegen çarpımları çıkarılır.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ?$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 1.2.2 + 3.1.3 + 4.0.1 - 4.2.3 - 1.1.1 - 3.0.2 = -12$$

3.3.2.LAPLACE Kuralı

Bu kuralla herhangi bir satır veya sütuna göre açılım yapılır. Ancak sıfır elemanının yoğun olduğu satır veya sütunlar kolaylık sağlar. Bu açılım her boyuttaki determinant için geçerlidir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinantını 1. satıra göre açalım.}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } |A| = ?$$

Kolaylık sağlaması açısından 2. satıra göre açılım yapılır.

$$|A| = 0 + (1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 12$$

3.3.3.Chio Yöntemi

Bu metodla bir seri işlemler sonrasında determinant bulunacaktır. Matrisin boyutu en sonda (2×2) olacak kadar küçülür.

$$|A| = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Yani matrisin her elemanı boyutu (2×2) olan alt matrislerin determinanı olarak bulunur. Bu boyut azaltma işlemine (2×2) olana kadar devam edilir.

Örnek:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{4} \frac{1}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (1) (12) = 3$$

3.3.4. Yok Etme Yöntemi (Gauss Metodu)

Bir üst üçgen veya alt üçgen matrisin determinanı köşegenindeki elemanların çarpımına eşittir. Yok etme metodunda determinanı bulunacak olan matris, satırları ile yapılan bazı işlemlerle önce bir üst üçgen matrisine dönüştürülür. Sonra da yukandaki ifadelerdeki kurala uygun olarak bu matrisin determinanı hesaplanır.

$$|L| = l_{11} \cdot l_{22} \cdot \dots \cdot l_{nn}$$

$$|U| = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Burada;

$$(2.\text{satır}) - (a_{21}/a_{11}) \cdot (1.\text{satır})$$

$$(3.\text{satır}) - (a_{31}/a_{11}) \cdot (1.\text{satır})$$

$$(4.\text{satır}) - (a_{41}/a_{11}) \cdot (1.\text{satır})$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \text{ şekline dönüşür.}$$

$$(3.\text{satır}) - (a'_{32}/a'_{22})(2.\text{satır})$$

$$(4.\text{satır}) - (a'_{42}/a'_{22})(2.\text{satır}) \text{ uygulandığında}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \text{ şekline dönüşür.}$$

$$(4.\text{satır}) - (a''_{43}/a''_{33})(3.\text{satır})$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix} \text{ şeklini alır.}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a'_{22} \cdot a''_{33} \cdot a'''_{44}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ?$$

Gauss Metoduyla:

$$(2. \text{ satır}) - 3/2(1. \text{ satır})$$

$$(3. \text{ satır}) - 3/2(1. \text{ satır})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 3.5 \\ 0 & 0.5 & 2.5 \end{vmatrix}$$

$$(3. \text{ satır}) - (0.5/1.5)(2. \text{ satır})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 2/1.5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot (1.5) \cdot (2/1.5) = 4$$

Laplace Kuralıyla:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot 2 - 1(12 - 15) + 1 \cdot (6 - 9) = 4$$

3.4. Bir Kare Matrisin Tersinin Bulunması

A $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $A.B=B.A=I_{n \times n}$ eşitliğini sağlayan B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin tersi (inversi) denir.

$B=A^{-1}$ ile gösterilir. Buna göre $A^{-1}.A=A.A^{-1}=I_{n \times n}$ dir.

$AX=B$ ise X ile bulmak için bölme işlemine gerek yoktur. Denklemin her iki yanını A^{-1} ile çarpılırsa;

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

veya

$$X = A^{-1}.B$$

şeklinde yazılarak ters matris yardımıyla X bulunur.

Bir matrisin tersi;

$$A^{-1} = Adj(A)/|A|$$

$$Adj(A) = Kof(A)^{transpozu}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ise } Adj(A) = ?$$

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4 \qquad |A_{12}| = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$$

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1 \qquad |A_{22}| = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$\text{Kofaktör } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ transpozu } Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } A^{-1} = ?$$

$$Kof(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } Adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Diğer Yol:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \frac{1}{2} (1. \text{ satır})$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2. \text{ satır}) - (1. \text{ satır})$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \quad -2 \cdot (2. \text{ satır})$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \quad (1. \text{ satır}) - 3/2(2. \text{ satır})$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3.5. Matrisin Rankı

Bir matrisin rankı, matris içinde sıfır olmayan en yüksek değerli determinantın mertebesidir.

Matris içinde determinant ifadesiyle matrisin bazı sıra ya da sütunlarının çıkarılmasıyla elde edilen determinant (minör) alınmıştır.

Örneğin 3×5 bir matris olsun. En büyük kare matris 3×3 olur. 3×3 , 3 adet matris oluşturabilir. Bunların herhangi birinin determinantı sıfır olmadığı durumda 3×5 matrisin rankı 3 olur. Eğer hepsinin determinantı 0 olursa 2×2 matrislere bakılır.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(A)=?$$

Matrisin yapabileceği en yüksek dereceli determinant 2. mertebede olacaktır. Öyleyse rank 2'den küçük veya eşit olacaktır.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrisin determinantı sıfırdır. Diğer 2. mertebe determinantlar kontrol edilir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisin determinantı 5 olduğundan $\text{rank}(A)=2$ 'dir.