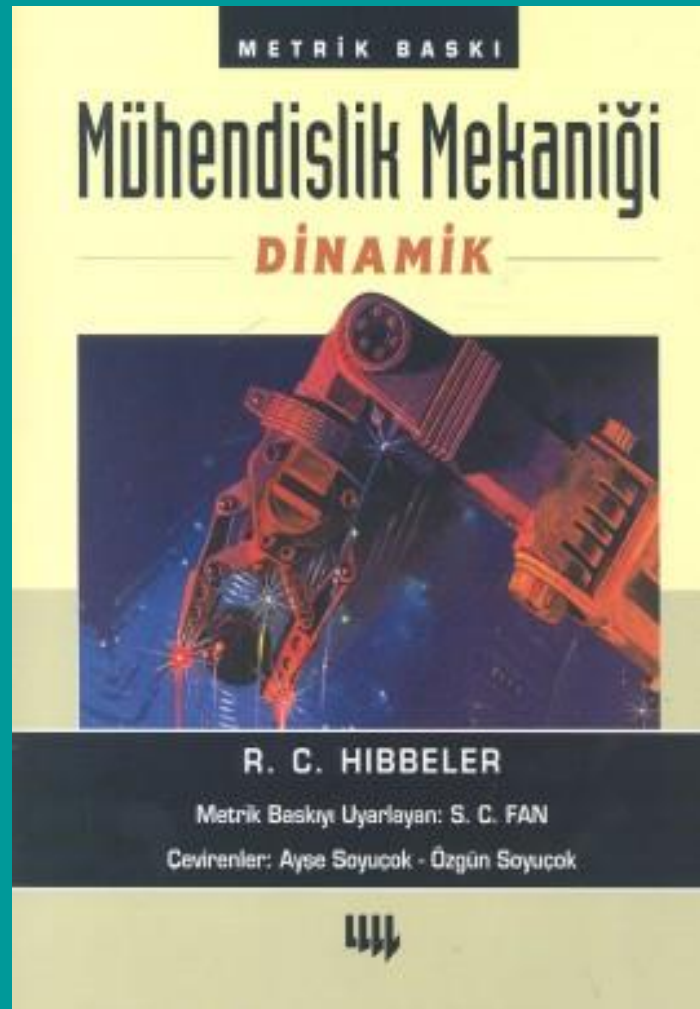


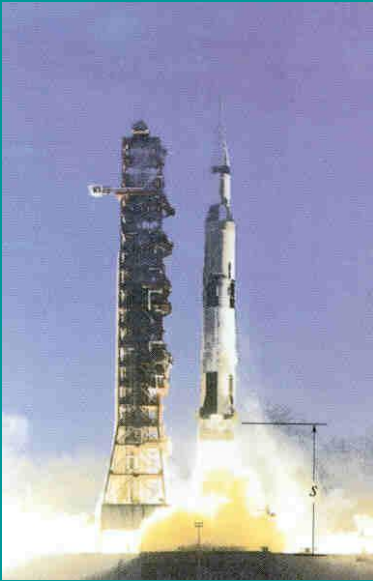
DİNAMİK



GİRİŞ VE DOĞRUSAL HAREKET KİNEMATİĞİ

Bugünkü Konular:

Bir doğru boyunca hareket eden maddesel noktanın kinematik bileşenlerinin (konum, aldığı yol, hız ve ivme) belirlenmesi.



Bu amaçla yapılacaklar:

- Genel bir hareket için yol, hız ve ivme değerleri arasındaki bağıntıların (ilişkinin) belirlenmesi.
- İvmenin sabit olduğu durumda yol, hız ve ivme değerleri arasındaki ilişkilerin belirlenmesi



UYGULAMALAR



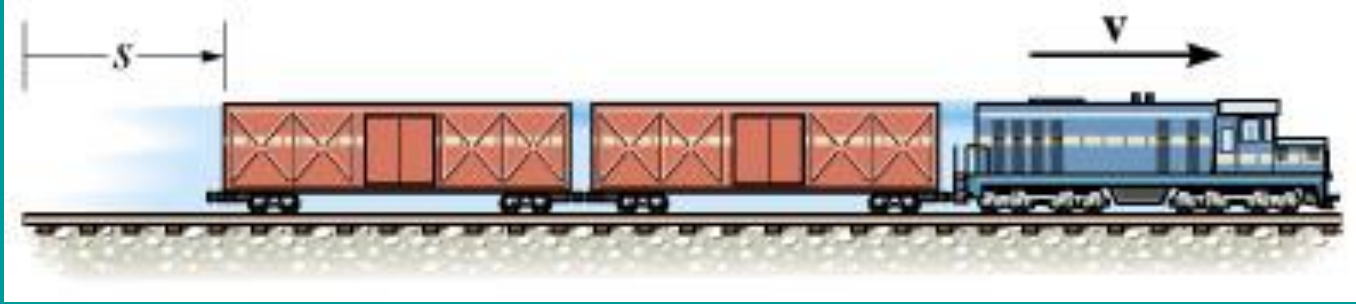
Uçaklar, arabalar, gemiler, roketler vb. büyük cisimlerin hareketleri incelenirken genellikle bu cisimler yerine tek bir maddesel nokta ele alınarak analizler yapılır.

Neden ?

Eğer bir roketin yerden yüksekliğini zamanın bir fonksiyonu olarak biliyorsak, bu roketin hızını ve ivmesini hesaplayabilir miyiz.



UYGULAMALAR



Trenler geniş bir ray boyunca hareket ederler.

Bu treni bir nokta gibi ele alabilirmiyiz?

Eğer bu trenin ivmesi belirli bir oranda değişiyorsa, trenin herhangi bir andaki pozisyonunu ve hızını bulabilirmiyiz?



Mekanîğe Genel Bakış

Mekanik: Cisimlerin üzerlerine etkiyen yüklere gösterdikleri tepkileri inceler

Statik: Cisimlerin denge durumunu inceler (hareket yok)

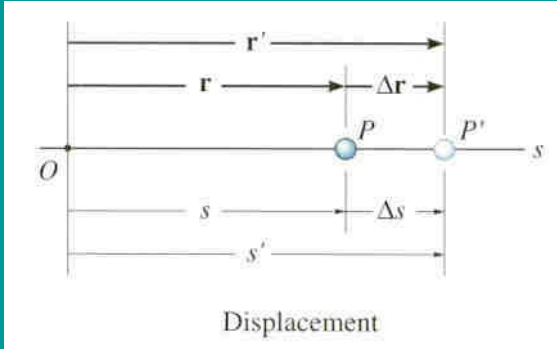
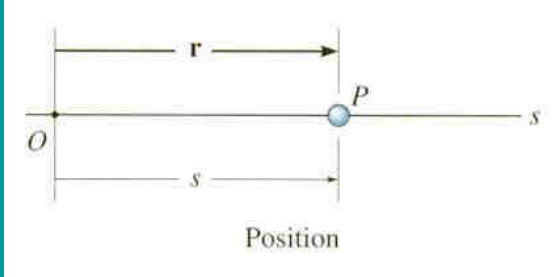
Dinamik:

1. Kinematik – Hareketin geometrisi ile ilgilidir.

2. Kinetik - Harekete sebep olan kuvvetler ile ilgilidir.



KONUM VE YERDEĞİŞTİRME



Maddesel nokta bir doğru üzerinde hareket ediyor. Bu doğrultu s aksı olarak adlandırılabilir.

Herhangi bir anda noktanın başlangıç noktası O 'ya göre pozisyonu, konum vektörü (yer vektörü) r veya skaler büyüklük s ile ifade edilir. s negatif veya pozitif olabilir.

Bir noktanın yer değiştirmesi noktanın pozisyonundaki değişiklik olarak tanımlanır.

Vektörel olarak: $\Delta r = r' - r$

Skaler olarak: $\Delta s = s' - s$

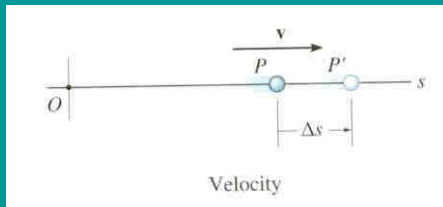
Noktanın kat ettiği toplam yol s_T pozitif skaler bir büyüklüktür. Noktanın doğrusal olarak kat ettiği toplam yolu ifade etmektedir bu değer her zaman pozitifdir.



HIZ

Hız, bir noktanın konum değiştirme oranının ölçüsüdür.

Hız vektörel (şiddeti ve doğrultusu olan) bir büyüklüktür. Şiddetinin birimi m/sn veya ft/sn'dir.

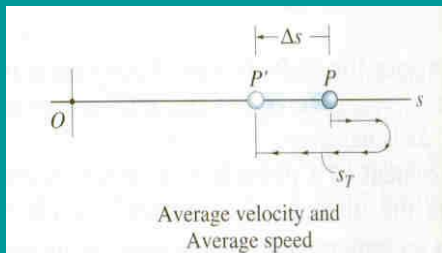


Bir noktanın Δt zaman aralığındaki ortalama hızı

$$v_{ort} = \Delta r / \Delta t$$

Ani hız değeri ise yer vektörünün zamana göre türevi ile ifade edilir.

$$v = dr/dt$$



Hızın herhangi bir t anındaki büyüklüğü $v = ds/dt$ ile hesaplanabilir.

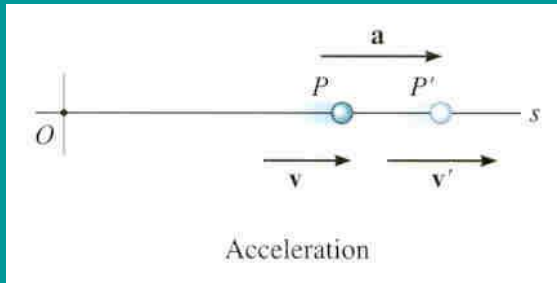
Ortalama Hızın büyüklüğü ise toplam yolun toplam zamana oranıdır

$$(v_{sp})_{avg} = s_T / \Delta t$$



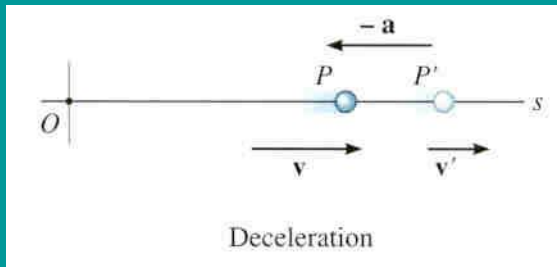
İVME

İvme maddesel noktanın hız değiştirme oranıdır. Yani birim zamandaki hız değişim miktarıdır. İvme vektörel bir büyüklüktür. Birimi m/s^2 dir.



Ani ivme hızın zamana göre türevi ile bulunur.

Vektörel olarak : $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$



Skaler olarak: $a = dv/dt = d^2s/dt^2$

İvme pozitif (cisim hızlanıyorsa) veya negatif (cisim yavaşlıyorsa) olabilir.

Değişken değiştirme yöntemi kullanılarak hız ve ivme değeri için aşağıdaki ifade elde edilebilir.

$$a = \frac{dv}{dt} * \frac{ds}{ds}$$

$$a ds = \frac{ds}{dt} dv$$

$$a ds = v dv$$



KİNEMATİK İLİŞKİLERİN ÖZETİ

- Hız ve ivme değerleri için türev ifadeleri

$$v = ds/dt ; \quad a = dv/dt \quad \text{veya} \quad a = v \, dv/ds$$

- Hız ve yol değerleri için integral ifadeleri

Hız:

$$\int_{v_o}^v dv = \int_o^t a \, dt$$

$$\int_{v_o}^v v \, dv = \int_{s_o}^s a \, ds$$

Yol:

$$\int_{s_o}^s ds = \int_o^t v \, dt$$

- s_o ve v_o ifadeleri noktanın $t = 0$ yani başlangıç anındaki hız ve yol değerleridir.



SABİT İVME

İvmenin sabit olması ($a = a_c$) durumunda biraz önce yazılan kinematik denklemler oldukça kolay hale gelmektedir. Dinamik problemlerin pek çoğunda da ivme değeri olarak yerçekimi ivmesi kullanılmaktadır. Mesela serbest düşme problemlerinde ivme değeri, $a_c = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ olarak kullanılmaktadır. Bu durumda denklemler

$$\int_{v_o}^v dv = \int_0^t a_c dt$$

$$v = v_o + a_c t$$

Zamanın fonk. olarak hız

$$\int_{s_o}^s ds = \int_0^t v dt$$

$$s = s_o + v_o t + (1/2)a_c t^2$$

Zamanın fonk. olarak konum

$$\int_{v_o}^v v dv = \int_{s_o}^s a_c ds$$

$$v^2 = (v_o)^2 + 2a_c(s - s_o)$$

Konumun fonk. olarak hız



Örnek

Verilenler: Düz bir yolda 27m/sn hızla hareket etmekte olan bir motosiklet, fren yaparak $a = -6t \text{ m/s}^2$ 'lik ivme değeri ile yavaşlamaktadır.

İstenenler : Motosikletin duruncaya kadar kat ettiği yolu bulunuz.

Çözüm: Motosikletin yol aldığı doğrultuyu s için pozitif yön olarak kabul ederiz. İvme zamanın bir fonksiyonu olarak verilmiştir. Bu yüzden bu ifadenin integralini alarak hız ve yol değerlerini elde edebiliriz.



Örnek (çözüm)

Cevap:

- 1) İvme ifadesinin integrali alınarak hız ifadesi bulunur.

$$a = dv / dt \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (-6t) dt$$

$$\Rightarrow v - v_0 = -3t^2 \Rightarrow v = -3t^2 + v_0$$

- 2) Motosikletin durması için ($v = 0$), geçen zamanı hesaplayalım, ilk hız $v_0 = 27$ m/s.

$$0 = -3t^2 + 27 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

- 3) Şimdi de 3 sn boyunca cismin aldığı yolu bulmak için hız ifadesini integre edelim ($s_0 = 0$):

$$v = ds / dt \Rightarrow ds = v dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t (-3t^2 + v_0) dt$$

$$\Rightarrow s - s_0 = -t^3 + v_0 t$$

$$\Rightarrow s - 0 = (3)^3 + (27)(3) \Rightarrow s = 54 \text{ m}$$



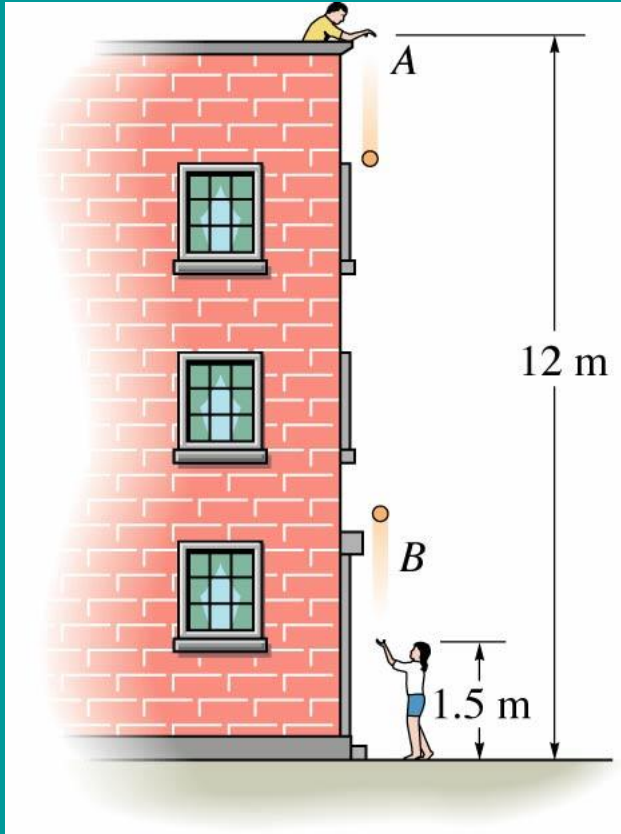
KISA SINAV



1. Bir doğru üzerinde hareket eden şekildeki cismin farklı zamanlardaki ivme değerleri şekilde verilmiştir. Buna göre bu cismin ortalama ivme değeri _____'dir.
A) 0.4 m/s^2 → B) 0.4 m/s^2 ←
C) 1.6 m/s^2 → D) 1.6 m/s^2 ←
2. Bu cismin başlangıçtaki hızı sola doğru 30 m/s 'dir. Cisim 5 sn sonra başlangıç noktasından sağa doğru 50 m/s hızla geçtiğine göre, bu 5 sn'lik zaman diliminde cismin ortalama hızı _____'dir.
A) 10 m/s → B) 40 m/s →
C) 16 m/s → D) 0 m/s



GRUP PROBLEM ÇÖZÜMÜ



Verilenler: Çatıdaki A noktasından serbest bırakılan bir topal aynı anda yerden 1.5 m yükseklikteki B noktasından yukarıya doğru bir top atılmaktadır. Bu iki top yerden 6 metre yükseklikte karşılaşmaktadır.

İstenen: Yukarıya doğru atılan B topunun ilk hızı nedir?

Plan: Her iki top içinde ivme değeri aşağıya doğru 9.81 m/s^2 . Bu durumda sabit ivme için yazılan denklemler kullanılabilir, $a_c = -9.81 \text{ m/s}^2$.



GRUP PROBLEM ÇÖZÜMÜ (devam)

Çözüm:

- 1) A topunun hareketi: Başlangıç durumunda cismin ilk hızı yok ($(v_A)_o = 0$) ve konumu için yer düzlemini kıyas düzlemi olarak alalım yani $(s_A)_o = 12 \text{ m}$. Cismin 6 m ($s_A = 6 \text{ m}$) durumuna gelinceye kadar aldığı zaman hesaplanmak istenirse.

$$s_A = (s_A)_o + (v_A)_o t + (1/2) a_c t^2$$

$$6 \text{ m} = 12 \text{ m} + (0)(t) + (1/2)(-9.81)(t^2) \Rightarrow t = 1.106 \text{ s}$$

- 2) B topunun hareketi: Cismin başlangıçtaki konumu yerden 1.5 metre yukarıdadır ($(s_B)_o = 1.5 \text{ m}$). 6 m ($s_B = 6 \text{ m}$) yukarıya çıkması için geçen zaman A cisminin o noktaya gelinceye kadar geçen zamanı ile aynıdır ($t = 1.106 \text{ s}$). B topunun konumu için $t = 1.106 \text{ s}$ değeri kullanılırsa

$$s_B = (s_B)_o + (v_B)_o t + (1/2) a_c t^2$$

$$6 \text{ m} = 1.5 + (v_B)_o (1.106) + (1/2)(-9.81)(1.106)^2$$

$$\Rightarrow (v_B)_o = 9.49 \text{ m/s}$$



QUIZ

1. Bir maddesel noktanın başlangıç hızı sola doğru 3 m/s ve başlangıç konumu $s_0 = 0 \text{ m}$ 'dir. İvme değerinin sağa doğru $a = 2 \text{ m/s}^2$ olduğu bilindiğine göre $t = 3 \text{ s}$ sonra bu noktanın aldığı yolu bulunuz.
A) 0.0 m B) 6.0 m ←
C) 18.0 m → D) 9.0 m →
2. Bir cisim başlangıç hızı $v_0 = 12 \text{ m/s}$ ve sabit 3.78 m/s^2 ivme ile hareket etmektedir. Başlangıç noktasına göre kaç metre sonra cismin hızı 30 m/s olacaktır ?
A) 50 m B) 100 m
C) 150 m D) 200 m



ÖRNEK 12-1

Bir deneme sırasında, Şekil 12-2'deki araba hızı $v = 0.3(9t^2 + 2t)$ m/s olacak şekilde bir doğru üzerinde kısa bir süre hareket ediyor. t nin birimi saniyedir. $t = 3$ s iken konumunu ve ivmesini belirleyiniz. $t = 0$ 'da $s = 0$ 'dır.



(\Rightarrow)

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.3(9t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t 0.3(9t^2 + 2t) dt$$

$$s \Big|_0^s = 0.3(3t^3 + t^2) \Big|_0^t$$

$$s = 0.9t^3 + 0.3t^2$$

elde ederiz.

$t = 3$ s olduğunda

olur.

$$s = 0.9(3)^3 + 0.3(3)^2 = 27 \text{ m}$$

İvme. Hız zamanın fonksiyonu olarak bilindiğine göre, ivme a , v ve t 'yi birbirine bağlayan $a = dv/dt$ denkleminde belirlenir:

$$\begin{aligned} (^{+}) \quad a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} 0.3 (9t^2 + 2t) \\ &= 5.4t + 0.6 \end{aligned}$$

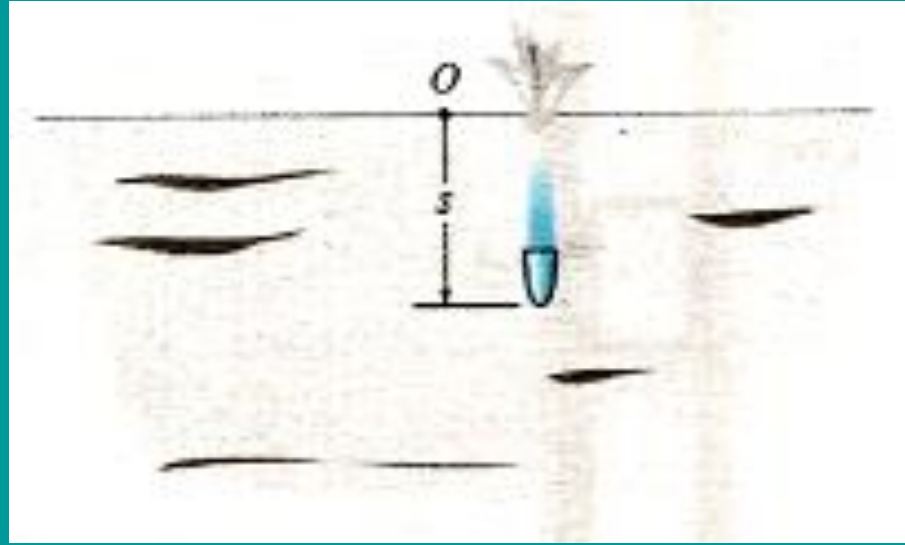
$t = 3$ s olduğunda

$$a = 5.4(3) + 0.6 = 16.8 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

olur.

Yanıt

ÖRNEK 12-2



Bir mermi *aşağıya doğru* dikey olarak 60 m/s 'lik başlangıç hızıyla bir akışkan ortamın içine ateşleniyor. Mermi, $a = (-0.4v^3)$ olacak şekilde yavaşlamakta ise, merminin ateşlendikten 4 s sonraki hızını ve konumunu bulunuz. Burada $v \text{ m/s}$ ile ölçülmektedir.

Hız. İvme hızın fonksiyonu olarak verilmiştir, bu yüzden hız v , a ve t 'yi birbirine bağlayan $a = dv/dt$ denkleminde belirlenebilir. ($v = v_0 + a_c t$ niye kullanılamaz?) Değişkenleri ayırarak ve $t = 0$ 'da $v = 60$ m/s olarak integre edersek

$$(+\downarrow) \quad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60}^v \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4} \left(\frac{2}{-2} \right) \frac{1}{v^2} \Big|_{60}^v = t - 0$$

$$v = \left\{ \left(\frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right)^{-1/2} \right\} \text{ m/s}$$

bulunur. Burada mermi aşağı doğru hareket ettiğinden, pozitif kök alınmıştır.

$t = 4$ s iken,

$$v = 0.559 \text{ m/s } \downarrow$$

Yanıt

olur.

Konum. Hız zamanın fonksiyonu olarak bilindiğine göre, merminin hızını s , v ve t 'yi birbirine bağlayan $v = ds / dt$ denkleminde elde edebiliriz. $t = 0$ için $s = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak,

(+ ↓)

$$v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8} \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{1/2} \bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4} \left\{ \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t \right]^{1/2} - \frac{1}{60} \right\} m$$

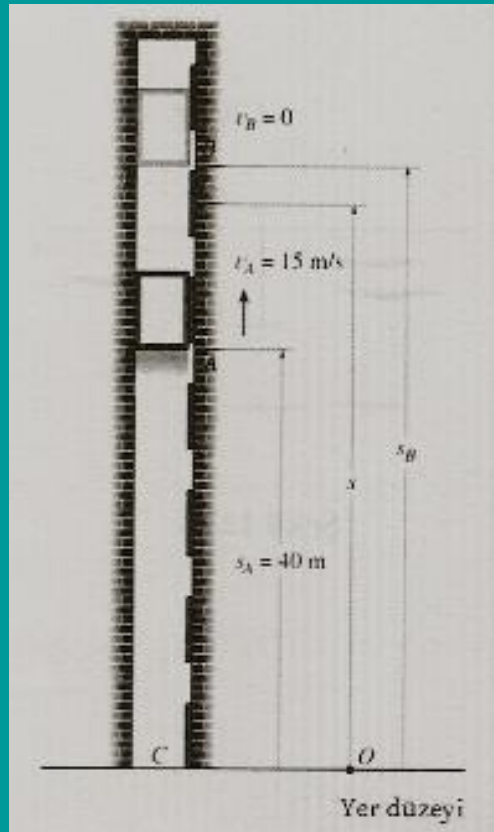
bulunur.

$$t = 4 \text{ s iken, } s = 4.43 \text{ m}$$

Yanıt

olur.

ÖRNEK 12-3



Bir deneme sırasında bir asansör 15 m/s ile yukarı doğru çıkmaktadır ve taşıyıcı kablo asansör yerden 40 m yüksekte iken kesilmektedir. Asansörün ulaştığı s_B maksimum yüksekliğini ve yere çarpmadan hemen önceki hızını belirleyiniz. Bütün bu süre boyunca asansör hareket halindedir; yerçekiminden dolayı aşağıya doğru 9.81 m/s^2 'lik bir ivmeye maruz kalmaktadır. Hava direncinin etkisini ihmal ediniz.

Maksimum Yükseklik. $s = s_B$ maksimum yüksekliğindeki hız $v_B = 0$ 'dır. $t = 0$ 'da asansör yukarı çıkmakta olduğundan, hızı $v_A = + 15 \text{ m/s}$ 'dir (pozitiftir çünkü pozitif yer değiştirme ile aynı yöndedir). Bütün hareket için, ivme $a_c = -9.81 \text{ m/s}^2$ şeklinde sabittir (negatiftir çünkü pozitif hız veya pozitif yer değiştirmeye zıt yönde etki etmektedir). a_c bütün hareket boyunca sabit olduğundan, yolu üzerindeki A ve B noktalarında asansörün konumu ve hızı arasında Denklem 12.6 kullanılarak bağıntı kurulabilir:

$$\begin{aligned} (+ \uparrow) \quad v_B^2 &= v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A) \\ 0 &= (15 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m}) \\ s_B &= 51.5 \end{aligned}$$

Yanıt

bulunur.

Hız. Asansörün yere çarpmadan hemen önceki hızını elde etmek için, B ve C noktaları arasında Denklem 12.6'yı uygulayabiliriz, Şekil 12-4.

$$\begin{aligned} (+ \uparrow) \quad v_C^2 &= v_B^2 + 2a_c(s_B - s_A) \\ &= 0 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 51.5 \text{ m}) \\ v_C &= -31.8 \text{ m/s} = 31.8 \text{ m/s} \quad \downarrow \quad \text{Yanıt} \end{aligned}$$

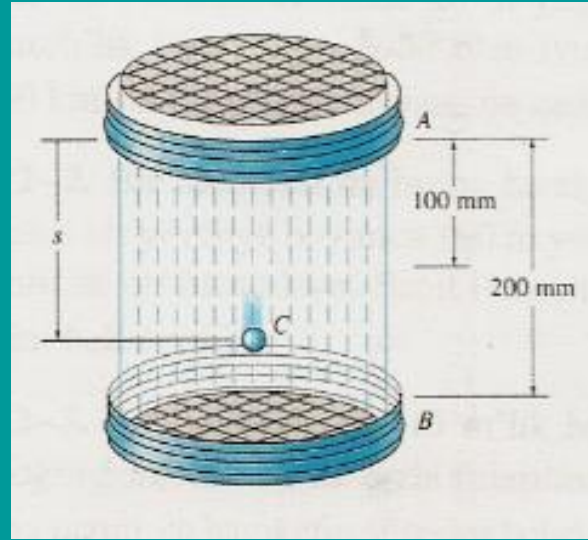
olur. Negatif kök alınmıştır çünkü asansör *aşağı* doğru hareket etmektedir.

Benzer şekilde, Denklem 12.6 A ve C noktaları arasında uygulanabilir, yani

$$\begin{aligned} (+ \uparrow) \quad v_C^2 &= v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A) \\ &= (15 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 40 \text{ m}) \\ v_C &= -31.8 \text{ m/s} = 31.8 \text{ m/s} \quad \downarrow \end{aligned}$$

çıkar.

ÖRNEK 12-4



Metal bir parçacık, bir manyetik alanın etkisinde A plağından B plağına uzanan bir akışkanın içinde aşağı doğru yol almaktadır, Şekil 12–5. Parçacık $s = 100$ mm olan C orta noktasından ilk hızsız bırakılırsa ve ivmesi, s 'nin birimi metre olmak üzere, $a = (4s)$ m/s² olarak ölçülüyorsa, parçacığın $s = 200$ mm mesafedeki B plağına ulaştığındaki hızını ve C 'den B 'ye ulaşması için gerekli olan zamanı belirleyiniz.

Hız. Parçacığın ivmesi konumun fonksiyonu olarak bilindiğinden, konumun fonksiyonu olarak hız $v \, dv = a \, ds$ kullanılarak elde edilebilir. Sabit ivme için olan formüller neden kullanılamaz? $s = 100 \text{ mm} = 0.1 \text{ m}$ 'de $v = 0$ olduğuna dikkat ederek,

(+ ↓)

$$\begin{aligned} v \, dv &= a \, ds \\ \int_0^v v \, dv &= \int_{0.1}^s 4s \, ds \\ \left. \frac{1}{2} v^2 \right|_0^v &= \left. \frac{4}{2} s^2 \right|_{0.1}^s \\ v &= 2 (s^2 - 0.01)^{1/2} \end{aligned}$$

buluruz. $s = 200 \text{ mm} = 0.2 \text{ m}$ 'de

$$v_B = 0.346 \text{ m/s} = 346 \text{ mm/s}$$

Yanıt

olur. Parçacık aşağı doğru yani + s yönünde yol aldığından pozitif kök alınmıştır.

Zaman. Parçacığın C'den B'ye ulaşması için gereken zaman $v = ds/dt$ ve Denklem 1 kullanılarak elde edilebilir; burada $t = 0$ iken $s = 0.1$ m'dir.

(+ ↓)

$$\begin{aligned} ds &= v dt \\ &= 2 (s^2 - 0.01)^{1/2} dt \end{aligned}$$

$$\int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2 dt$$

$$\ln(s + \sqrt{s^2 - 0.01}) = \left[2t \right]_{0.1}^t$$

bulunur.

$$\ln(s + \sqrt{s^2 - 0.01}) + 2.30 = 2t$$

$$s = 200 \text{ mm} = 0.2 \text{ m'de}$$

olur.

$$t = \frac{\ln(0.2 + \sqrt{(0.2)^2 - 0.01}) + 2.30}{2} = 0.657 \text{ s}$$

Yanıt

ÖRNEK 12-5

Bir parçacık hızı $v = (3t^2 - 6t)$ m/s olacak şekilde yatay bir yörünge üzerinde hareket etmektedir. Burada t saniye olarak zamandır. Başlangıçta O merkezinde ise, $t = 0 - t = 3.5$ s zaman aralığında parçacığın aldığı yolu, ortalama hız vektörünü ve ortalama hızı bulunuz.

Alınan Yol. Hız zamana bağlı olduğundan, zamana bağlı konum $t = 0$, $s = 0$ koşulu ile $v = ds/dt$ integre edilerek bulunabilir:

(\Rightarrow)

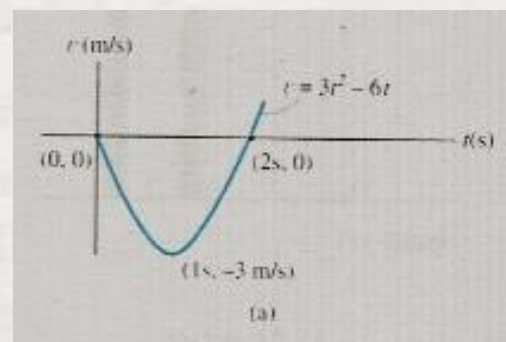
$$\begin{aligned} ds &= v dt \\ &= (3t^2 - 6t) dt \\ \int_0^s ds &= 3 \int_0^t t^2 dt - 6 \int_0^t t dt \end{aligned}$$

$$s = (t^3 - 3t^2) \text{ m} \quad (1)$$

3.5 s'de katedilen yolu belirlemek için hareketin yörüngesini incelemek gereklidir. Hız fonksiyonunun Şekil 12-6a'daki grafiği, $0 \leq t < 2$ s için hızın *negatif* olduğunu, bunun da parçacığın *sola* doğru gitmekte olduğunu; ve $t > 2$ s için hızın *pozitif*, yani parçacığın *sağa* doğru gitmekte olduğunu göstermektedir. Ayrıca $t = 2$ s'de $v = 0$ 'dır. Parçacığın $t = 0$, $t = 2$ s ve $t = 3.5$ s'deki konumu Denklem (1)'den belirlenebilir. Buradan da

$$\left. s \right|_{t=0} = 0 \quad \left. s \right|_{t=2\text{s}} = -4.0 \text{ m} \quad \left. s \right|_{t=3.5\text{s}} = 6.12 \text{ m}$$

elde edilir.

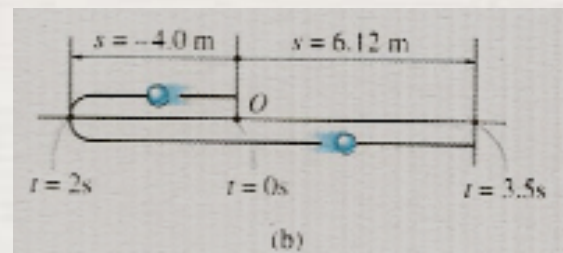


Yörünge Şekil 12–6b’de gösterilmiştir. Böylece 3.5 s’de alınan yol

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.12 = 14.12 \text{ m} \approx 14.1 \text{ m}$$

olur.

Hız. $t = 0$ ’dan $t = 3.5$ s’ye olan yer değiştirme



$$\Delta s = s \Big|_{t=3.5s} - s \Big|_{t=0} \quad s = 6.12 - 0 = 6.12 \text{ m}$$

Yanıt

dir, buna göre ortalama vektörel hızı temsil eden cebirsel skaler

$$v_{\text{ort}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.12}{3.5 - 0} = 1.75 \text{ m/s} \rightarrow$$

Yanıt

olur. Ortalama hız alınan s_T yolu çinsinden tanımlanmıştır. Bu pozitif skaler

$$(v_{\text{sp}})_{\text{ort}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.12}{3.5 - 0} = 4.03 \text{ m/s}$$

Yanıt

dir.