1.1. Küme Kavramı

Küme kavramı matematiksel olarak ilk kez Georg Cantor (1845-1918) tarafından ortaya atılmıştır. Cantor küme kavramını "*Sezgilerimizle veya düşüncelerimizle iyi ayırt edilerek belirlenmiş m nesneleri bir araya gelerek M bütününü oluşturmaktadır*" şeklinde tanımlamaya çalışmıştır. Bu ifadede dikkat çeken bazı terimler vardır. Bunlardan ilki iyi ayırt edilme (iyi tanımlılık) kavramıdır. Kümelerin tanımlanmasında iyi tanımlılık ifadesi iki farklı şekilde ele alınmaktadır: "İyi tanımlanmış nesneler topluluğu" ve "Nesnelerin iyi tanımlanmış topluluğu". Birinci ifade nesneleri nitelerken ikinci ifade topluluğu nitelemektedir. İyi tanımlılık nesnelerin niteliği olarak düşünüldüğünde bir kümenin elemanları arasında herhangi bir ortak özellik olması gerekliliği yoktur. Ancak iyi tanımlılık topluluğun niteliği olarak düşünüldüğünde kümenin elemanları arasında ortak özellik olma gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Örneğin asal sayılar kümesi ortak özelliklere sahip elemanlardan oluşmaktadır. Ancak $\{a, Ali, elma, x, 1\}$ şeklindeki bir kümenin elemanları arasında ortak özellik bulunmamaktadır. Görüldüğü gibi kümenin elemanları arasında ortak özellik bulunup bulunmaması gerekliliği tartışmaya açık bir durumdur. Cantor'un tanımlamasında dikkat çeken diğer kavram ise bütün (topluluk) kavramıdır. Topluluk kavramı tek elemandan küme oluşmayacağı, boş kümenin elemanı olmadığı için küme oluşturamayacağı gibi durumları akla getirebilmektedir. Bu ise boş kümenin ya da tek veya iki elemanlı gibi az eleman içeren kümelerin evrensel küme oluşturamayacağı şeklindeki kavrayışlara sebep olabilmektedir. Hâlbuki evrensel kümenin o an için üzerinde çalışılan en geniş küme olduğu düşünüldüğünde boş kümenin ya da tek bir elemandan oluşan bir kümenin bile evrensel küme olabileceği söylenebilir.

İlerleyen yıllarda kümeler teorisinde küme tanımı ile ilgili yukarıda belirtilen durumlar tartışılmış ve bazı paradokslar ortaya çıkmıştır. Bu paradoksların ortaya çıkması ile Cantor'un fikirlerinin yeniden incelenmesi gerekliliği doğmuştur. Karşılaşılan bu paradokslar matematik tarihindeki en büyük bunalımlardan birinin yaşanmasına neden olmuştur. Bu paradoksların önlenmesine yönelik olarak kümeler teorisi için aksiyomatik yaklaşımlar geliştirilmeye başlanmıştır. Bu yaklaşımlardan en yaygın olarak bilineni ZFC yöntemi (Zermelo-Fraenkel Choice of Axiom) olarak bilinen aksiyomatik yaklaşımdır. Sezgisel küme kuramında tanımlı olarak ele alınan küme kavramı, ZFC sisteminde tanımsız olarak ele alınmaktadır. Tanımlanan aksiyomlarla küme kuramı paradokslardan arındırılmış ve sağlam bir temele kavuşturulmuştur. Örneğin aksiyomatik küme kuramında yer alan "A4. Birleşim Aksiyomu" ile ortak özelliğe sahip olmayan elemanların da bir küme oluşturabileceği gösterilebilmektedir. (*Birleşim aksiyomu: Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır*). Bu durum aşağıdaki örnek ile açıklanabilir.

Örnek: "1, x, Ankara, Türkiye, masa" nesnelerini ele alalım. Bu nesneler arasında herhangi bir ortak özellik olmadığı açıktır. Her bir nesneyi tek elemanlı bir küme olarak ele alırsak;

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{x\}$, $A_3 = \{\text{Ankara}\}$, $A_4 = \{\text{Türkiye}\}$, $A_5 = \{\text{masa}\}$ kümeleri oluşturulur. Birleşim aksiyomundan biliyoruz ki, kümelerin birleşimleri de bir küme oluşturur. Dolayısıyla $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{1, \text{x Ankara, Türkiye, masa}\}$ şeklinde elemanlarının aralarında ortak özellik olmayan A kümesi oluşturulabilir.