ONDOKUZ MAYıS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MMB621 MÜHENDİSLİKTE SAYISAL YÖNTEMLER

5. ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER

DR. MAHMUT CAN ŞENEL

ŞUBAT 2021

SAMSUN

BÖLÜM 5

5. ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER

Fizik ve mühendislikte birçok problem aşağıdaki modele indirgenebilir. A matrisi, n. mertebeden kare matris olarak verilsin;

$$AX = \lambda X$$

ifadesini sağlayan sıfırdan farklı X vektörü ve λ sabiti;

$$AX - \lambda X = 0 \quad \text{ya da} \quad (A - \lambda I)X = 0 \quad \text{olur.}$$

Denklem x_1, x_2, ..., x_n için homojen doğrusal denklemler olarak görülür. Katsayılar matrisi $(A - \lambda I)$ ve genişletilmiş matris ise aynı matrise bir sıfırlar sütunu eklenmesiyle oluşan matris olduğundan denklemlerin ortak çözümleri vardır. Yine katsayılar matrisinin rankı (n)'ye eşitse bir ortak çözüm vardır.

Çözüm:

$$x_1 = x_2 = \cdots .. = x_n = 0$$

olur. Öyleyse eğer rank,

$$(A - \lambda I)X < n$$

ise sıfırdan farklı bir X vektörü vardır. Bu,

$$det(A - \lambda I) = 0$$

ise doğru olacaktır.

Eğer bu determinant sıfır ise, tam çözümü belirlemek için kullanılabilecek bir ya da daha fazla doğrusal bağımsız çözüm vektörleri vardır.

Aranan λ değerleri için;

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots. & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots. & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{olur.}$$

λ'nın kuvvetlerine göre terimler grupandırılırsa P_1, P_2,...., P_n çok karmaşık a_{ij} çarpımlar sonucu elde edilen sayılar olmak üzere;

$$(-1)^n [\lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} - P_2 \lambda^{n-1} \dots\dots - P_n]$$

gibi bir ifade elde edilir. Bu denklemi sıfır yapan n tane (farklı olabilir) λ değeri vardır. Bu değerlere A matrisinin "özdeğerleri" ya da "**karakteristik kökleri**" denir. Herhangi bir özdeğeri olan λ_1 için $(A - \lambda I)X = 0$ denklemini sağlayan X vektörüne (λ_1)'e karşı gelen "**öz vektör**" denir. Yukarıdaki polinom ise A matrisinin karakteristik polinomudur ve

$$\lambda^n - P_1 \lambda_{n-1} - P_2 \lambda_{n-2} \dots. - P_n = 0$$

denklemine "**karakteristik denklem**" adı verilir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Determinantı oluşturulsun. Açılırsa karakteristik denklem;

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

çarpanlarına ayrılırsa;

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

özdeğerler λ_1=4, λ_2=-1 olur.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

λ_1 yerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İki bilinmeyen ve katsayı matrisinin rankı (1) olduğundan bu denklemler sadece bir doğrusal bağımsız çözüm vektörüne sahiptir. Diğer çözümler bu vektörlerin katlarıdır.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörü bir çözümdür ve böylece (λ_1)'e karşı gelen özvektör olur. Tüm diğer çözümler (c_1) herhangi bir çözüm olmak üzere;

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. λ_2'ye karşılık gelen öz vektörü bulmak içinse;

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sadece bir doğrusal bağımsız çözüm vektörünün olacağı açıkça görülmektedir. Bu çözüm vektörünün ise;

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Diğer çözümler;

$$c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Böylece (4) ve (-1) özdeğerlerine karşı gelen özvektörler;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ve \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.