LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Genel olarak $x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenler a_{ij} ve b_i sayıları da $\Im$ cisminden seçilen herhangi sayılar olmak üzere n bilinmeyenli m tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem sistemi

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ 1 \le i \le m$ şeklinde veya matrissel formda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $A = [a_{ij}] \in \Im_n^m,\ B = [b_i] \in \Im^m\ (1 \le i \le m)$ ve $X = [x_j] \in \Im^n, (1 \le j \le n)$ dersek bu denklem sistemi AX=B olarak da ifade edilebilir.

HOMOJEN LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

AX=B lineer denklem sisteminde B=0 ise denklem sistemine homojen lineer denklem sistemi denir. AX=0 sisteminin daima bir çözümü vardır. Eğer bu çözüm X=0 ise bu çözüme **aşikar çözüm** $X \neq 0$ ise bu çözüme **aşikar olmayan çözüm** adı verilir.

Çözüm Uzayı: AX=0 denklem sisteminin bütün çözümlerinin oluşturduğu uzaya **çözüm uzayı** denir. Çözüm uzayının boyutu $AX = 0 \Rightarrow X \in A^{-1}(0)$ olduğundan A nın sıfırlık derecesine eşittir. Diğer taraftan boyV=rankA+sıfırlıkA olduğundan aşağıdaki teorem ve sonuçlar ifade edilebilir.

Teorem: n bilinmeyenli m denklemin oluşturduğu bir AX=0 homojen lineer denklem sisteminde rankA=p ise çözüm uzayının boyutu n-p dir.

Sonuç I: Eğer p=n ise n-p=0 olacağından çözüm uzayının boyutu sıfırdır. Yani çözüm uzayında sadece 0 vektörü vardır. Bu da denklem sisteminin sadece aşikar çözümünün olduğunu gösterir.

Not: Eğer $\det A \neq 0$ ise A^{-1} vardır. O halde $AX = 0 \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}0 \Rightarrow X = 0$ olur. Yani denklem sisteminin sadece aşikar çözümü vardır.

Sonuç II: Eğer rankA=p<n ise n-p>0 olacağından denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olduğu anlamına gelir.

Sonuç III: Eğer m=n ise aşikar olmayan çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart A nın singüler yani detA=0 olmasıdır.

Homojen Olmayan Lineer Denklem Sistemleri

AX=B lineer denklem sisteminde $B \neq 0$ ise sisteme homojen olmayan lineer denklem sistemi denir. Bu halde aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1) **Cramer Sistemi:** m=n ve $\det A \neq 0$ olması halinde denklem sistemine **Cramer Sistemi** denir ve Cramer metodu ile çözülür.

2) **Cramer Olmayan Denklem Sistemleri:**

a) m=n ve detA=0 olması hali

b) $m \neq n$ olması hali

1) m=n ve $\det A \neq 0$ olması hali (Cramer Metodu)

Teorem: AX=B lineer denklem sisteminde $\det A \neq 0$ ise

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\det A},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\det A},\ldots,x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & b_m \end{vmatrix}}{\det A}$$ dir.

İspat: AX=B (m=n) lineer denklem sisteminde $\det A \neq 0$ ise A^{-1} vardır. $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ ve $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$ olduğundan $X = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}B$ yazılabilir. $\tilde{A}B$ matrisi açık olarak yazılırsa,

$$\tilde{A}B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}_{nx1}$$

elde edilir. $\tilde{A}B$ matrisinin i-yinci bileşeni $b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni} = \sum_{j=1}^{n} b_jA_{ji}$ şeklindedir. Bu ise A matrisinin i-yinci sütununun silinerek yerine B matrisi yazmak suretiyle elde edilen matrisin determinatını verir. Böylece

$$b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$ yazılabilir. Buradan iki matrisin eşitliği tanımı gereğince X in i-yinci bileşeni

$$x_i=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & a_{nn}\end{vmatrix},\ 1\le i\le n$$ şeklindedir.

2) Cramer Olmayan Lineer Denklem Sistemleri:

AX=B lineer denklem sisteminde m=n ve detA=0 ise veya $m\neq n$ ise sisteme **Cramer olmayan denklem sistemi** denir. Böyle bir sistemin ya hiç çözümü yoktur ya da varsa sonsuz tanedir.

Not: Bu denklem sisteminin çözümünün olması (bağdaşabilir olması) için gerek ve yeter şart sistemin bütün ilaveli asli determinantlarının sıfır olmasıdır.

Asli Determinant: rankA=p olsun. A dan seçilen p mertebeli regüler $(\det S_p\neq 0)$ bir alt matrisin determinantına A nın asli determinantı denir ve S_p ile gösterilir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1(p+1)} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2(p+1)} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{p(p+1)} & \cdots & a_{pn}\\ a_{(p+1)1} & a_{(p+1)2} & \cdots & a_{(p+1)p} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & a_{(p+1)n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & & & a_{mn}\end{bmatrix},\ S_p=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp}\end{vmatrix}$$ şeklindedir.

Burada A nın S_p matrisinde yer almayan satırlarının sayısı (m-p) tanedir.

İlaveli Asli Determinant: A nın asli determinatında yer almayan m-p tane satırdan birisini satır olarak, B yi de sütun olarak S_p matrisine ilave ederek elde edilen (p+1)x(p+1) tipindeki matrisin determinatına ilaveli asli determinant denir. Bu tür determinantların sayısı m-p tanedir. Örneğin (p+r). satır için ilaveli asli determinantı yazarsak

$$S_{p+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & b_p\\ a_{(p+r)1} & a_{(p+r)2} & \cdots & a_{(p+r)p} & b_{p+r}\end{vmatrix},\ 1\le r\le m-p$$ şeklinde olur.

ÖRNEKLER

1. $\begin{aligned} x_1-x_2-x_3&=1\\ 2x_1+3x_2-5x_3&=0\\ x_1-x_2+x_3&=3\end{aligned}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $A=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3+5+2-(-3-2+5)=10$ olduğundan Cramer sistemidir.

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -5\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}}{10}=\frac{11}{5},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}}{10}=\frac{1}{5},\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}}{10}=1$$

2. $\begin{array}{l}7x_1+3x_2=2\\ x_1-2x_2=-3\\ 4x_1+9x_2=11\end{array}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 1 & -2\\ 4 & 9\end{bmatrix}$ marisinin asli determinantı $S_2=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-17\neq 0$ dır. Sistemin çözümünün olabilmesi için ilaveli asli determinantı sıfır olmalıdır. $S_{2+1}=\begin{vmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -3\\ 4 & 9 & 11\end{vmatrix}=0$ dır. O halde sistem çözülebilir (bağdaşabilirdir). $\begin{array}{l}7x_1+3x_2=2\\ x_1-2x_2=-3\end{array}$ denklem sisteminden elde edilen çözüm $\left(x_1=-\frac{5}{17},\ x_2=\frac{23}{17}\right)$ bu sonuç üçüncü denklemi gerçekler.

3. $\begin{array}{l}5x_1-x_2+2x_3+x_4=7\\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1\\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0\end{array}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & -2\\ 1 & -3 & -6 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin 3x3 tipindeki bütün alt matrislerinin determinantı sıfırdır. $S_2=\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7\neq 0$ ve $S_{2+1}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 7\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=-35\neq 0$ olduğundan çözüm yoktur.

4. $\begin{array}{l}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\ 4x_1-8x_2+17x_3-11x_4=0\end{array}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: Sistemin katsayılar matrisi $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & -11\end{bmatrix}$ olup

$\delta_1=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ 3 & -6 & 4\\ 4 & -8 & 17\end{vmatrix}=0,\ \delta_2=\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 17 & -11\end{vmatrix}=154\neq 0$ dır. $x_2=\lambda$ bir parametre olmak üzere

verilen denklem sistemini $\begin{aligned}2x_1+5x_3+3x_4&=4\lambda\\ 3x_1+4x_3+2x_4&=6\lambda\\ 4x_1+17x_3-11x_4&=8\lambda\end{aligned}$ şeklinde yazılabilir. Bu sistem bir Cramer sistemidir ve çözümü $(x_1=2\lambda,\ x_2=\lambda,\ x_3=x_4=0)$ şeklindedir.

5. m ve n farklı değerleri için $\begin{aligned}mx+ny+z&=1\\ x+mny+z&=n\\ x+ny+mz&=1\end{aligned}$ denklem sisteminin çözümlerini irdeleyiniz.

Çözüm: $\Delta=\begin{vmatrix}m & n & 1\\ 1 & mn & 1\\ 1 & n & m\end{vmatrix}=n(m-1)^2(m+2)$ dir. $\Delta=0\Rightarrow n=0\ \vee\ m=1\ \vee\ m=-2$

m=1 hali: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & n & 1\\ 1 & n & 1\\ 1 & n & 1\end{vmatrix}=0$ olur. Bu halde sistemin asli determinantı $\delta_1=|1|\neq 0$ dır. İlaveli asli determinantlar, $\delta_{1+1}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & n\end{vmatrix}=n-1,\ \delta_{1+2}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$ dır. Sistemin çözümünün olabilmesi için $\delta_{1+1}=n-1=0\Rightarrow n=1$ olmalıdır. Buna göre m=1 ve n=1 olması durumunda çözüm vardır. (?)

n=0 hali: $\Delta=\begin{vmatrix}m & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & m\end{vmatrix}=0$, $\delta_2=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=m-1$ olur. Buradan $m\neq 1$ olursa $\mathrm{rank}\Delta=2$ olur. İlaveli asli determinant $\delta_{2+1}=\begin{vmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & m & 1\end{vmatrix}=(m-1)2$ olur. $m\neq 1$ için $\delta_{2+1}\neq 0$ olduğundan çözüm yoktur.

m=-2 hali: $\Delta=\begin{vmatrix}-2 & n & 1\\ 1 & -2n & 1\\ 1 & n & -2\end{vmatrix}=0$ ve $\delta_2=\begin{vmatrix}-2 & n\\ 1 & -2n\end{vmatrix}=3n$ dir.

$n \neq 0$ ise $\operatorname{rank}\Delta = 2$ olur. İlaveli asli determinant $\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} -2 & n & 1 \\ 1 & -2n & n \\ 1 & n & 1 \end{vmatrix} = 3n(n+2)$ olur. Eğer n=-2 ise $\delta_{2+1} = 0$ olup sistemin çözümü vardır. (?) $n \neq -2$ olması halinde çözüm yoktur.

6. $\begin{matrix} (m+1)x + y + z = 2 - m \\ x + (m+1)y + z = -2 \\ x + y + (m+1)z = m \end{matrix}$ lineer denklem sisteminin çözümlerini $m \in IR$ nin alacağı değerlere göre irdeleyiniz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2(m+3)$ bulunur. Eğer $m \neq 0$ ve $m \neq -3$ ise $\Delta \neq 0$ dır. Bu halde denklemin bir tek çözümü vardır ve Cramer metodu ile çözülür.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ -2 & m+1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & 2-m & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2-m \\ 1 & m+1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

$\Delta = 0$ olması halinde m=0 ise: $\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x + y + z = -2 \\ x + y + z = 0 \end{matrix}$ $\delta_1 = |1| \neq 0$, $\delta_{1+1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\delta_{1+2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ olduğundan çözüm yoktur.

$\Delta = 0$ olması halinde m=-3 ise: $\begin{matrix} -2x + y + z = 5 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = -3 \end{matrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

$\delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$...* olup $\operatorname{rank}\Delta = 2$ dir. İlaveli asli det $\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ olup çözüm vardır. * a göre denklem sistemini düzenlersek, $\begin{matrix} -2x + y = 5 - t \\ x - 2y = -2 - t \end{matrix}$,

$\delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}5-t & 1\\ -2-t & -2\end{vmatrix}}{3}=t-\frac{8}{3},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 5-t\\ 1 & -2-t\end{vmatrix}}{3}=t-\frac{1}{3}$$ bulunur. Böylece denlem sisteminin çözümü $\Rightarrow\begin{cases}x=t-\dfrac{8}{3}\\ y=t-\dfrac{1}{3}\\ x=t\end{cases}$ olur.