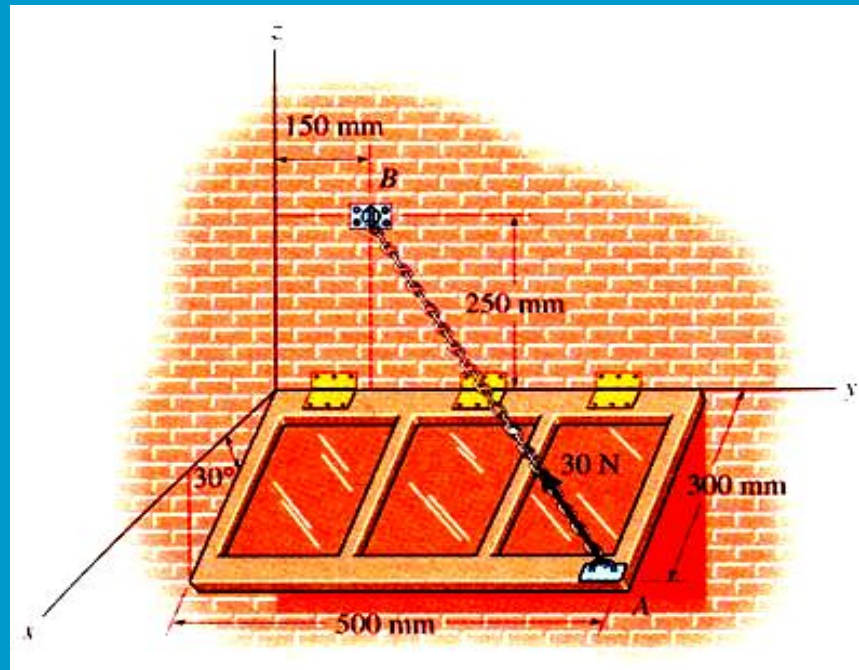


KONUM VEKTÖRLERİ

Bugünün Hedefleri:

- a) Kartezyen koordinat formunda, verilen geometriden bir konum vektörünün yazılabilmesi.
- b) Bir çizgi boyunca yönlendirilmiş bir kuvvet vektörünün yazılabilmesi.



UYGULAMALAR



Kanat Desteęi

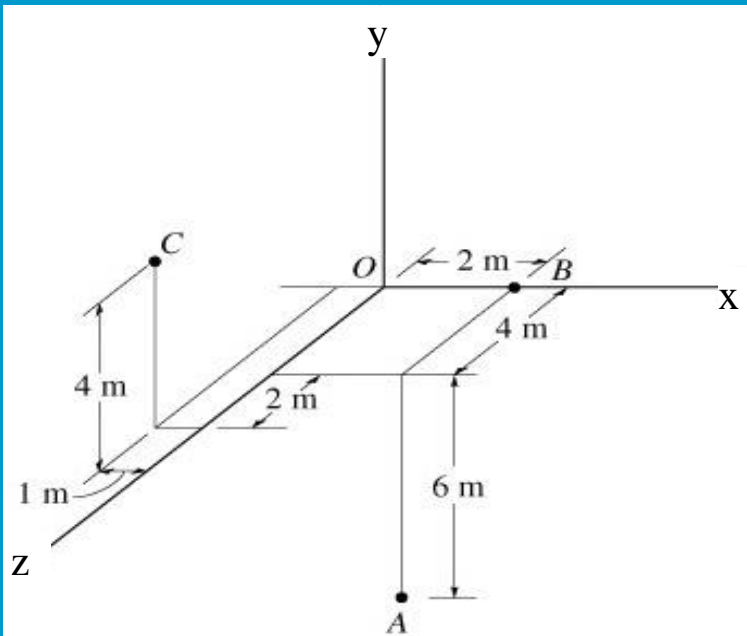
Kanat desteęi boyunca etki eden kuvveti bir 3-D kartezyen vektörü olarak nasıl gösterebiliriz?



KONUM VEKTÖRÜ

Bir konum vektörü; bir noktayı diğer bir noktayla ilintili bir uzaya konumlandıran bir sabit vektör olarak tanımlanır.

3 boyutlu uzayda A, B ve C noktalarını düşünün. Bunların koordinatları sırayla (X_A, Y_A, Z_A) , (X_B, Y_B, Z_B) ve (X_C, Y_C, Z_C) olsun.



Bu koordinatları yazmak istersek

$$X_A = 2 \quad Y_A = -6 \quad Z_A = 4$$

$$X_B = 2 \quad Y_B = 0 \quad Z_B = 0$$

$$X_C = -1 \quad Y_C = 4 \quad Z_C = 6$$

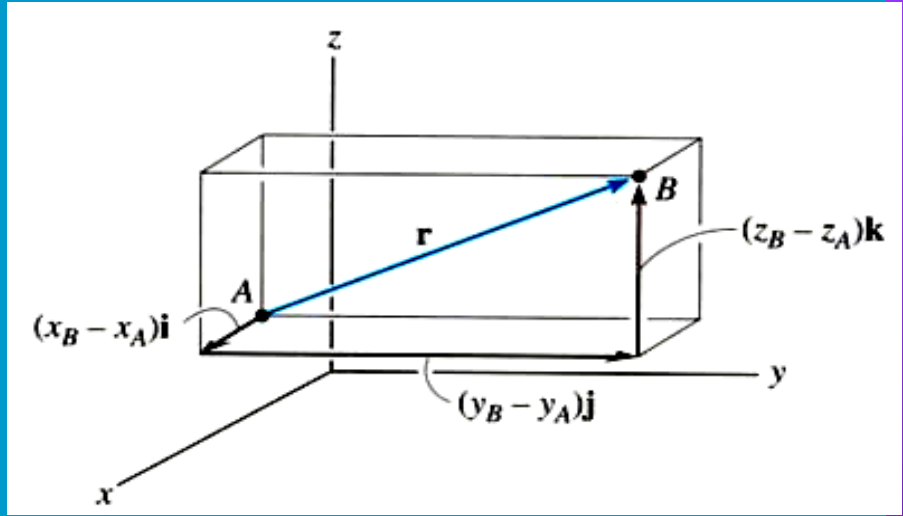
Olarak yazılmalıdır.



KONUM VEKTÖRÜ

Bir konum vektörü; bir noktayı diğer bir noktayla ilintili bir uzaya konumlandıran bir sabit vektör olarak tanımlanır.

3-D uzayında A ve B noktalarını düşünün. Bunların koordinatları sırayla (X_A, Y_A, Z_A) ve (X_B, Y_B, Z_B) , olsun.



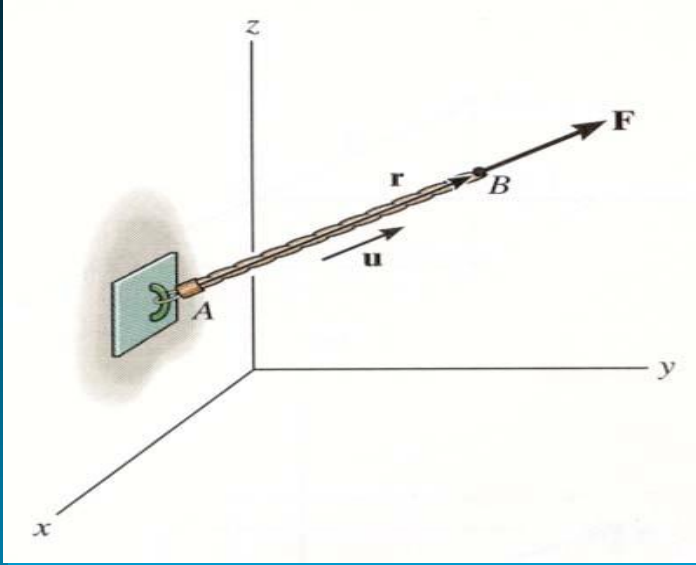
A noktasından B noktasına yönlendirilen konum vektörü \mathbf{r}_{AB}

$\mathbf{r}_{AB} = \{ (X_B - X_A) \mathbf{i} + (Y_B - Y_A) \mathbf{j} + (Z_B - Z_A) \mathbf{k} \}$ m olarak tanımlanır.

Lütfen B noktasının bitiş noktası ve A noktasının başlangıç noktası olduğuna dikkat edin. Bu nedenle DAİMA ‘kuyruk’ koordinatlarını ‘uç’ koordinatlarından çıkartın!



BİR ÇİZGİ BOYUNCA YÖNLENDİRİLMİŞ KUVVET VEKTÖRÜ (Bölüm 2.8)

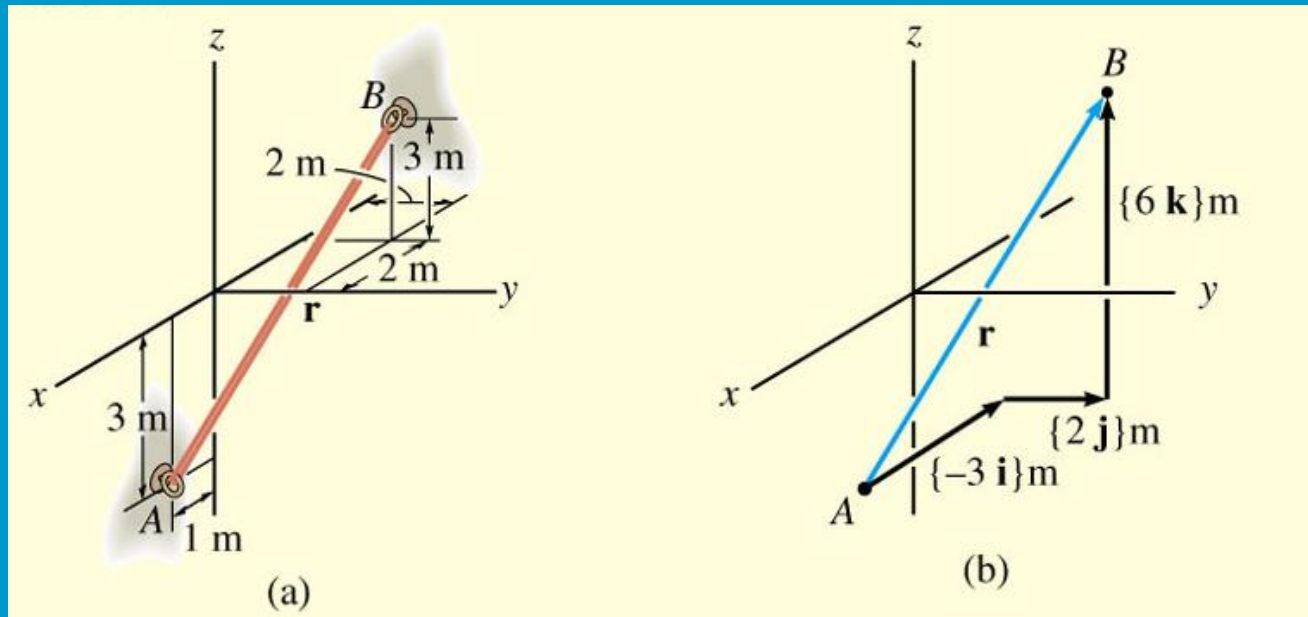


Bir kuvvet bir çizgi boyunca yönlendirilmiş ise, bir birim vektörünü ve kuvvet büyüklüğünü kullanarak Kartezyen Koordinatlarında kuvvet vektörünü gösterebiliriz. Bunun için:

- Bu çizgi üzerindeki iki nokta boyunca \mathbf{r}_{AB} konum vektörünü bulmalıyız.
- Çizginin yönünü açıklayan birim vektörünü $\mathbf{u}_{AB} = (\mathbf{r}_{AB}/r_{AB})$ bulmalıyız.
- Birim vektörünü kuvvet büyüklüğü $\mathbf{F} = F \mathbf{u}_{AB}$ ile çarpmalıyız.



ÖRNEK:



Şekildeki gibi A ve B noktalarına elastik bir bant tutturulmuştur. Bantın uzunluğunu ve A'dan B'ye ölçülen doğrultusunu belirleyiniz.

$$\mathbf{r}_{AB} = \{ (X_B - X_A) \mathbf{i} + (Y_B - Y_A) \mathbf{j} + (Z_B - Z_A) \mathbf{k} \} \text{ m}$$

$$A(1, 0, -3) \quad B(-2, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [-2 \text{ m} - 1 \text{ m}] \mathbf{i} + [2 \text{ m} - 0] \mathbf{j} + [3 \text{ m} - (-3 \text{ m})] \mathbf{k} \\ &= \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\} \text{ m} \end{aligned}$$



r 'nin büyüklüğü, lastik bantın uzunluğunu verir.

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = 7 \text{ m}$$

r doğrultusundaki birim vektör,

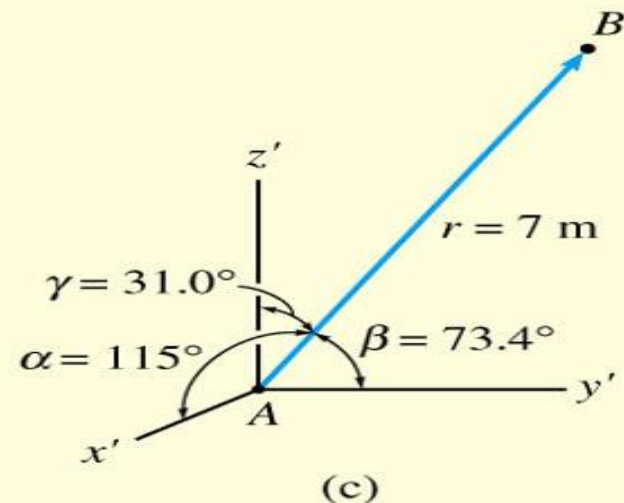
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Bu birim vektörün bileşenleri,

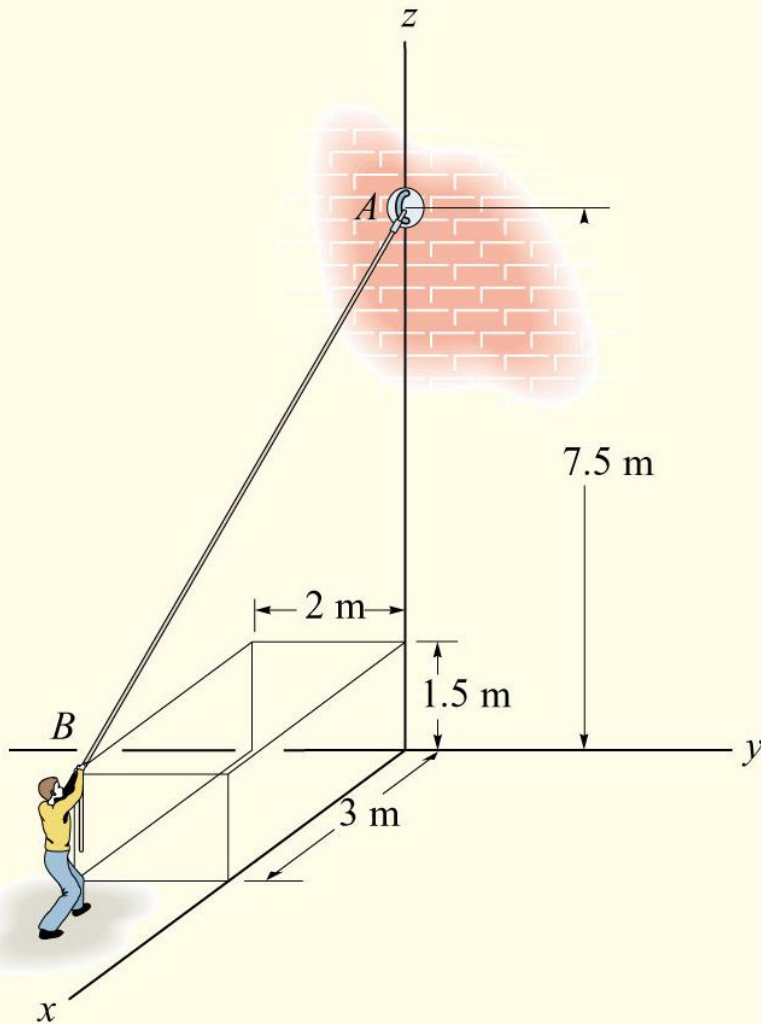
$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31.0^\circ$$



ÖRNEK:



Şekildeki adam, ipi 350 N luk bir kuvvetle çekmektedir. A mesnetine etkiyen bu kuvveti kartezyen vektör şeklinde ifade ediniz ve doğrultusunu belirleyiniz.

$$A (0, 0, 7.5) \quad B (3, -2, 1.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (3 \text{ m} - 0)\mathbf{i} + (-2 \text{ m} - 0)\mathbf{j} + (1.5 \text{ m} - 7.5 \text{ m})\mathbf{k} \\ &= \{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \{(X_B - X_A)\mathbf{i} + (Y_B - Y_A)\mathbf{j} + (Z_B - Z_A)\mathbf{k}\} \text{ m}$$

AB ipinin uzunluğunu gösteren **r** nin büyüklüğü

$$r = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (-2 \text{ m})^2 + (-6 \text{ m})^2} = 7 \text{ m}$$

Birim vektör : **r** ve **F** in doğrultusunu ve yönünü tanımlayan birim vektör

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Kuvvet vektörü : **F** in büyüklüğü 350 N ve **u** ile tanımlandığına göre

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F\mathbf{u} = 350 \text{ N} \left(\frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k} \right) \\ &= \{150\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

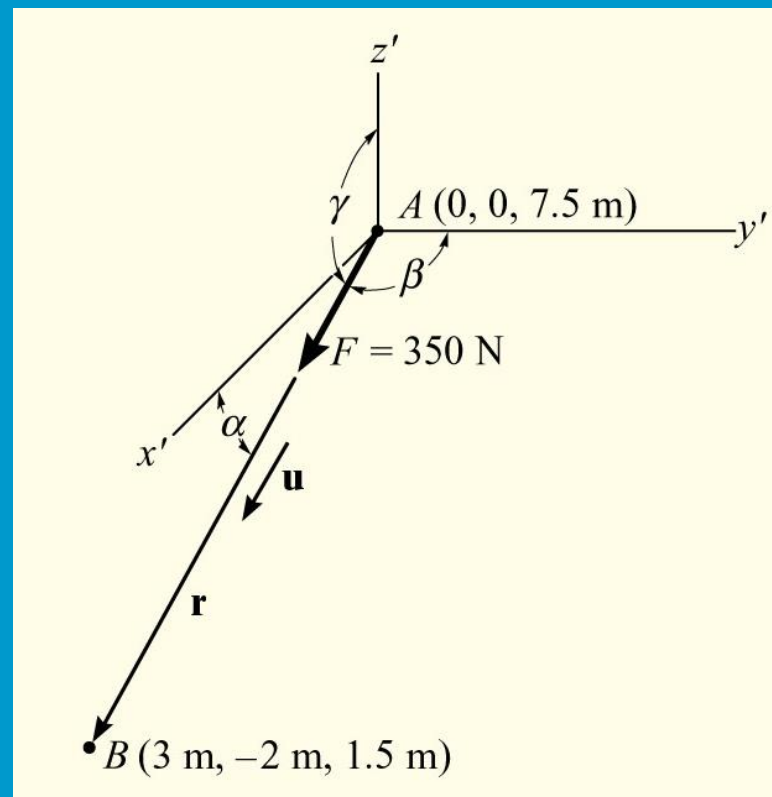


Doğrultu açıları, birim vektörün bileşenlerinden bulunur.

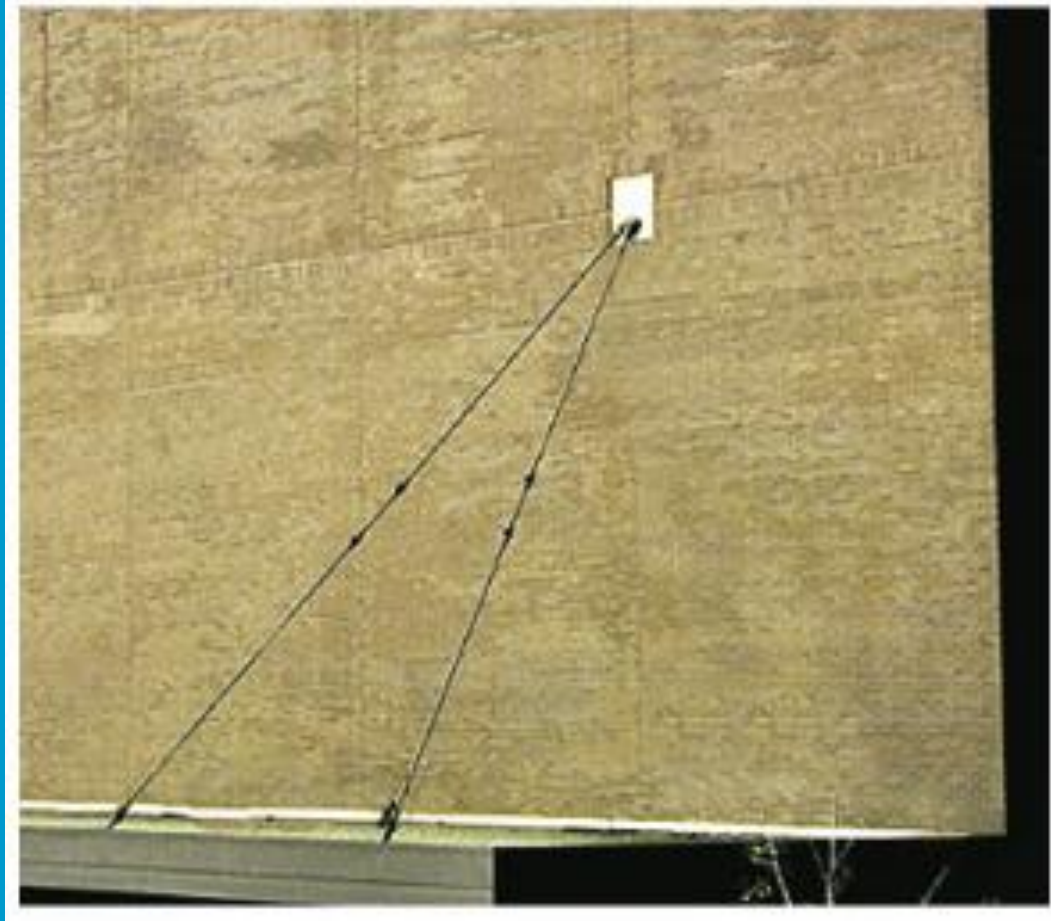
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 64.6^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{7}\right) = 107^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{7}\right) = 149^\circ$$



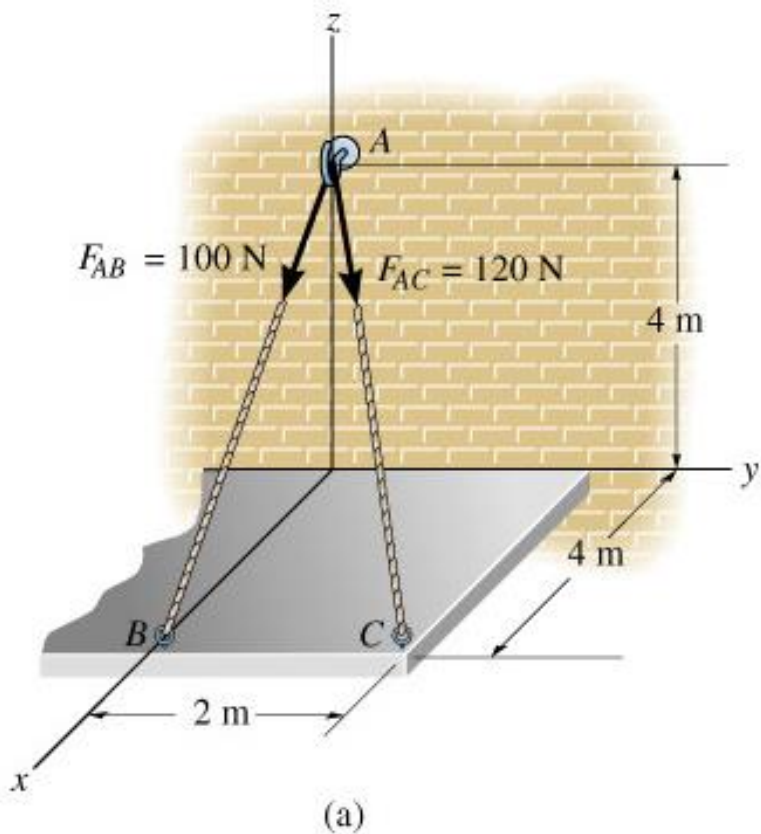
ÖRNEK:



Şekilde gösterildiği gibi , A daki halkaya $F_{AB}=100\text{ N}$ ve $F_{AC}=120\text{ N}$ kuvvetleri uygulanmaktadır. A'da etkiyen kuvvetlerin bileşkesini bulunuz.

$$A (0,0,4), B (4,0,0), C (4,2,0)$$

F_{AB} ve F_{AC} nin doğrultuları, kablolar boyunca u_{AB} ve u_{AC} birim vektörleri oluşturularak belirlenir. Bu birim vektörler ilgili r_{AB} ve r_{AC} konum vektörlerinden elde edilir.



$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB} &= (4 \text{ m} - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - 4 \text{ m})\mathbf{k} \\ &= \{4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\} \text{ m} \end{aligned}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = 5.66 \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AB} = 100 \text{ N} \left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} \right) = 100 \text{ N} \left(\frac{4}{5.66} \mathbf{i} - \frac{4}{5.66} \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{F}_{AB} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\} \text{ N}$$



F_{AC} için

$$\mathbf{r}_{AC} = (4 \text{ m} - 0)\mathbf{i} + (2 \text{ m} - 0)\mathbf{j} + (0 - 4 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$= \{4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 6 \text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = 120 \text{ N} \left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}} \right) = 120 \text{ N} \left(\frac{4}{6}\mathbf{i} + \frac{2}{6}\mathbf{j} - \frac{4}{6}\mathbf{k} \right)$$

$$= \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\} \text{ N}$$

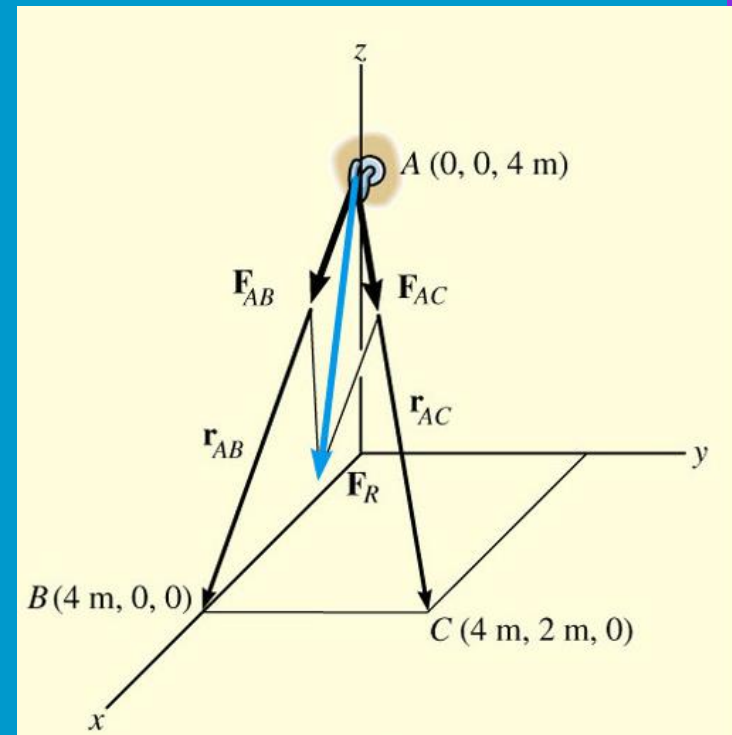


F_R bileşke vektor,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\} \text{ N} + \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\} \text{ N} \\ &= \{150.7\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 150.7\mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

F_R bileşke vektörün büyüklüğü,

$$\begin{aligned}F_R &= \sqrt{(150.7)^2 + (40)^2 + (-150.7)^2} \\ &= 217 \text{ N}\end{aligned}$$



Şekil 2-40a'da gösterilen adam, ipi 70 N'luk bir kuvvetle çekmektedir. A mesnedine etkiyen bu kuvveti kartezyen vektör şeklinde ifade ediniz ve doğrultusunu belirleyiniz.

