

BÖLÜM: 5

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR: BİRİM ÇEMBER YAKLAŞIMI

5.1 Birim Çember

5.2 Reel Sayıların Trigonometrik Fonksiyonları

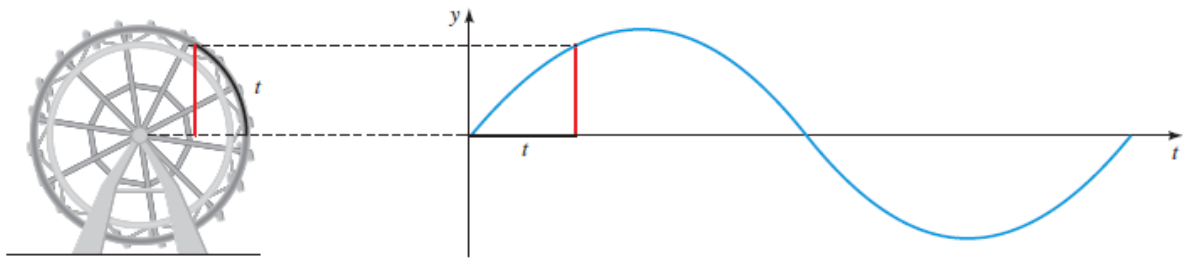
5.3 Trigonometrik Grafikler-I

5.4 Trigonometrik Grafikler-II

5.5 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar ve Grafikleri

Şimdiye kadar bir dönme dolaba bindiyseniz, o zaman periyodik hareketi yani defalarca tekrarlayan hareketi bilirsiniz. Periyodik hareket doğada yaygın olarak görülmektedir. Güneşin günlük doğuşu ve batışı (gündüz, gece, gündüz, gece, ...), gelgit seviyelerindeki günlük değişim (yüksek, alçak, yüksek, alçak ...) veya bir yaprağın rüzgârdaki titreşimleri hakkında düşünün (sol, sağ, sol, sağ, ...). Böyle bir hareketi modellemek için, değerleri artan, sonra düşen, sonra artan... ve böyle devam eden bir fonksiyona ihtiyacımız var. Böyle bir fonksiyonu nasıl tanımlayacağınızı anlamak için, dönme dolapta üzerindeki bir kişiye bakalım. Grafik, t zamanında kişinin tekerlek merkezinin üstündeki yüksekliğini gösterecektir. Grafiğin tekrarlı bir biçimde aşağı ve yukarı yöne hareket ettiğine dikkat edin.

Trigonometrik sinüs fonksiyonu da birim çemberi kullanarak (dönme dolabın yerine) benzer bir şekilde tanımlanır. Trigonometrik fonksiyonlar iki farklı fakat eşdeğer yollarla tanımlanabilir: reel (gerçek) sayıların fonksiyonları (Bölüm 5) veya açıların fonksiyonları (Bölüm 6). Her iki yaklaşımda birbirinden bağımsızdır, bu nedenle Bölüm 5 veya Bölüm 6 ilk önce incelenebilir. Her iki yaklaşımı da inceleyeceğiz çünkü farklı uygulamalar için farklı yaklaşımlar gerekiyor.



5.1 Birim Çember

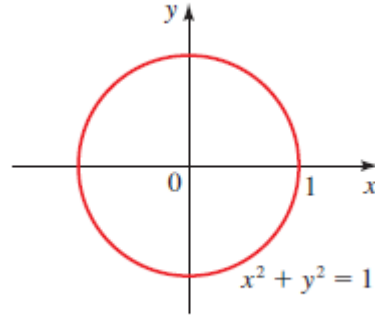
Bu bölümde orijin merkezli 1 br yarıçaplı çemberin bazı özelliklerini keşfedeceğiz. Bu özellikler gelecek kısımda trigonometrik fonksiyonları tanımlamak için kullanılmaktadır.

▼ Birim Çember:

Orijinden 1 birim uzaklıkta bulunan noktalar kümesine düzlemde birim çember ismi verilir (bkz. Şekil-1). Daha önce bölüm 1.8 'de bu çember denkleminin

$$x^2 + y^2 = 1$$

olduğunu öğrenmiştik.



Şekil-1 birim çember

Örnek 1: Birim Çember Üzerindeki Bir Nokta

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ Noktasının birim çember üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Birim çember denklemini sağladığını göstermeliyiz.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

olduğundan P noktası birim çember üzerinde yer alır.

Örnek 2: Birim Çember Üzerindeki Bir Noktanın Yeri

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, y\right)$ noktası birim çember üzerinde ve dördüncü bölgede yer aldığına göre y-koordinatını bulun.

Çözüm: P noktası çember üzerinde olduğundan çember denklemini sağlar;

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

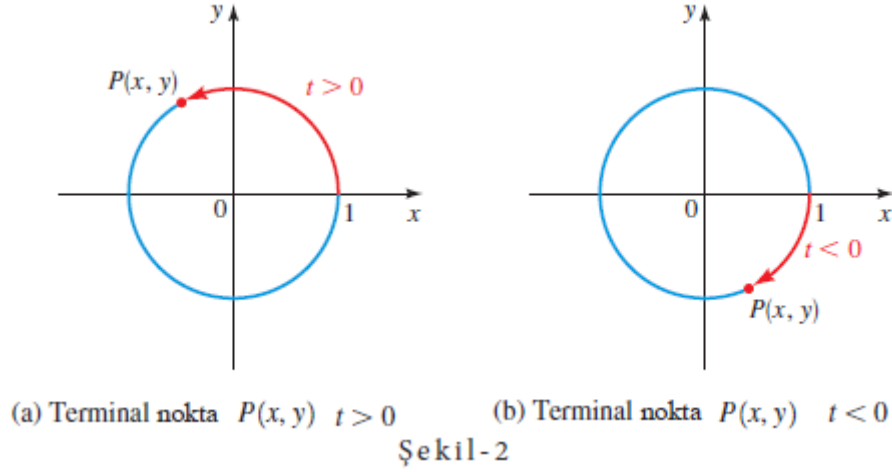
$$y^2 = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

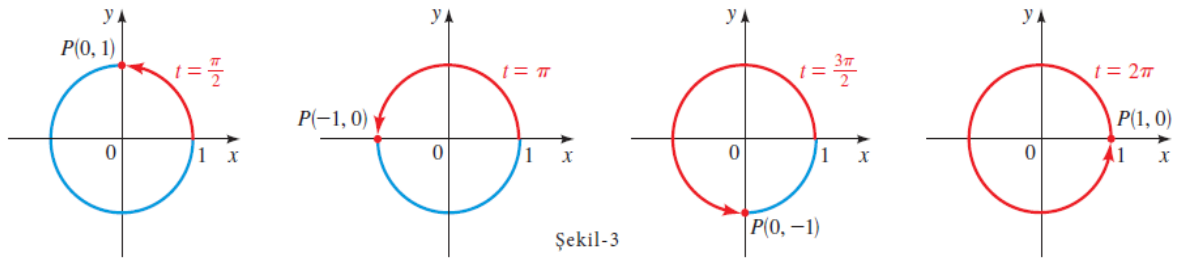
y , IV. bölgede yer aldığından negatif olmalıdır. Dolayısıyla $y = -\sqrt{2/3}$ olur.

▼ Birim Çember Üzerindeki Uç (terminal) Noktalar:

t bir gerçel(reel) sayı olsun. Birim çember üzerinde $(1,0)$ noktasından başlayıp eğer t pozitif ise saat yönünün tersi yönde, t negatif ise saat yönünde hareket edip t kadarlık mesafeyi işaretleyelim (bkz. Şekil-2). Bu yöntem ile birim çember üzerinde bir $P(x,y)$ noktasına geliriz. Bu yöntemle elde edilen $P(x,y)$ noktasına t reel sayısı ile belirlenmiş uç (terminal) nokta denir.



Birim çemberin çevresi $C = 2\pi(1) = 2\pi$ 'dir. Eğer $(1,0)$ noktasından başlayarak saat yönünün aksi yönde hareket edip tekrar $(1,0)$ noktasına vardığımızda 2π kadarlık bir mesafe yol alırız. Çember çevresinin yarısı kadar yol almak için $(2\pi)\frac{1}{2} = \pi$, çeyreği kadar yol almak için $(2\pi)\frac{1}{4} = \pi/2$ kadar yol alınmalıdır. Çember üzerindeki bu seyahatlerin sonlandığı noktalar neresidir? Örneğin Şekil-3 'de görüldüğü $(1,0)$ dan başlayıp π kadarlık yol alındığında $(-1,0)$ noktasına geliriz.



Şekil 3. $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ile Belirlenen Uç Noktalar

Örnek 3: Uç Noktaların Bulunması

Birim çember üzerinde her bir t reel sayısı ile belirlenmiş uç noktaları bulunuz.

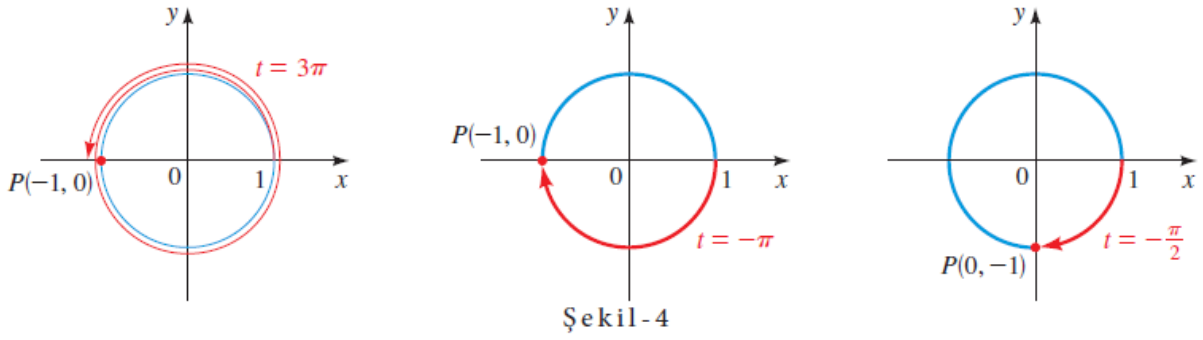
(a) $t = 3\pi$ (b) $t = -\pi$ (c) $t = -\frac{\pi}{2}$

Çözüm: Şekil-4 ‘den aşağıdaki uç noktaları elde ederiz.

a) $t = 3\pi$ ile belirlenen uç nokta: $(-1,0)$

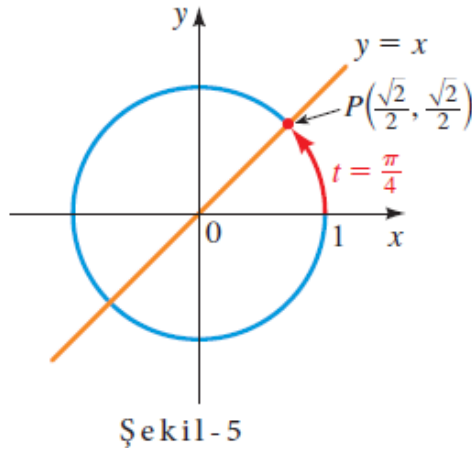
b) $t = -\pi$ ile belirlenen uç nokta: $(-1,0)$

c) $t = -\pi/2$ ile belirlenen uç nokta: $(0,-1)$ ’dir.



Farklı t değerlerinin aynı uç noktayı belirleyebildiğine dikkat edin.

$t = \pi/4$ ile belirlenmiş $P(x,y)$ uç noktası, $(1,0)$ ile $(0,1)$ ‘e aynı uzaklıkta yer alır (bkz. Şekil-5).



Birim çember $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan P noktası bu doğru üzerinde yer alır. Yani P noktası, $x^2 + y^2 = 1$ birim çember ile $y = x$ doğrusunun (1.bölgede) kesiştiği yerdir. Çember denkleminde y yerine x konulursa;

$$\begin{aligned}
 x^2 + x^2 &= 1 \\
 2x^2 &= 1 && \text{terimleri bir araya getir} \\
 x^2 &= \frac{1}{2} && \text{2 ile böl} \\
 x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} && \text{kare kök al}
 \end{aligned}$$

elde edilir. P noktası birinci bölgede olduğundan $x = 1/\sqrt{2}$ olur ve $y=x$ olduğundan $y = 1/\sqrt{2}$ yazılır. Böylece $\pi/4$ ile belirlenen uç nokta,

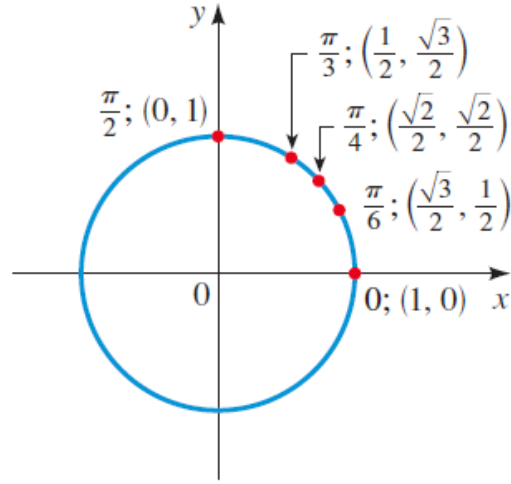
$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

olur. Benzer yöntem, $t = \frac{\pi}{6}$ ve $t = \frac{\pi}{3}$ ile belirlenen uç noktaları bulmak için de kullanılabilir.

Aşağıdaki Tablo-1 ve Şekil-6 'da bazı özel t değerleri için uç noktalar verilmiştir.

Tablo-1

t	t ile belirlenmiş uç noktalar
0	(1,0)
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	(0,1)



Şekil-6

Örnek 4: Uç Noktaların Bulunması

Aşağıda verilen t değerleri için uç noktaları bulunuz.

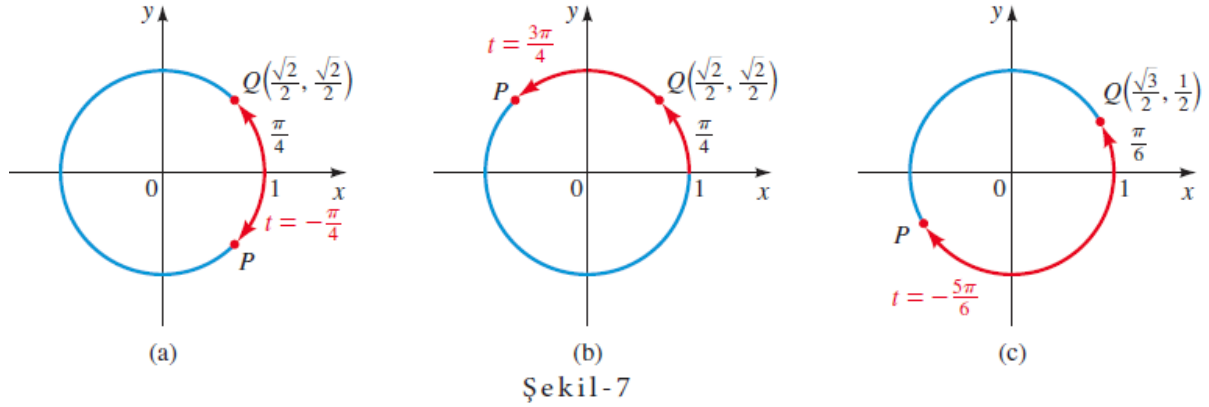
(a) $t = -\frac{\pi}{4}$ (b) $t = \frac{3\pi}{4}$ (c) $t = -\frac{5\pi}{6}$

Çözüm: a) $-\frac{\pi}{4}$ ile belirlenen uç nokta P, $\frac{\pi}{4}$ ile belirlene uç nokta Q olsun. Şekil 7 (a) 'dan P noktasının işaret haricinde Q ile aynı koordinatlara sahip olduğunu görüyoruz. P noktası IV.

Bölgede olduğundan x-koordinatı pozitif, y-koordinatı negatiftir. Böylece uç nokta $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olur.

b) $\frac{3\pi}{4}$ ile belirlenen uç nokta P, $\frac{\pi}{4}$ ile belirlenen uç nokta Q olsun. Şekil 7 (b) 'den P noktasının işaret haricinde Q ile aynı koordinatlara sahip olduğunu görüyoruz. P noktası II. Bölgede olduğundan x-koordinatı negatif, y-koordinatı pozitifdir. Böylece uç nokta $P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olur.

c) $-\frac{5\pi}{6}$ ile belirlenen uç nokta P, $\frac{\pi}{6}$ ile belirlenen uç nokta Q olsun. Şekil 7 (c) 'den P noktasının işaret haricinde Q ile aynı koordinatlara sahip olduğunu görüyoruz. P noktası III. Bölgede olduğundan x-koordinatı negatif, y-koordinatı negatiftir. Böylece uç nokta $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ olur.

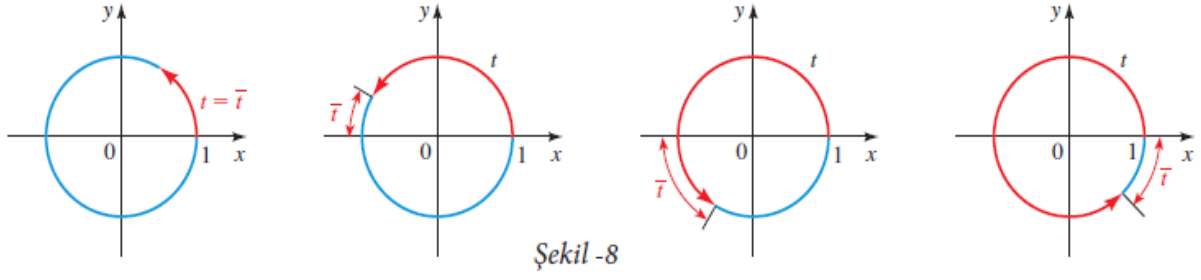


▼ Referans Sayı

Örnekler 3 ve 4'ten, herhangi bir bölgede bir uç nokta bulmak için sadece ilk bölgeye "karşılık gelen" uç noktayı bilmemiz gerektiğini görüyoruz. Uç noktalarını bulmamıza yardımcı olması için *referans sayı* fikrini kullanıyoruz.

t bir reel sayı olsun. t ile ilişkili $\bar{t}$ *referans sayısı*, birim çember boyunca t ile belirlenmiş uç nokta ile x —ekseni arasındaki en kısa uzaklıktır.

Şekil-8 bize referans numarası $\bar{t}$ 'ı bulmanın, t ile belirlenmiş uç noktanın ait olduğu bölgenin bilinmesinin yararlı olduğunu göstermektedir. Eğer uç nokta I. ve IV. bölgelerde yer alıyorsa x pozitifdir. $\bar{t}$ 'yı çember boyunca pozitif x eksenine doğru hareket ederek buluruz. Eğer uç nokta II. ve III. bölgede yer alıyorsa, $\bar{t}$ 'yı çember boyunca negatif x eksenine doğru hareket ederek buluruz.



Şekil-8

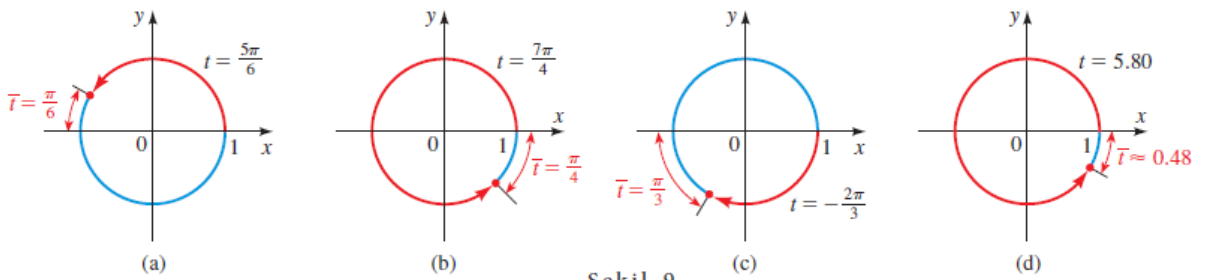
Örnek 5: Referans Sayıların Bulunması

Aşağıda verilen her bir t değeri için referans sayılarını bulunuz.

(a) $t = \frac{5\pi}{6}$ (b) $t = \frac{7\pi}{4}$ (c) $t = -\frac{2\pi}{3}$ (d) $t = 5.80$

Çözüm: Şekil-9 'dan referans sayılar aşağıdaki gibi elde edilir.

(a) $\bar{t} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$
(b) $\bar{t} = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
(c) $\bar{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
(d) $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$



Şekil-9

Uç (Terminal) Noktaların Bulunması İçin Referans Numaralarını Kullanma

Herhangi bir t değeri ile belirlenmiş P uç noktasını bulmak için aşağıdaki adımları kullanınız:

1. $\bar{t}$ referans sayısını bul.
2. $\bar{t}$ ile belirlenmiş $Q(a, b)$ uç noktasını bul.

3. t ile belirlenmiş uç nokta, $P(\pm a, \pm b)$ olup içinde bulunduğu bölgeye göre işaretini seç.

Örnek 6: Terminal Noktaların Bulunması İçin Referans Numaralarını Kullanma

Verilen her bir t reel sayısı için uç noktayı bulunuz.

(a) $t = \frac{5\pi}{6}$ (b) $t = \frac{7\pi}{4}$ (c) $t = -\frac{2\pi}{3}$

Çözüm: t değerleri ile ilişkili referans sayısının nasıl bulunduğunu Örnek 5 'de görmüştük.

- a) Referans sayı $\bar{t} = \pi/6$ olup Tablo 1'den uç nokta $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2)$ 'dir. t uç noktası II. bölgede olduğundan x –koordinatı negatif, y –koordinatı pozitif değerlidir böylece istenen uç nokta;

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- b) Referans sayı $\bar{t} = \pi/4$ olup Tablo 1'den uç nokta $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 'dir. t uç noktası IV. bölgede olduğundan x –koordinatı pozitif, y –koordinatı negatif değerlidir böylece istenen uç nokta;

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- c) Referans sayı $\bar{t} = \pi/3$ olup Tablo 1'den uç nokta $(1/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 'dir. t uç noktası III. bölgede olduğundan x –koordinatı negatif, y –koordinatı negatif değerlidir böylece istenen uç nokta;

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Birim çemberi çevresi 2π olduğu için t ile belirlenen uç nokta $t + 2\pi$ veya $t - 2\pi$ ile belirlenenle aynıdır. Genel olarak, t tarafından belirlenen uç noktaya herhangi bir sayıda 2π ekleyebilir veya çıkartabiliriz. Bir sonraki örnekte, büyük t değerinde uç noktaların bulunması için bu gözlemi kullanıyoruz.

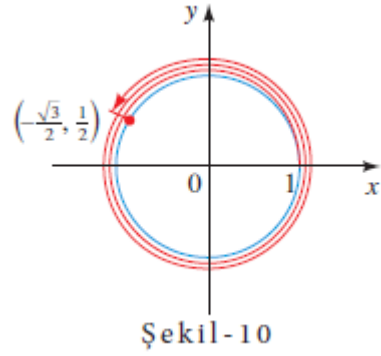
Örnek 7: Büyük t Değeri için Uç Noktanın Bulunması

$t = \frac{29\pi}{6}$ değeri için uç noktayı bulunuz.

Çözüm:

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

olduğundan istenilen uç nokta $\frac{5\pi}{6}$ ile belirlenen değer ile aynıdır. Dolayısıyla uç nokta $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2\right)$ bkz. Şekil-10

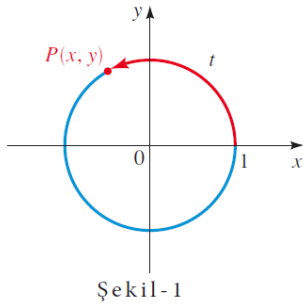


5.2 Reel Sayıların Trigonometrik Fonksiyonları

Trigonometrik Fonksiyonlar ► Trigonometrik Fonksiyonların Değerleri ► Temel Özdeşlikler

Bir fonksiyon, her bir reel sayıya başka bir reel sayı atayan bir kuraldır. Bu bölümde, trigonometrik fonksiyonları tanımlamak için bir önceki bölüme ait birim çemberin özelliklerini kullanıyoruz.

▼ Trigonometrik Fonksiyonlar



Verilen bir t reel sayısı için $P(x, y)$ uç noktası bulunurken $(1, 0)$ noktasından başlayarak t pozitif olduğunda saat yönünün tersine, t negatifse saat yönünde t kadar mesafe aldığımızı hatırlayın (bkz. Şekil-1). Şimdi birkaç fonksiyon tanımlamak için $P(x, y)$ noktasının x ve y koordinatlarını kullanıyoruz. Örneğin; *sinüs* fonksiyonu olarak isimlendirilen fonksiyonu, her bir t reel sayısı

için t ile belirlenmiş $P(x, y)$ uç noktasının y koordinatına atayarak tanımlarız. *Kosinüs*, *tanjant*, *kotanjant*, *kosekant* ve *sekant* gibi fonksiyonlarda $P(x, y)$ 'nin koordinatları kullanılarak tanımlanmaktadır.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIMI

t reel sayı ve $P(x,y)$ t ile belirlenmiş birim çember üzerinde bir uç nokta olsun. Bu durumda trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{array}{lll} \sin t = y & \cos t = x & \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \\ \csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) & \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) & \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \end{array}$$

Trigonometrik fonksiyonlar birim çembere göre tanımlanabildiğinden bazen dairesel fonksiyonlar olarak da isimlendirilir.

Örnek 1: Trigonometrik Fonksiyonların Değeri

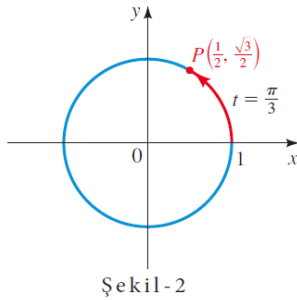
Verilen her bir t reel sayısı için yukarıda tanımlanan altı adet trigonometrik fonksiyon değerlerini bulun.

a) $t = \frac{\pi}{3}$

b) $t = \frac{\pi}{2}$

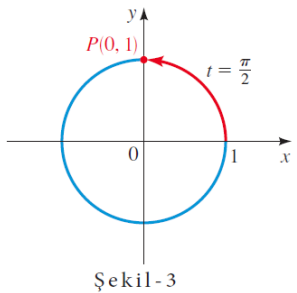
Çözüm: a) Sayfa 5 'deki Tablo-1 'den $t = \frac{\pi}{3}$ için uç nokta $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dir (bkz. Şekil-2).

Böylece x koordinatı $\frac{1}{2}$, y koordinatı $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.



$$\begin{array}{lll} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \\ \csc \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sec \frac{\pi}{3} = 2 & \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

b) $t = \frac{\pi}{2}$ için uç nokta $P(0,1)$ dir (bkz. Şekil-3).



$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \quad \cot \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Her bir tanımın paydasında $x = 0$ olduğundan, $\tan \frac{\pi}{2}$ ve $\sec \frac{\pi}{2}$ fonksiyonları tanımsızdır.

Sayfa 5'deki tablo kullanılarak aşağıda bazı t değerleri için trigonometrik fonksiyonların değerleri verilmiştir.

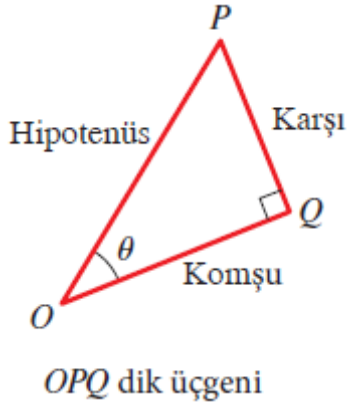
TABLO - 1
Trigonometrik Fonksiyonların Bazı Özel Değerleri

t	$\sin t$	$\cos t$	$\tan t$	$\csc t$	$\sec t$	$\cot t$
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

Örnek 1, bazı trigonometrik fonksiyonların bazı gerçel sayılar için tanımlanamayacağını göstermektedir. Dolayısıyla tanım kümelerini belirlemeye ihtiyacımız vardır. Sinüs ve kosinüs fonksiyonları tüm t değerleri için tanımlanır. Kotanjant ve kosekant fonksiyonlarının tanımlarının paydasında y olduğundan, t tarafından belirlenen $P(x,y)$ uç noktasının y -koordinatı 0 olduğunda tanımlanamazlar. Bu, $t = n\pi$ 'den herhangi bir tam sayı n için bu durum meydana gelir; bu nedenle, tanım kümelerinde bu noktalar bulunmaz. Tanjant ve sekant fonksiyonlarının paydalarında x değerine sahiptirler, dolayısıyla $x = 0$ noktasında tanımlanamazlar. Bu her n tamsayı değeri için $t = \left(\frac{\pi}{2}\right) + n\pi$ olduğundan tanım kümelerinde bu noktalar bulunmaz.

Not: Temel açılarının kosinüs ve sinüs fonksiyonlarını, bu fonksiyonları $\sqrt{\quad}/2$ formunda yazarak kolayca hatırlayabiliriz.

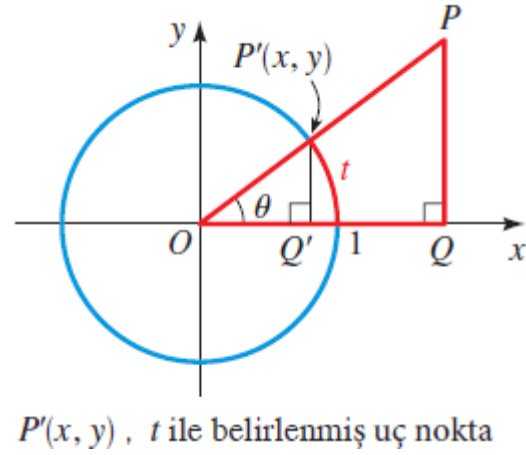
t	$\sin t$	$\cos t$
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$



Daha önce dik üçgenlerin trigonometrisi üzerinde çalıştıysanız (Bölüm 6), muhtemelen bir açının sinüs ve kosinüsünün bu bölümdeki ile ne ilgisi olduğunu merak ediyorsunuzdur. Bunu görmek için ΔOPQ üçgeni ile başlayalım:

ΔOPQ üçgenini θ açısı ile beraber standart koordinat düzlemine aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi yerleştirilsin.

Şekilde gösterilen $P'(x, y)$ noktası t yayı ile belirlenmiş bir uç noktadır. Ayrıca OPQ (büyük üçgen) üçgeni ile dik kenarlarının uzunlukları x ve y olan $OP'Q'$ (küçük üçgen) üçgeninin benzer üçgenler olduğuna dikkat edin. Bu durumda; θ açısının trigonometrik fonksiyonların tanımıyla aşağıdaki sonuçlara varırız;



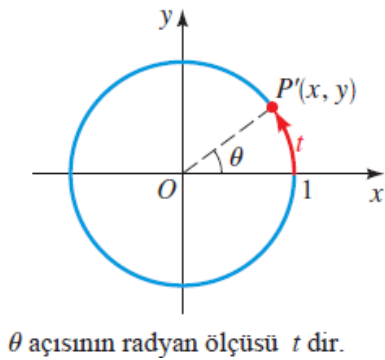
$$\sin \theta = \frac{\text{Karşı}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Komşu}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} = \frac{x}{1} = x$$

t reel sayısının trigonometrik fonksiyonların tanımlanmasıyla $\sin t = y$, $\cos t = x$ 'dir.

Şimdi θ açısı radyan cinsinden ise, $\theta = t$ 'dir.(yandaki şekle bakınız) Böylece, θ radyan ölçüsü ile açının trigonometrik fonksiyonları, t reel sayısı tarafından belirlenen uç noktayla tanımlanmış trigonometrik fonksiyonlarla tam olarak aynıdır.

O halde neden trigonometri iki farklı yoldan araştırılır?



Çünkü farklı uygulamalar trigonometrik fonksiyonları farklı şekilde görmemizi gerektirmektedir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIM KÜMELERİ

Fonksiyon	Tanım kümesi
$\sin, \cos$	Tüm reel sayılar
$\tan, \sec$	Tüm n tamsayıları için $\left(\frac{\pi}{2}\right) + n\pi$ dışındaki noktalar
$\cot, \csc$	Tüm n tamsayıları için $n\pi$ dışındaki noktalar

▼ Trigonometrik Fonksiyonların Değerleri

Trigonometrik fonksiyonların diğer değerlerini hesaplamak için, ilk önce işaretlerini belirleriz. Trigonometrik fonksiyonların işaretleri, t uç noktasının bulunduğu çeyreğe bağlıdır. Örneğin, t tarafından belirlenen $P(x, y)$ uç noktası, III. bölgede yer alıyorsa, koordinatlarının her ikisi de negatiftir. Böylece, $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\csc(t)$ ve $\sec(t)$ tümü negatif iken $\tan(t)$ ve $\cot(t)$ pozitifdir. Aşağıdaki kutudaki diğer durumları kontrol edebilirsiniz.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İŞARETLERİ		
BÖLGE	Pozitif Fonksiyonlar	Negatif Fonksiyonlar
I	all	hiçbiri
II	$\sin, \csc$	$\cos, \sec, \tan, \cot$
III	$\tan, \cot$	$\sin, \csc, \cos, \sec$
IV	$\cos, \sec$	$\sin, \csc, \tan, \cot$

Örneğin; $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$ 'dır. Çünkü $t = \frac{2\pi}{3}$ uç noktası II. Bölgededir. Bununla birlikte, $\tan 4 > 0$ 'dır, çünkü $t = 4$ uç noktası III. bölgede yer almaktadır.

Bölüm 5.1 'de, bir t reel sayısı ile belirlenen uç noktayı bulmak için referans numarasını kullandık. Trigonometrik fonksiyonlar, uç noktaların koordinatları ile tanımlandığından, trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulmak için referans sayısını kullanabiliriz. t için referans sayının $\bar{t}$ olduğunu varsayalım. O zaman $\bar{t}$ 'nın uç noktası, olası işareti hariç, t 'nin uç noktasıyla aynı koordinatlara sahiptir. Yani t 'deki trigonometrik fonksiyonların değerleri, olası işareti hariç, $\bar{t}$ 'deki değerleriyle aynıdır. Bu işlemi bir sonraki örnekte göstereceğiz.

Örnek 2: Trigonometrik Fonksiyonların Değerlerinin Bulunması

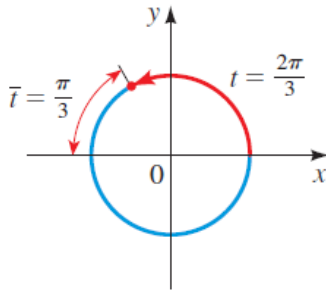
Aşağıdaki her bir değeri bulunuz.

(a) $\cos \frac{2\pi}{3}$ (b) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (c) $\sin \frac{19\pi}{4}$

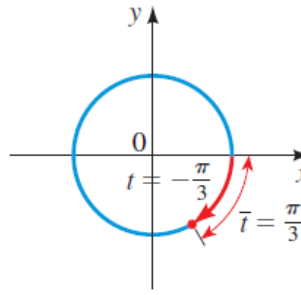
Çözüm: a) $\frac{2\pi}{3}$ için referans sayı $\frac{\pi}{3}$ ’dür (bkz. Şekil 4.a). $\frac{2\pi}{3}$ değerinin uç noktası II. bölgede olduğundan $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ negatiftir. Böylece,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

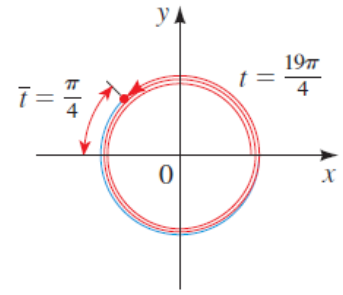
işareti Referans sayı değeri
tablo-1 den



Şekil-4 (a)



(b)



(c)

b) $-\frac{\pi}{3}$ için referans sayı $\frac{\pi}{3}$ ’dür (bkz. Şekil 4.b). $-\frac{\pi}{3}$ değerinin uç noktası IV. bölgede olduğundan $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ negatiftir. Bu yüzden;

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

işareti referans sayı değeri
tablo 1'den

c) $(19\pi/4) - 4\pi = (3\pi/4)$ olduğundan $(19\pi/4)$ ile $(3\pi/4)$ ’ün uç noktası aynıdır. $(3\pi/4)$ için referans sayı $\frac{\pi}{4}$ ’tür (bkz. Şekil 4.c). $(3\pi/4)$ değerinin uç noktası II. bölgede olduğundan $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ pozitifdir. Bu yüzden;

$$\sin \frac{19\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = +\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4π çıkar işaret referans sayı değeri
tablo 1

Şimdiye kadar, trigonometrik fonksiyonların değerlerini yalnızca belirli t değerleri için hesaplayabildik. Aslında, t değeri $\pi/6, \pi/4, \pi/3$ ve $\pi/2$ ‘nin katı olduğunda trigonometrik fonksiyonların değerlerini hesaplayabiliriz. Trigonometrik fonksiyonları t ‘nin diğer değerleri için nasıl hesaplayabiliriz? Örneğin, $\sin 1.5$ ’i nasıl bulabiliriz? Bunun bir yolu, dikkatli bir

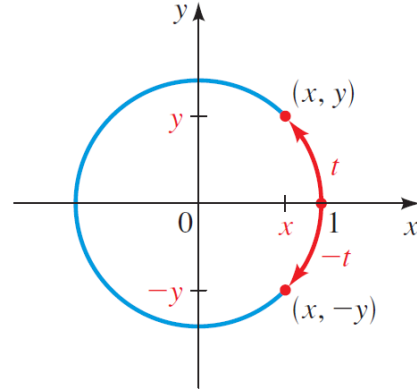
şekilde diyagram taslağı oluşturmak ve değerini okumaktır (Örnek 39-46); Ancak, bu yöntem çok doğru değildir. Neyse ki, doğrudan bilimsel hesap makinelerine programlanmış matematiksel fonksiyonlar sinüs, kosinüs ve tanjant değerlerini ekrandaki basamak sayısına göre hesaplar. Bu fonksiyonları değerlendirmek için hesap makinesi radyan moda geçirilmelidir. Bir hesap makinesiyle kosekant, sekant ve kotanjant değerlerini bulmak için aşağıdaki çarpma işlemine göre ters olan eşitlikleri kullanmamız gerekir:

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Bu özdeşlikler, trigonometrik fonksiyonların tanımlarından çıkar. Örneğin $\sin t = y$ ve $\csc t = 1/y$ ve $\csc t = \frac{1}{y} = 1/\sin t$. diğer özdeşliklerde benzer biçimde elde edilir.

t 'nin trigonometrik fonksiyonları ile $-t$ 'nin trigonometrik fonksiyonları arasındaki ilişkiyi ele alalım. Şekil 5'ten,

$$\begin{aligned} \sin(-t) &= -y = -\sin t \\ \cos(-t) &= x = \cos t \\ \tan(-t) &= \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t \end{aligned}$$



Şekil 5

Bu denklemler, sinüs ve tanjantın tek fonksiyon olduğunu, buna karşılık kosinüsün çift bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. Hatta çift bir fonksiyonun çarpmaya göre tersinin çift olduğunu ve tek bir fonksiyonun çarpmaya göre tersinin tek olduğunu görmek kolaydır. Bu gerçek, çarpmaya göre ters ile birlikte, tüm trigonometrik fonksiyonların tek-çift özelliklerine dair

TEK-ÇİFT ÖZELLİKLER

Sinüs, kosekant, tanjant ve kotanjant tek fonksiyonlardır; Kosinüs ve sekant fonksiyonları çift fonksiyonlardır.

$$\begin{array}{lll} \sin(-t) = -\sin t & \cos(-t) = \cos t & \tan(-t) = -\tan t \\ \csc(-t) = -\csc t & \sec(-t) = \sec t & \cot(-t) = -\cot t \end{array}$$

Örnek 4: Tek ve Çift Trigonometrik Fonksiyonlar

(a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, (b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Her bir değeri belirlemek için trigonometrik fonksiyonların tek-çift özelliklerini kullanın.

Çözüm: Tek-çift özellikler ve Tablo 1'e göre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} & \text{sin tek} \\ \text{(b)} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{Cos çift} \end{array}$$

▼ Temel Özdeşlikler

Trigonometrik fonksiyonlar trigonometrik özdeşlik adı verilen denklemler vasıtasıyla birbirleriyle ilişkilidirler.

TEMEL ÖZDEŞLİKLER

Ters Özdeşlikler

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t} \quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Pisagor Özdeşlikleri

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \quad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

İspat: Pisagor özdeşliklerini kanıtlıyoruz. $x = \cos t$ ve $y = \sin t$ olarak tanımlanırsa $P(x, y)$ noktası birim çember üzerinde olduğundan $x^2 + y^2 = 1$ olur. Böylece,

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\cos^2(t)$ ($\cos^2(t) \neq 0$) 'a bölünürse,

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

bulunur. Benzer şekilde yine her iki taraf $\sin^2(t)$ ($\sin^2(t) \neq 0$)'e bölünürse $1 + \cot^2(t) = \csc^2(t)$

Adından da anlaşılacağı üzere, temel özdeşlikler trigonometride merkezi bir rol oynar çünkü herhangi bir trigonometrik fonksiyonu diğerleriyle ilişkilendirmek için kullanabiliriz. Yani, t noktasındaki trigonometrik fonksiyonlardan herhangi birinin değerini biliyorsak, yine bu noktadaki tüm diğer fonksiyonların değerlerini bulabiliriz.

Örnek 5: Tüm Trigonometrik Fonksiyonları Bir Değerden Bulma

$\cos t = 3/5$ ve t , IV. Bölgede ise t noktasındaki tüm trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulun.

Çözüm: Pisagor özdeşliklerinden

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin^2 t + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 t = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin t = \pm \frac{4}{5}$$

Bu nokta IV. bölgede olduğu için, $\sin t$ negatiftir, $\sin t = -4/5$ artık hem $\sin t$ hem de $\cos t$ değerlerini biliyoruz, diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini ters özdeşlikleri kullanarak bulabiliriz:

$$\sin t = -\frac{4}{5} \quad \cos t = \frac{3}{5} \quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} = -\frac{5}{4} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

Örnek 6: Bir Trigonometrik Fonksiyonun Bir Başka Cinsten Yazılması

t , III. bölgede yer aldığında $\tan(t)$ 'yi $\cos(t)$ cinsinden yazınız.

Çözüm: $\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$ olduğundan ve Pisagor özdeşliği kullanılırsa,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t \quad \text{sin}^2 t \text{ için çöz}$$

$$\sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \text{Karekök Al}$$

III. Bölgede $\sin t$ negatif olduğundan negatif işaret dikkate alındığında

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

elde edilir.

5.3 Trigonometrik Grafikler-I

Sinüs ve Kosinüs Grafikleri ► Sinüs ve Kosinüs Dönüşümlerinin Grafikleri

Bir fonksiyonun grafiği onun davranışı hakkında daha iyi bilgi verir. Bu yüzden bu bölümde, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların bazı dönüşümlerinin grafiklerini çizeceğiz. Diğer trigonometrik fonksiyonların grafikleri gelecek bölümde gösterilecektir.

▼ Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Grafikleri

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının grafiklerini çizmede bize yardımcı olması için ilk olarak belirli bir düzendeki bu fonksiyonların tekrar eden değerlerine bakarız. Tam olarak nasıl olduğunu görmek için birim çemberinin 2π uzunluğunda olduğunu hatırlayın. Bir t reel sayısı ile belirlenmiş $P(x, y)$ uç noktası ile $t + 2\pi$ ile belirlenmiş uç nokta aynıdır. Sinüs ve kosinüs fonksiyonları $P(x, y)$ noktaları ile tanımlandığından 2π 'nin herhangi bir tamsayı katının eklenmesi, o değerlerde herhangi bir değişiklik meydana getirmeyecektir. Diğer bir deyişle;

$$\sin(t + 2n\pi) = \sin(t) \quad \text{herhangi bir } n \text{ için.}$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos(t) \quad \text{herhangi bir } n \text{ için.}$$

Böylece, sinüs ve kosinüs fonksiyonları aşağıdaki tanıma göre *periyodik fonksiyonlardır*.

Tanım: p pozitif bir sayı olsun. Her t için bir f fonksiyonu $f(t + p) = f(t)$ ise bu f fonksiyonuna periyodik fonksiyon adı verilir. **En küçük p** sayısına f 'nin periyodu(**esas, tam**

periyodu) denir. Eğer f fonksiyonu p periyoduna sahipse, p uzunluğundaki herhangi bir aralık üzerinde f 'nin grafiğine *bir tam periyotlu* adı verilir.

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Periyodik Özelliği

2π periyotlu sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t$$

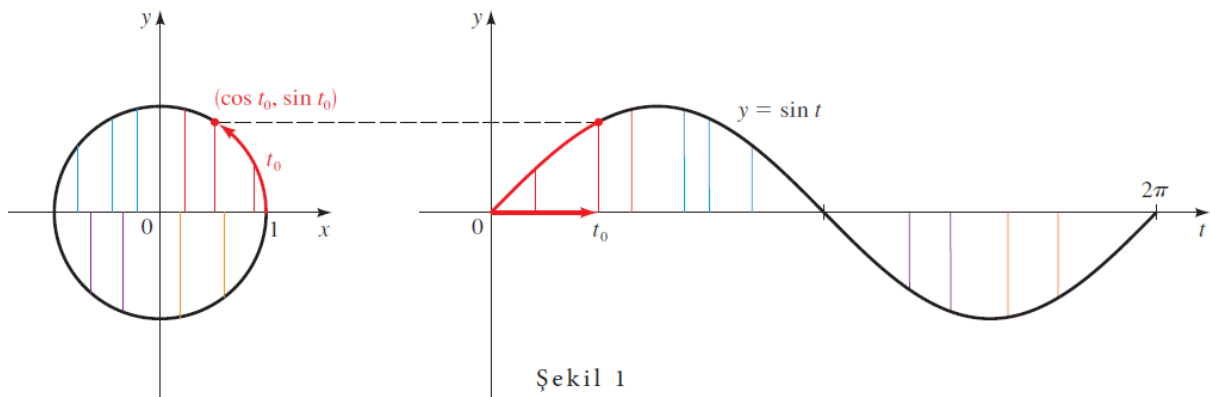
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t$$

Tablo 1

t	$\sin t$	$\cos t$
$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$
$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$

Dolayısıyla sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının değerleri 2π uzunluğundaki aralıklarla tekrarlar. Onların grafiklerini çizmek için önce bir periyottaki grafiğini çizeriz. $0 \leq t \leq 2\pi$ aralığındaki grafiklerini çizmek için bir tablo oluşturup bu noktaları kullanmayı deneyebiliriz. Böyle tam bir tablo bulunamadığından, bu fonksiyonların tanımlarına daha yakından göz atalım. $\sin t$ 'nin bir t reel sayısı ile belirlenmiş

birim çember üzerindeki $P(x, y)$ uç noktasının y koordinatı olduğunu hatırlayalım. Bu noktanın y -koordinatı t arttıkça nasıl değişir? $P(x, y)$ noktasının y -koordinatının birim çember üzerinde 1'e doğru çıkarken ve -1'e doğru azalırken tekrarlı tüm hareketi boyunca nasıl değiştiğini görmek kolaydır (bkz. Şekil-1). Aslında t 0'dan $\pi/2$ artarken $y = \sin t$ 0'dan 1'e artar. $t \pi/2$ 'den π 'ye artarken $y = \sin t$ 1'den 0'a doğru azalır. Tablo 1, t için 0 ile 2π arasındaki sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının değişimini göstermektedir.



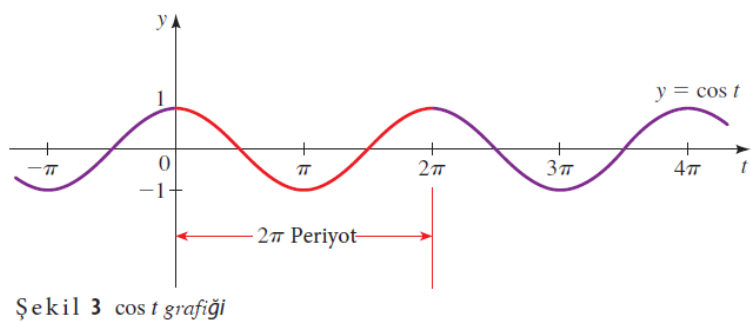
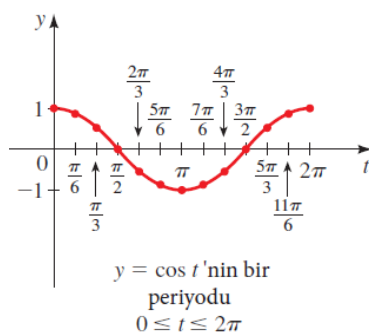
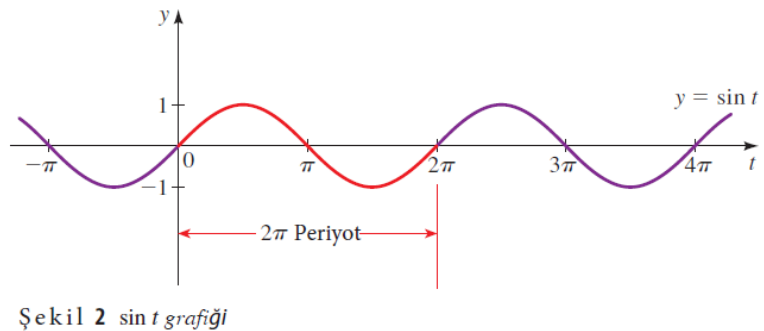
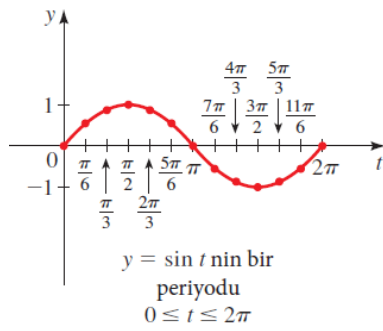
Şekil 1

TABLO 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Grafikleri daha doğru çizmek için, Tablo 2'de birkaç tane $\sin t$ ve $\cos t$ değerini buluruz. Bir hesap makinesinin yardımıyla başka değerleri bulabiliriz.

Şimdi, bu bilgileri, Şekil 2 ve 3'te 0 ile 2π arasındaki t için $\sin t$ ve $\cos t$ fonksiyonlarının grafikler çizmek için kullanırız. Bunlar bir periyotlu grafiklerdir. Bu fonksiyonların 2π ile periyodik olduğu gerçeğini kullanarak, 2π uzunluğundaki ardışık aralıklarla aynı deseni sola ve sağa devam ederek tam grafikleri elde ederiz. Sinüs fonksiyonunun grafiği, orijine göre simetriktir. Bu beklendik bir şeydir. Çünkü sinüs tek bir fonksiyondur. Kosinüs fonksiyonu çift bir fonksiyon olduğundan, grafiği y eksene göre simetriktir.



▼ Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Dönüşümlerinin Grafikleri

Artık, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının dönüşümleri olan fonksiyonların grafikleri ele alınmaktadır. Böylelikle Bölüm 2.5'de yer alan grafik teknikleri burada oldukça kullanışlıdır. Elde ettiğimiz grafikler, uygulamaları harmonik hareket gibi fiziksel durumlara anlamak için önemlidir, ancak bazıları kendi başına ilginç olan güzel grafiklerdir. Bir fonksiyonun tanım

kümesindeki değişkeni belirtmek için x harfini kullanmak geleneksel bir işlemdir. Bu yüzden $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ biçiminde belirtebiliriz.

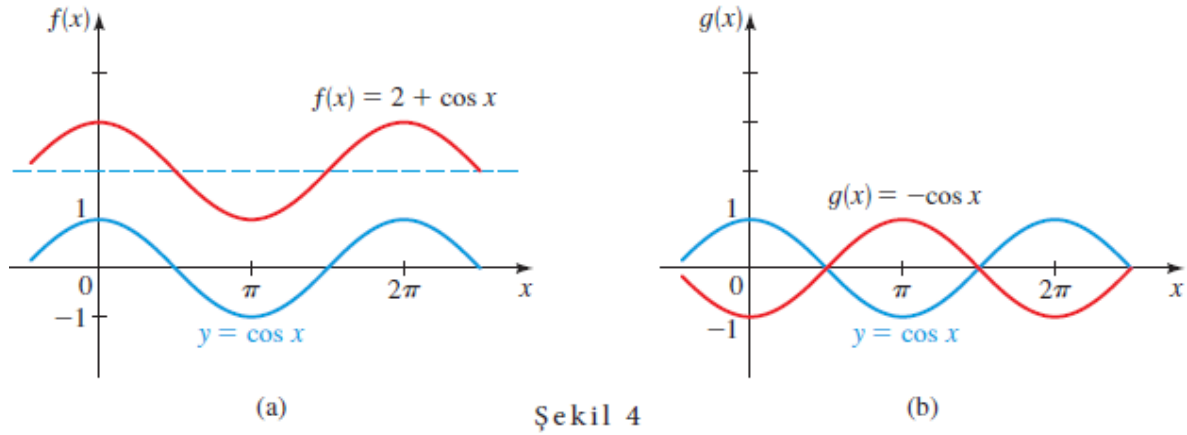
Örnek 1: Kosinüs Eğrileri

Aşağıdaki her bir fonksiyonun grafiğini çizin

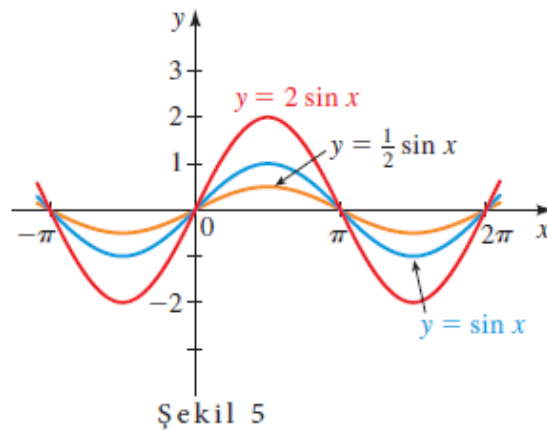
(a) $f(x) = 2 + \cos x$ (b) $g(x) = -\cos x$

Çözüm: $y = 2 + \cos x$ fonksiyonunun grafiği $y = \cos x$ ile benzerdir. Sadece 2 birim yukarı ötelenmiştir. (bkz. Şekil 4(a))

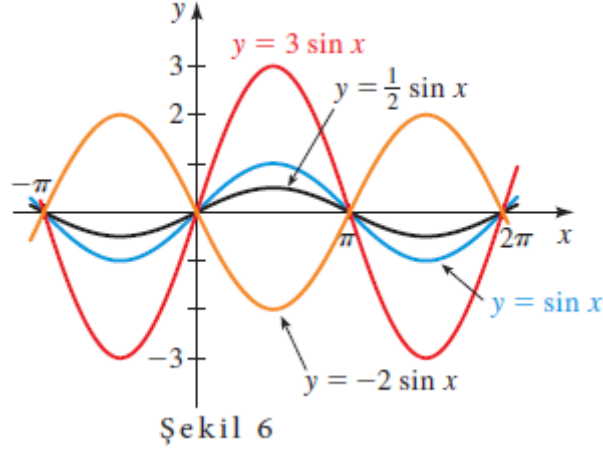
$y = -\cos x$ fonksiyonunun grafiği $y = \cos x$ ile benzerdir. Sadece x -eksenine göre yansıması alınmıştır. (bkz. Şekil 4(b))



$y = 2\sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Bunun için $y = \sin x$ grafiği ile başlarız ve y koordinatındaki her değeri 2 ile çarparak $y = 2\sin x$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz. Bu, grafiği dikey olarak 2 katı kadar gerdirme etkisine sahiptir. $y = \frac{1}{2}\sin x$ fonksiyonun grafiği için ise y koordinatındaki her değer $\frac{1}{2}$ ile çarpılır. Bu, grafiği dikey olarak $\frac{1}{2}$ katı kadar gerdirme etkisine sahiptir (bkz. Şekil 5).



Genellikle $y = a \sin x$ ve $y = a \cos x$ fonksiyonları için $|a|$ sayısına *genlik(büyükölük)* adı verilir ve bu tipteki fonksiyonların ulaştığı en büyük değerdır. $y = a \sin x$ fonksiyonunun çeşitli a değlereri için grafikleri Şekil 6’da gösterilmiştir.

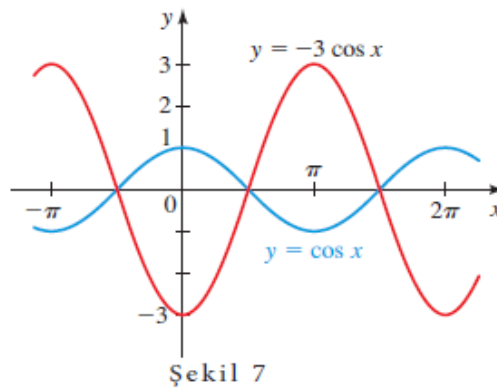


Örnek 2: Bir Kosinüs Eğrisini Germe

$y = -3 \cos x$ fonksiyonunun genliğini bulup grafiğini çiziniz.

Çözüm: Genlik $|-3| = 3$ ’tür. Fonksiyon en yüksek değeri 3, en düşük değeri ise -3’tür.

$y = -3 \cos x$ fonksiyonunun grafiğı $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğı ile benzerdir. Buradaki y değlereri 3 ile çarpılıp x –eksenine göre yansıması alınarak grafik çizilir (bkz. Şekil 7).



Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyodu 2π olduğundan

$$y = a \sin kx \text{ ve } y = a \cos kx \quad k > 0$$

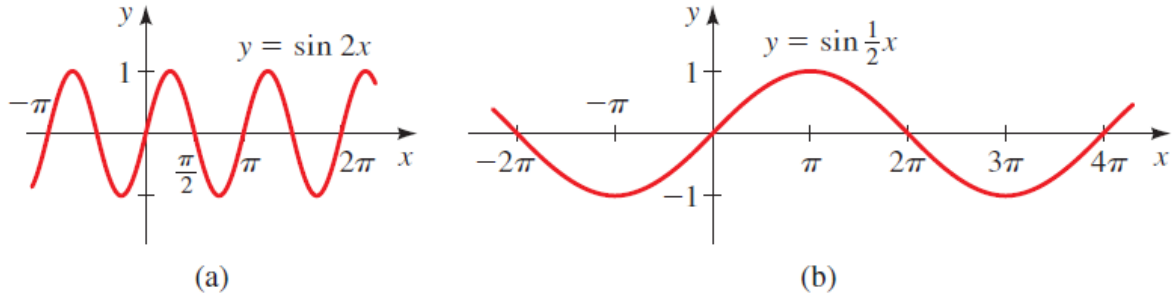
Fonksiyonları için kx değeri 0’dan 2π ’ye değıştiğinde bir periyodu tamamlar, yani, $0 \leq kx \leq 2\pi$ veya $0 \leq x \leq 2\pi/k$ ’dır. Bu yüzden x için, $0 \leq x \leq 2\pi/k$ arasında bir periyot

tamamlamaktadır ve periyot $2\pi/k$ 'dır. Bu fonksiyon eğrilerine sırasıyla **sinüs eğrileri** ve **kosinüs eğrileri** denir. (Sinüs ve kosinüs eğrilerine genellikle sinusoidal eğriler denir.)

$$y = a \sin kx \text{ ve } y = a \cos kx \quad k > 0$$

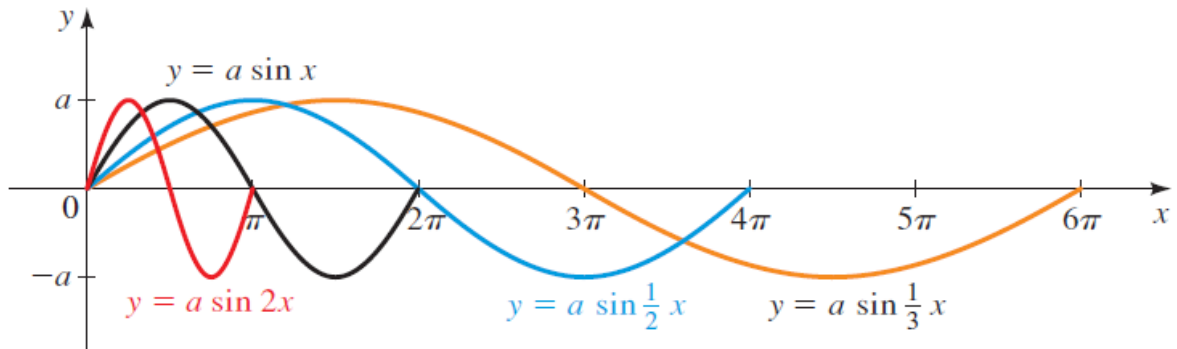
Yukarıdaki sinüs ve kosinüs eğrilerinin **genlikleri** $|a|$ ve **periyotları** $2\pi/k$ 'dır. Bir tam periyodun grafiğini çizmek için uygun bir aralık $(0, 2\pi/k)$ 'dır.

k değerinin $y = \sin kx$ grafiğini nasıl etkilediğini görmek için $y = \sin 2x$ grafiğini çizelim. Periyot $\frac{2\pi}{2} = \pi$ olduğu için $0 \leq x \leq \pi$ aralığında fonksiyon tam bir periyodu tamamlar (bkz. Şekil 8(a)). $y = \sin \frac{1}{2}x$ eğrisinin periyodu ise $2\pi \div 1/2 = 4\pi$ olur. Dolayısıyla bu eğri $0 \leq x \leq 4\pi$ aralığında tam bir periyodu tamamlar (bkz. Şekil 8(b)). Etkinin $k < 1$ olması durumunda grafiği yatay olarak gerdiği(uzattığı) veya $k > 1$ durumunda ise grafiği yatay olarak daralttığı(küçülttüğü) görülmektedir.



Şekil 8

Karşılaştırma için, Şekil 9'da, k 'nin çeşitli değerleri için $y = a \sin kx$ sinüs eğrisinin bir periyodunun grafikleri gösterilmektedir.



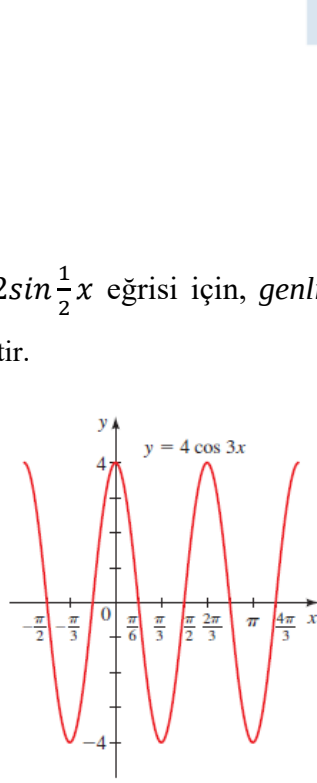
Şekil 9

Örnek 3: Genlik ve Periyot

Aşağıdaki fonksiyonların her birinin genlik ve periyodunu bulup grafiklerini çizin

(a) $y = 4 \cos 3x$ (b) $y = -2 \sin \frac{1}{2}x$

Çözüm: a) Aşağıdaki biçimde genlik ve periyot elde edilir. Şekil 10'da çizim gösterilmiştir.

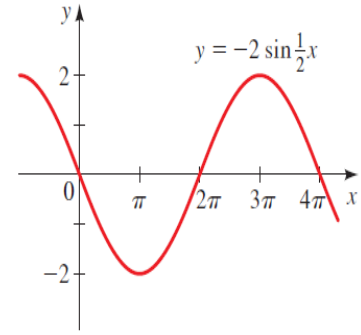


Şekil 10

genlik $|a| = 4$

$y = 4 \cos 3x$

Periyot $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$



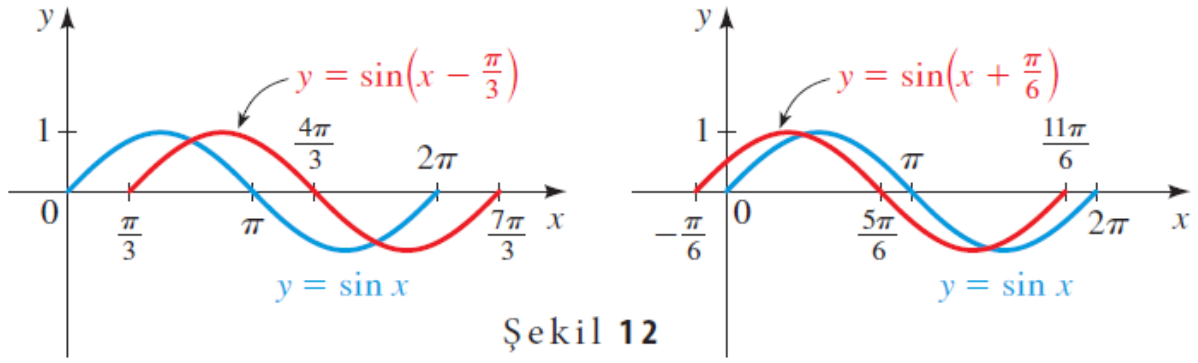
Şekil 11

$y = a \sin k(x - b)$ ve $y = a \cos k(x - b)$ biçiminde tanımlanan sinüs ve kosinüs eğrileri yatay ekseninde $|b|$ kadar ötelenmiştir. Eğer $b > 0$ ise sağa, $b < 0$ ise sola öteleme gerçekleşir. b sayısına *faz kayması* (öteleme) denir.

$$y = a \sin k(x - b), \quad y = a \cos k(x - b) \quad k > 0$$

Eğrilerinin **genlikleri** $|a|$, **periyotları** $2\pi/k$ ve **faz ötelemeleri** b kadardır. Tam bir periyodun grafiğini çizmek için uygun bir aralık $[b, b + \left(\frac{2\pi}{k}\right)]$ 'dır.

$y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ve $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ eğrilerinin grafikleri şekil 12'de gösterilmiştir.



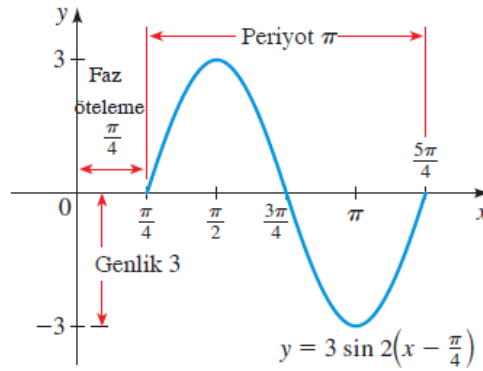
Örnek 4: Ötelenmiş bir Sinüs Eğrisi

$y = 3 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ eğrisinin genliğini, periyodunu ve faz ötelemesini bularak grafiğini çizin.

Çözüm: Aşağıdaki biçimde istenenler elde edilir. Şekil 13’de grafik gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{genlik} &= |a| = 3 & \text{periyot} &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ y &= 3 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{faz ötelemesi} &= \frac{\pi}{4} \text{ (sağa öteleme)} \end{aligned}$$

Faz ötelemesi $\pi/4$ olup, periyot π ’dir. Dolayısıyla tam bir periyot; $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ olur.



Örnek 5: Ötelenmiş bir Kosinüs Eğrisi

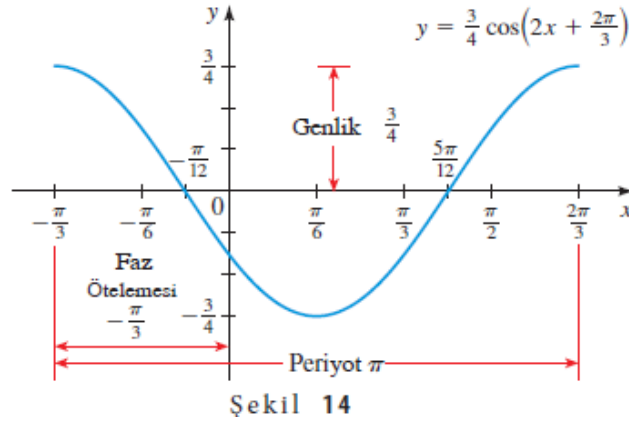
$y = \frac{3}{4} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ eğrisinin genliğini periyodunu ve faz ötelemesini bularak tam bir periyotlu grafiğini çizin.

Çözüm: ilk olarak fonksiyon $y = a \cos k(x - b)$ formunda yazılırsa $2x + \frac{2\pi}{3}$ ifadesi 2 parantezine alınarak yazıldığında;

$$y = \frac{3}{4} \cos 2 \left[x - \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

olur. Bu durumda;

genlik; $|a| = 3/4$, **periyot;** $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, **faz ötelemesi;** $b = -\frac{\pi}{3}$ olup öteleme sola doğrudur. Bu bilgidan hareketle bir periyotlu kosinüs eğrisi $-\pi/3$ 'ten başlayıp $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ noktasında sonlanır. Dolayısıyla grafik için aralığımız; $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$ olur. Grafik;



5.4 Trigonometrik Grafikler-II

Tanjant, Kotanjant, Sekant ve Kosekant Fonksiyonlarının Grafikleri ► Tanjant ve Kotanjant Dönüşümlerinin Grafikleri ► Sekant ve Kosekant Dönüşümlerinin Grafikleri

Bu bölümde tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant fonksiyonlarının grafikleri ile bu fonksiyonların dönüşümlerinin grafikleri çizilecektir.

▼ Tanjant, Kotanjant, Sekant ve Kosekant Fonksiyonlarının Grafikleri

Bu fonksiyonların periyodik özellikleri ile başlıyoruz. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyotları 2π 'dir. Bu yüzden kosekant ve sekant fonksiyonları sırasıyla sinüs ve kosinüsün çarpmaya göre ters fonksiyonları olduğundan onların periyotları da 2π 'dir. Ancak, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyotları π 'dir.

Periyodik Özellikler

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonlarının Periyotları π 'dir:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Kosekant ve Sekant Fonksiyonlarının Periyotları 2π 'dir:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \quad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

Öncelikle tanjant fonksiyonunun grafiğini çizelim. Tanjantın periyodu π olduğundan, π aralığına sahip herhangi bir aralıkta grafiği çizeriz ve daha sonra sağ ve sol tarafa grafiği taşıırız.

Grafiği $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çizeceğiz. Çünkü $\tan(\pi/2)$ ve $\tan(-\pi/2)$ tanımlı değildir. Bu

x	$\tan x$
0	0
$\pi/6$	0.58
$\pi/4$	1.00
$\pi/3$	1.73
1.4	5.80
1.5	14.10
1.55	48.08
1.57	1,255.77
1.5707	10,381.33

yüzden grafiği çizerken $(\pi/2)$ ve $(-\pi/2)$ noktaların yanında oldukça dikkatli olmalıyız. x $(\pi/2)$ değerine yakın ve $(\pi/2)$ den küçük değerler aldığında $\tan x$ büyük değerler alır. Bunu görmek için x $(\pi/2)$ 'ye yeteri kadar yakın seçildiğinde $\cos x$ 0 yaklaşırken $\sin x$ 1'e yaklaşır, bu yüzden $\tan x = \sin x / \cos x$ olduğundan büyük değerler alır. Aşağıdaki tabloda $(\pi/2)$ 'ye yakın x değerleri ile $\tan x$ değerleri sunulmuştur. Böylece x değerleri $(\pi/2)$ 'ye yakın $(\pi/2)$ 'den daha küçük seçildiğinde $\tan x$ değerlerinin herhangi bir pozitif bir sayıdan daha büyük olduğu görülmektedir. Bu durum

aşağıdaki biçimde ifade edilir;

$$x \rightarrow \frac{\pi^-}{2} \text{ iken } \tan x \rightarrow \infty$$

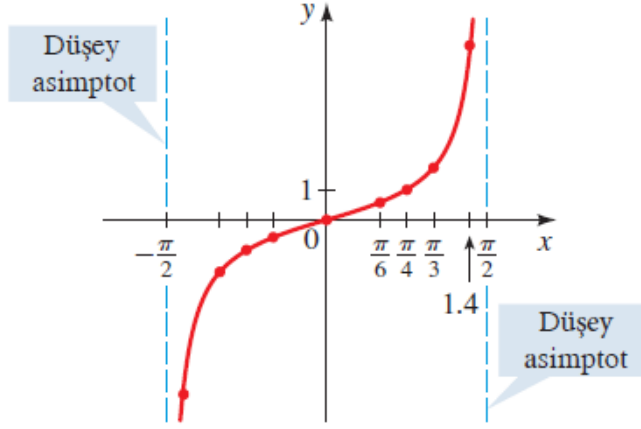
Yukarıdaki ifade “ x , $\pi/2$ 'ye soldan yaklaşırken $\tan x$ sonsuza yakınsar” biçiminde okunur. Benzer biçimde x değerleri $(-\pi/2)$ 'ye yakın $(-\pi/2)$ 'den daha büyük seçildiğinde $\tan x$ değerlerinin herhangi bir negatif sayıdan daha küçük olduğu görülmektedir. Bu durum aşağıdaki biçimde ifade edilir;

$$x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2} \text{ iken } \tan x \rightarrow -\infty$$

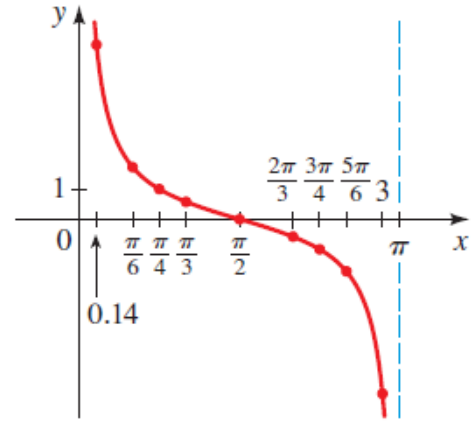
Yukarıdaki ifade “ x , $-\pi/2$ 'ye sağdan yaklaşırken $\tan x$ negatif sonsuza yakınsar” biçiminde okunur. Böylece $y = \tan x$ fonksiyonunun grafiği $x = -\frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ değerlerinde düşey asimptota sahip olmaktadır. Tüm bu bilgiler ışığında $y = \tan x$ fonksiyonun grafiği şekil

1'deki gibi $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ aralığında çizilir. $y = \tan x$ grafiğinin tamamı Şekil 5(a)'da çizilmiştir.

$y = \cot x$ fonksiyonunun grafiği benzer bir analizle $(0, \pi)$ aralığında çizilebilir (bkz. Şekil 2). $\cot x$ fonksiyonu $x = n\pi$ (n tamsayı) için tanımsızdır, dolayısıyla bu noktalar düşey asimptot değerleridir. Bu fonksiyonun tam grafiği Şekil 5(b)'de çizilmiştir.



Şekil 1
Bir periyotlu $y = \tan x$ grafiği

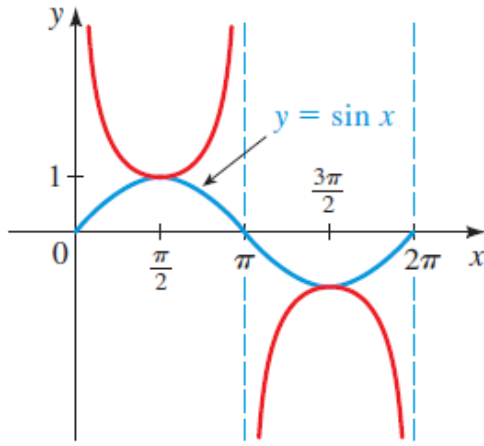


Şekil 2
Bir periyotlu $y = \cot x$ grafiği

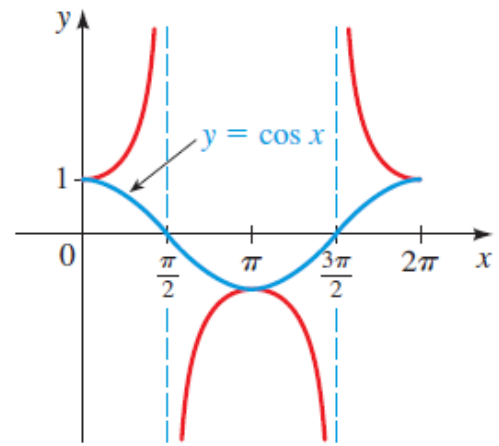
Kosekant ve sekant fonksiyonlarının grafiklerini çizmek için;

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ ve } \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Çarpmaya göre ters özdeşliklerini kullanınız. Bu yüzden $y = \csc x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğindeki y noktalarının çarpmaya göre tersleri alınır (bkz. Şekil 3). Benzer biçimde $y = \sec x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğindeki y noktalarının çarpmaya göre tersleri alınır (bkz. Şekil 4).



Şekil 3
Bir periyotlu $y = \csc x$ grafiği



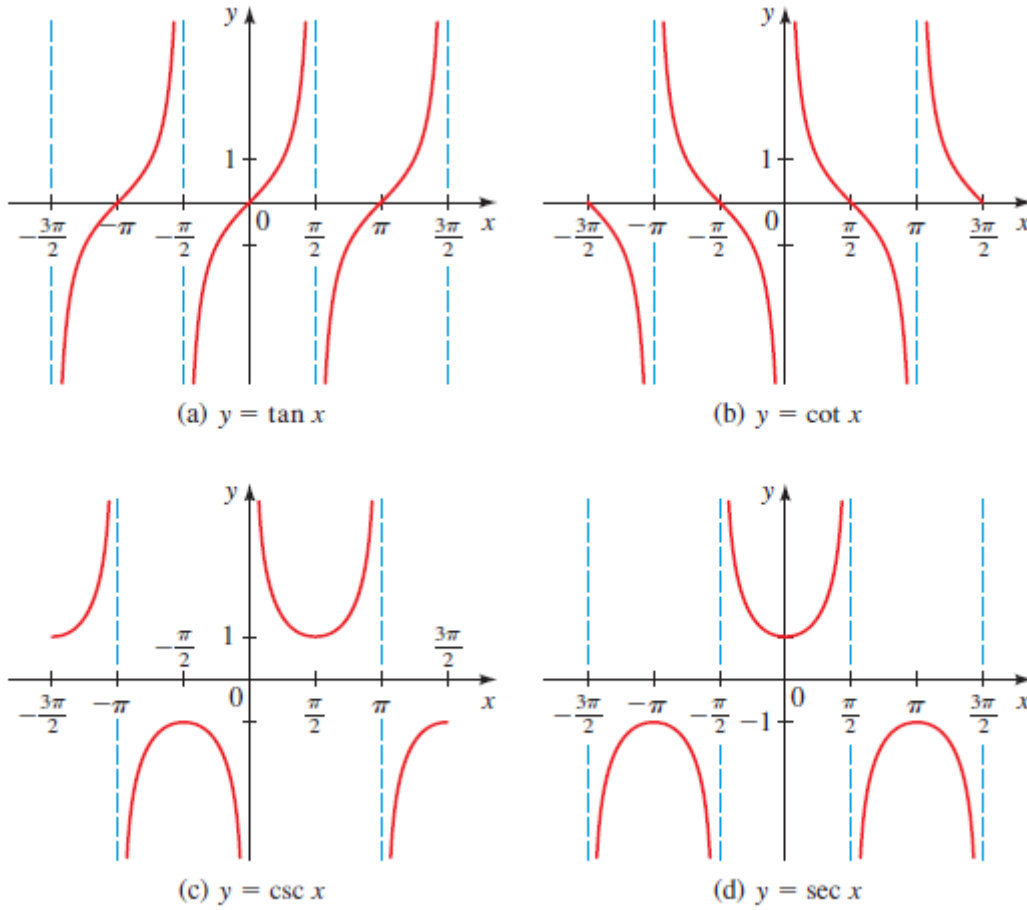
Şekil 4
Bir periyotlu $y = \sec x$ grafiği

$0 < x < \pi$ aralığında $y = \csc x$ fonksiyonunun grafiğine daha yakından bakalım. 0 ve π 'ye yakın fonksiyon değerlerini açıklamaya ihtiyacımız vardır. $\sin x = 0$ olduğunda $\csc x$ tanımsız olur. Bunu görmek için

$$x \rightarrow 0^+ \text{ iken } \csc x \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \pi^- \text{ iken } \csc x \rightarrow \infty$$

olup $x = 0$ ve $x = \pi$ noktaları düşey asimptot olur. $\pi < x < 2\pi$ aralığında grafik benzer biçimde çizilir. Fonksiyonun tam grafiği Şekil 5(c)'de 2π periyotlu olarak çizilmiştir. Dikkate edilmesi gereken $y = \csc x$ fonksiyonu için $\sin x = 0$ olduğu noktalar yani $x = n\pi$ (n tamsayı) noktaları düşey asimptotlarıdır.



Şekil 5

$y = \sec x$ fonksiyonunun grafiği de benzer davranış göstermektedir. Bu fonksiyonun tanım kümesi $x = \left(\frac{\pi}{2}\right) + n\pi$ (n tamsayı) haricindeki tüm reel sayılardır. Dolayısıyla bu noktalar düşey asimptot değerleridir. Fonksiyonunun tam grafiği Şekil 5(d)'de gösterilmiştir.

$y = \tan x$, $y = \cot x$ ve $y = \csc x$ fonksiyonlarının grafiklerinden görüldüğü üzere bu fonksiyonlar orijine göre simetrik ilen $y = \sec x$ fonksiyonu y -eksenine göre simetriktir. Bunun nedeni tanjant, kotanjant ve kosekant fonksiyonları tek fonksiyon iken sekant fonksiyonu çift fonksiyon olduğundandır.

▼ Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonlarının Dönüşümlerinin Grafikleri

Şimdi, tanjant ve kotanjant fonksiyonların dönüşümlerinin grafikleri ele alınmaktadır.

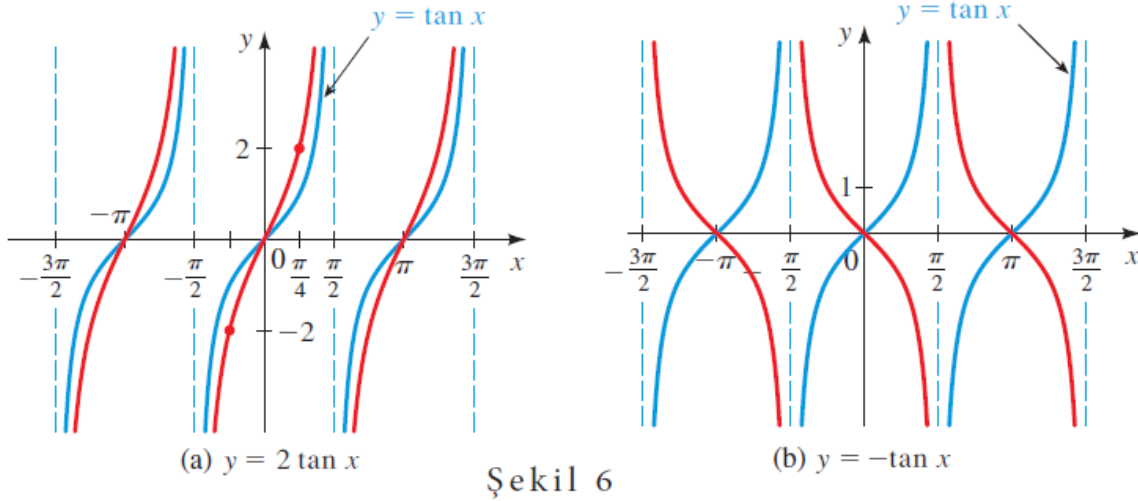
Örnek 1: Tanjant Eğrilerinin Çizimi

(a) $y = 2\tan x$ (b) $y = -\tan x$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

Çözüm: a) Önce $y = \tan x$ fonksiyonu çizilir sonra onu gerektiği gibi dönüştürürüz.

$y = 2\tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $y = \tan x$ fonksiyonundaki her bir y – koordinat değerini 2 ile çarpalım. Sonuçlar Şekil 6(a)’da gösterilmiştir.

b) $y = -\tan x$ grafiği Şekil 6(b)’de gösterildiği gibi $y = \tan x$ fonksiyonun x –eksenine göre yansıması alınarak elde edilmiştir.



Şekil 6

Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyodu π olduğundan

$$y = a \tan kx \text{ ve } y = a \cot kx \quad k > 0$$

Fonksiyonları için kx değeri 0’dan π ’ye değiştiğinde bir periyodu tamamlar, yani, $0 \leq kx \leq \pi$ veya $0 \leq x \leq \pi/k$ ’dır. Bu yüzden x için $0 \leq x \leq \pi/k$ arasında tam bir periyot tamamlamaktadırlar ve her biri için periyot π/k ’dır.

Tanjant ve Kotanjant Eğrileri

$$y = a \tan kx \quad \text{ve} \quad y = a \cot kx \quad (k > 0)$$

Fonksiyonlarının Periyotları π/k ’dır.

Bu grafiklerden tam bir periyot çizmek için dikey asimptotlar arasında bir aralık seçmek uygundur:

Bir periyotlu $y = a \tan kx$ ’in grafiğini çizmek uygun aralık $\left(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}\right)$ ’dır.

Bir periyotlu $y = a \cot kx$ ’in grafiğini çizmek uygun aralık $\left(0, \frac{\pi}{k}\right)$ ’dır.

Örnek 2: Tanjant Eğrilerinin Grafiğini Çizme

(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

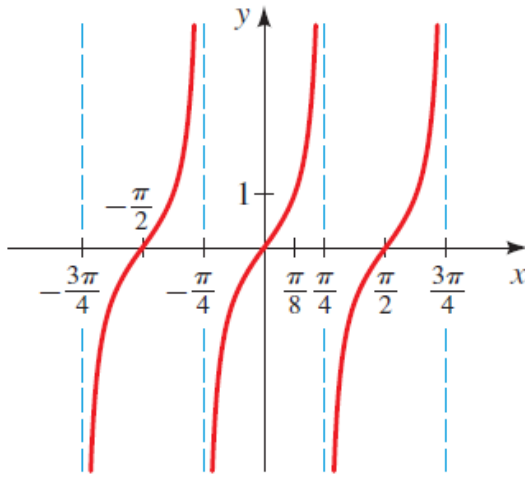
Çözüm: a) Periyot $(\pi/2)$ ve uygun aralık $(-\pi/4, \pi/4)$ 'tür. $x = -\pi/4$ ve $x = \pi/4$ noktaları düşey asimptotlardır. Fonksiyonun bir periyotlu grafiği $(-\pi/4, \pi/4)$ aralığında olur. Grafiğin tanjant fonksiyonu ile aynı şekli vardır, ancak 0.5 oranında yatay olarak büzülmüştür. Ardından, grafiğin bu kısmını sola ve sağa yineliyoruz. (bkz. Şekil 7 (a)).

b) Grafik, bölüm (a) 'daki ile aynıdır, ancak Şekil 7 (b)' de gösterildiği gibi sağa tarafa $\pi/4$ kadar ötelenmiştir.

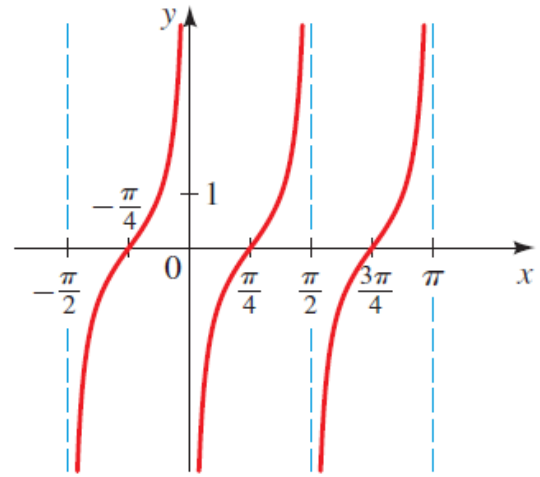
$\tan x$ fonksiyonunun periyodu $(-\pi/2, \pi/2)$ olduğundan;

Periyot Başlangıcı	Periyot Bitişi
$2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$	$2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$
$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$

Dolayısıyla grafiğin uygun periyodu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olur.



(a) $y = \tan 2x$



(b) $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Şekil 7

Örnek 3: Ötelenmiş Bir Kotanjant Eğrisi

$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Fonksiyon $y = a\cot k(x - b)$ formunda yazılırsa;

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

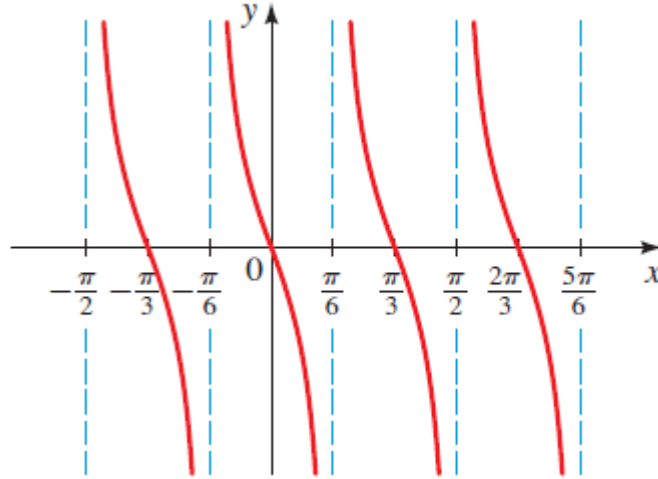
olur. Bu nedenle grafik $y = 2\cot(3x)$ ile benzerdir fakat sağa doğru $(\pi/6)$ kadar öteleme söz konusu olacaktır. $y = 2\cot(3x)$ fonksiyonunun periyodu $(\pi/3)$ 'tür. Arzu edilen grafiğin periyodu $(\pi/6)$ kadar ötelenmiş aralık olacaktır. Bu yüzden istenilen aralık;

$$\left(0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

elde edilir. Periyodu bulmanın başka bir yöntemi de aşağıdaki gibidir. $y = \cot(x)$ fonksiyonunun periyodu π olduğundan $3x - \frac{\pi}{2}$ değeri de 0 ile π arasında değişir;

Periyot Başlangıcı: $3x - \frac{\pi}{2} = 0$ $3x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}$	Periyot Bitişi: $3x - \frac{\pi}{2} = \pi$ $3x = \frac{3\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{2}$
--	---

Son olarak bir periyotlu $(\pi/6, \pi/2)$ aralığında ötelenmiş kotanjant grafiği aynı oranda sağa ve sola doğru yinelenerek Şekil 8'de çizilmiştir.



Şekil 8

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

▼ Kosekant ve Sekant Dönüşümlerinin Grafikleri

Kosekant ve sekant fonksiyonlarının sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının çarpmaya göre tersleri olduğunu gözlemlemiştik. Böylece, aşağıdaki sonuç sinüs ve kosinüs eğrileri için bölüm 5.3'deki sonuç karşılığı olur.

Kosekant ve Sekant Eğrileri

$$y = a \csc kx \quad \text{ve} \quad y = a \sec kx \quad (k > 0)$$

$2\pi/k$ periyotludurlar.

Bu eğrilere uygun tam bir periyot $[0, 2\pi/k]$ aralığıdır.

Örnek 4: Kosekant Eğrilerinin Grafiğini Çizme

a) $y = \frac{1}{2} \csc 2x$ b) $y = \frac{1}{2} \csc \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$ fonksiyonlarını çiziniz.

Çözüm: a) Periyot $\frac{2\pi}{2} = \pi$ olup uygun aralık $[0, \pi]$ 'dir. $\sin 2x = 0$ olduğu noktalar düşey asimptot noktaları olur. Dolayısıyla asimptotlar $x = 0$ ve $x = \pi/2$ 'dir. Bu bilgidен hareketle grafik $[0, \pi]$ aralığında kosekant fonksiyonu ile aynı şekilde olur. Grafiğin tam kısmı Şekil 9(a) da bir periyotlu grafiğin sağa ve sola aynı oranda ötelenmesi ile elde edilmiştir.

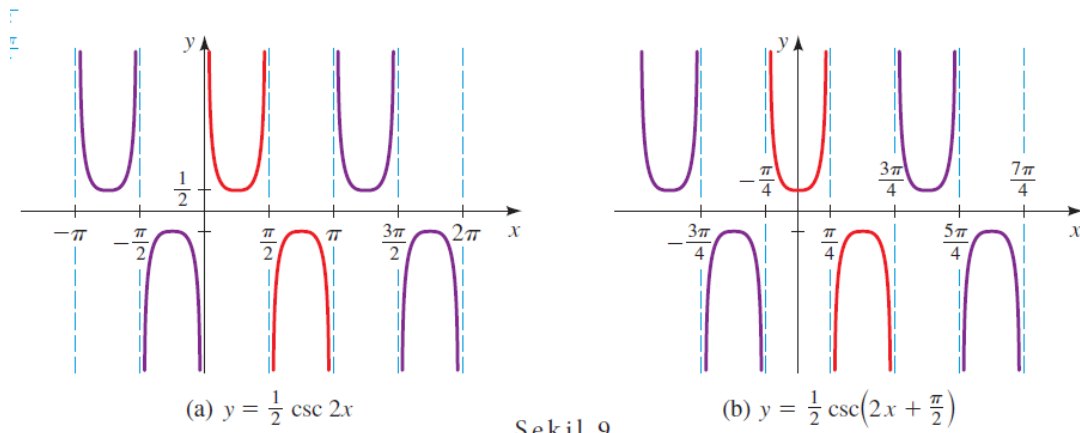
Başlangıç Periyodu: Bitiş Periyodu:

$$\begin{array}{ll} 2x + \frac{\pi}{2} = 0 & 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} & 2x = \frac{3\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} & x = \frac{3\pi}{4} \end{array}$$

b) $y = \frac{1}{2} \csc \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \csc 2 \left(x - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$

yazıldığında a seçeneğinde olduğu gibi grafik aynı biçimde çizilir fakat, grafik sola $(\pi/4)$ kadar ötelenmiştir. Grafik,

Şekil 9(b)'de gösterilmiştir. Kosekant fonksiyonu 2π periyotlu olduğundan $2x + \frac{\pi}{2}$ değeri 0 ile 2π arasında değişir. Bunun için başlangıç ve bitiş periyotları sırasıyla $(-\pi/4)$ ve $(3\pi/4)$ olur.

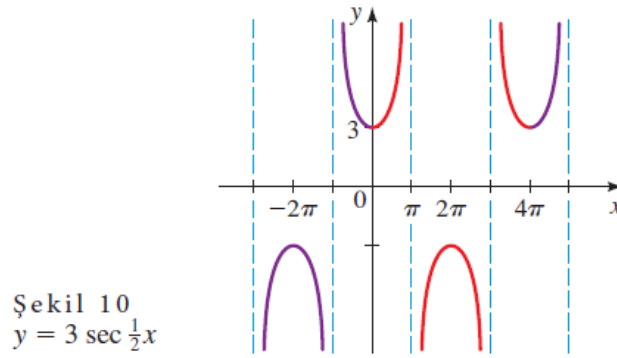


Şekil 9

Örnek 5: Bir Sekant Eğrisinin Grafiğini Çizme

$y = 3\sec \frac{1}{2}x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Periyot $2\pi \div 1/2 = 4\pi$ olup uygun aralık $[0,4\pi]$ 'dir. $\cos \frac{1}{2}x = 0$ olduğu noktalar düşey asimptot noktaları olur. Böylece aralıktaki asimptotlar $x = \pi$ ve $x = 3\pi$ 'dir. Bu bilgiyle grafik $[0,4\pi]$ aralığında bir periyotlu sekant eğrisine benzerdir. Şekil 10'da grafiğin tam kısmı sola ve sağa doğru aynı oranda yinelenerek elde edilmiştir.



5.5 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar ve Grafikleri

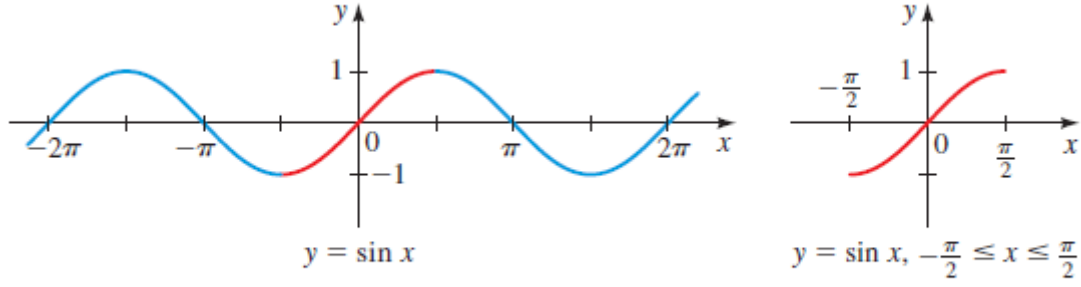
Ters Sinüs Fonksiyonu ► Ters Kosinüs Fonksiyonu ► Ters Tanjant Fonksiyonu ► Ters Sekant, Kosekant ve Kotanjant Fonksiyonları

Bölüm 2.7'den hatırlayacağınız gibi bir fonksiyonun tersinin f' 'nin kuralını tersine çeviren bir fonksiyon (f^{-1}) olduğuna dikkat edin. Bir fonksiyonun tersi olabilmesi için mutlaka bire bir olması gerekir. Trigonometrik fonksiyonlar birebir olmadıklarından tersleri yoktur. Bununla birlikte, trigonometrik fonksiyonların tanım kümesi, birebir olacak bir şekilde kısıtlamak mümkündür.

▼ Ters Sinüs Fonksiyonu

Önce sinüs fonksiyonunu değerlendirelim. Yeni fonksiyonun bire bir olmasını sağlamak için sinüs fonksiyonunun tanım kümesini kısıtlamanın birçok yolu vardır. Bunu yapmanın doğal yolu, tanım kümesini $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığına kısıtlamaktır. Bu seçimin nedeni, bu aralıktaki

fonksiyon değerlerinin tanım kumesindeki her bir eleman ile eğleşmesidir. Şekil 1 ‘den, sinüsün bu kısıtlanmış aralık üzerinde birebir (Yatay Çizgi Testi ile) olduğunu ve bunun tersinin var olduğunu görüyoruz.



Şekil 1 Sinüs Fonksiyonu ve kısıtlanmış Sinüs Fonksiyonu

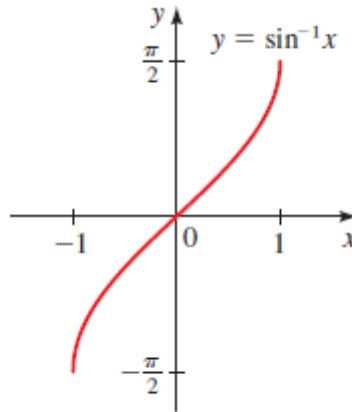
Şimdi sınırlandırılmış tanım kumesinde ters sinüs fonksiyonunu tanımlayalım. Şekil 2 ‘de $y = \sin^{-1} x$ (ters sinüs fonksiyonu) grafiği gösterilmiştir. Bu $y = \sin x$ grafiğinin $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ aralığında $y = x$ doğrusuna göre yansıması(simetrisi) alınarak elde edilir.

Ters Sinüs Fonksiyonunun Tanımı:

Ters sinüs fonksiyonu $\sin^{-1}$ tanım kümesi $[-1,1]$ ve görüntü kümesi $[-\pi/2, \pi/2]$ olup,

$$\sin^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x$$

biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Ters sinüs fonksiyonu **arcsine** (okunuşu: *arksinüs*) fonksiyonu olarak da bilinir ve **arcsin** ile gösterilir.



Ş e k i l 2 $y = \sin^{-1} x$ Grafiği

Dolayısıyla $y = \sin^{-1} x$, sinüsü x olan $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığındaki bir sayıdır. Başka bir değişle $\sin(\sin^{-1} x) = x$ 'dir. Aslında, bölüm 2.7'de incelenen ters fonksiyonların genel özelliklerinden, aşağıdaki sadeleşme özelliklerine sahibiz;

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{için} \quad \sin(\sin^{-1} x) = x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{için} \quad \sin^{-1}(\sin x) = x$$

Örnek 1: Ters Sinüs Fonksiyonu Değerinin Bulunması

Aşağıda verilenlerin her birinin değerini bulunuz.

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

Çözüm: a) $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında sinüsü $\frac{1}{2}$ olan açı değeri $\pi/6$ 'dır. Dolayısıyla $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/6$ 'dır.

b) $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında sinüsü $-\frac{1}{2}$ olan açı değeri $-\pi/6$ 'dır. Dolayısıyla $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6$ 'dır.

c) $\frac{3}{2} > 1$ olduğundan bu değer $\sin^{-1} x$ in tanım kümesinde yer almaz. Dolayısıyla $\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ tanımlı değildir.

Örnek 2: Hesap Makinesi Kullanarak Ters Sinüs Değeri Bulma

Yaklaşık olarak a) $\sin^{-1}(0.82)$ b) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: Bu yaklaşık değerler hesap makinelerinde $\boxed{SIN^{-1}}$ veya $\boxed{INV} \boxed{SIN}$ veya $\boxed{ARC} \boxed{SIN}$ tuşları kullanılarak (radyan modda hesap makinesi ile) hesap edilir

(a) $\sin^{-1}(0.82) \approx 0.96141$ (b) $\sin^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.33984$

Örnek 3: Ters Sinüslü İfadelerin Değerlerini Bulma

(a) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: a) $\sin \pi/3$ değeri $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında yer alır. Bu yüzden aşağıda sadeleşme özelliğini kullanabiliriz;

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{Sadeleşme özelliği: } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

b) Önce parantez içindeki ifade bulunur;

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{Eşiti}$$

$$= \frac{\pi}{3} \quad \text{Çünkü } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

☒ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ olduğunda $\sin^{-1}(\sin x) = x$ olur ☒

▼ Ters Kosinüs Fonksiyonu

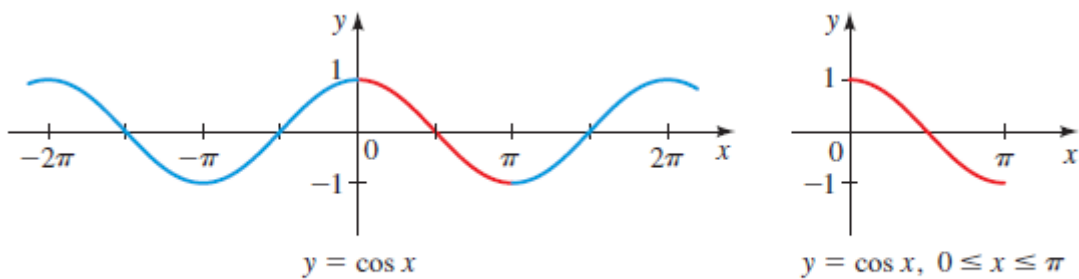
Kosinüs Fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \pi]$ aralığına kısıtlanırsa, ortaya çıkan fonksiyon bire bir olup tersi mevcut olur(bkz. Şekil 3).

Ters Kosinüs Fonksiyonunun Tanımı:

Ters kosinüs fonksiyonu $\cos^{-1}$ tanım kümesi $[-1, 1]$ ve görüntü kümesi $[0, \pi]$ olup,

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Ters kosinüs fonksiyonu **arccosine** (okunuşu: *arkosinüs*) fonksiyonu olarak da bilinir ve **arccos** ile gösterilir.



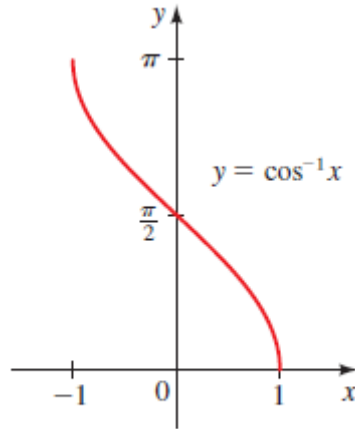
Şekil 3 Kosinüs Fonksiyonu ve Kısıtlanmış Kosinüs Fonksiyonu

Dolayısıyla $y = \cos^{-1} x$, kosinüsü x olan $[0, \pi]$ aralığındaki bir sayıdır. Ters fonksiyonların sadeleşme özelliklerinden;

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{için} \quad \cos(\cos^{-1} x) = x$$

$$0 \leq x \leq \pi \quad \text{için} \quad \cos^{-1}(\cos x) = x$$

Şekil 4'te $y = \cos^{-1} x$ (ters kosinüs fonksiyonu) grafiği gösterilmiştir. Bu $y = \cos x$ grafiğinin $0 \leq x \leq \pi$ aralığında $y = x$ doğrusuna göre yansıması(simetrisi) alınarak elde edilir.



Şekil 4 $y = \cos^{-1} x$ Grafiği

Örnek 4: Ters Kosinüs Fonksiyonu Değerinin Bulunması

Aşağıda verilenlerin her birinin değerini bulunuz.

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}(0)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

Çözüm: a) $[0, \pi]$ aralığında kosinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan değer $\pi/6$ 'dır. Dolayısıyla $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi/6$ 'dır.

b) $[0, \pi]$ aralığında kosinüsü 0 olan değer $\pi/2$ 'dir. Dolayısıyla $\cos^{-1}(0) = \pi/2$ 'dir.

c) π 'nin hiçbir rasyonel katının kosinüs $5/7$ değeri olmadığından hesap makinesi(radyan moddaki) yardımıyla bu değer yaklaşık olarak hesap edilebilir;

$$\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) \approx 0,77519$$

Örnek 5: Ters Kosinüslü İfadelerin Değerlerini Bulma

(a) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: a) $\cos(2\pi/3)$ değeri $[0, \pi]$ aralığında olduğu için aşağıdaki sadeleşme özelliğini kullanabiliriz;

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{Sadeleşme Özelliği: } 0 \leq \frac{2\pi}{3} \leq \pi$$

b) Önce parantez içindeki ifade bulunur;

$$\begin{aligned} \cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right) &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) & \text{Eşiti} \\ &= \frac{\pi}{3} & \text{Çünkü } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\square$ $0 \leq x \leq \pi$ olduğunda $\cos^{-1}(\cos x) = x$ olur $\square$

▼ Ters Tanjant Fonksiyonu

Bire bir fonksiyon elde edebilmek için tanjant fonksiyonunun tanım kümesi $(-\pi/2, \pi/2)$

Ters Tanjant Fonksiyonunun Tanımı:

Ters tanjant fonksiyonu $\tan^{-1}$ tanım kümesi $\mathbb{R}$ (tüm reel sayılar) ve görüntü kümesi $(-\pi/2, \pi/2)$ olup,

$$\tan^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

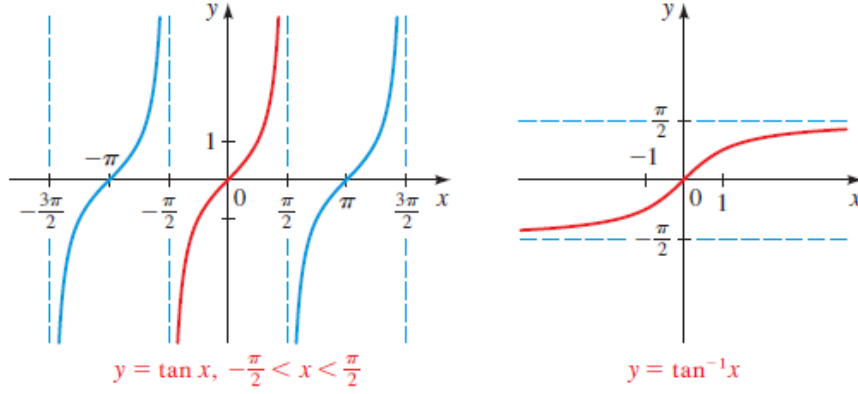
biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Ters tanjant fonksiyonu **arctangent** (okunuşu: *ark tanjant*) fonksiyonu olarak da bilinir ve **arctan** ile gösterilir.

aralığına kısıtlamak yeterli olur.

Dolayısıyla $y = \tan^{-1} x$, tanjantı x olan $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığındaki bir sayıdır. Ters fonksiyonların sadeleşme özelliklerinden;

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \quad & \text{için} \quad \tan(\tan^{-1} x) = x \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad & \text{için} \quad \tan^{-1}(\tan x) = x \end{aligned}$$

Şekil 5'te $y = \tan x$ ve $y = \tan^{-1} x$ (ters tanjant fonksiyonu) grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5 Kısıtlanmış tanjant fonksiyonu ve ters tanjant fonksiyonu

Örnek 6: Ters Tanjant Fonksiyon Değerinin Bulunması

Aşağıda verilenlerin her birinin değerini bulunuz.

(a) $\tan^{-1}(1)$ (b) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (c) $\tan^{-1}(20)$

Çözüm: a) $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında tanjantı 1 olan değer $\pi/4$ 'tür. Dolayısıyla $\tan^{-1}(1) = \pi/4$ 'tür.

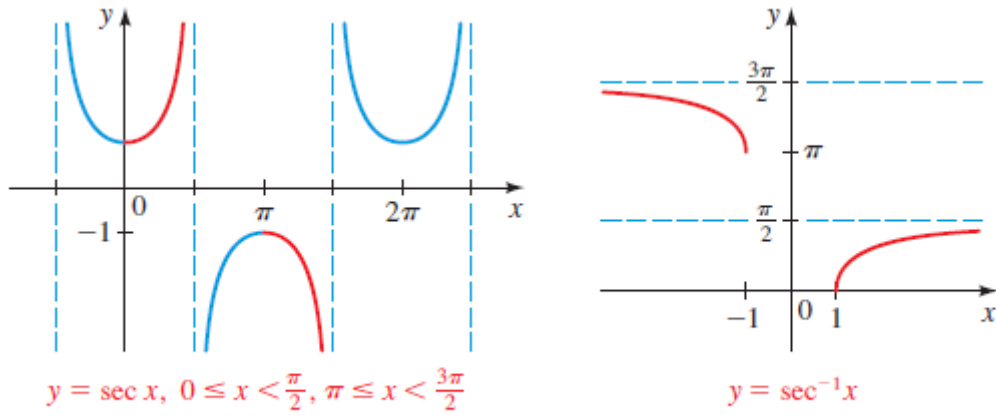
b) $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında tanjantı $\sqrt{3}$ olan değer $\pi/3$ 'tür. Dolayısıyla $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3$ 'tür.

c) Hesap makinesi(radyan moddaki) yardımıyla bu değer yaklaşık olarak hesap edilebilir;

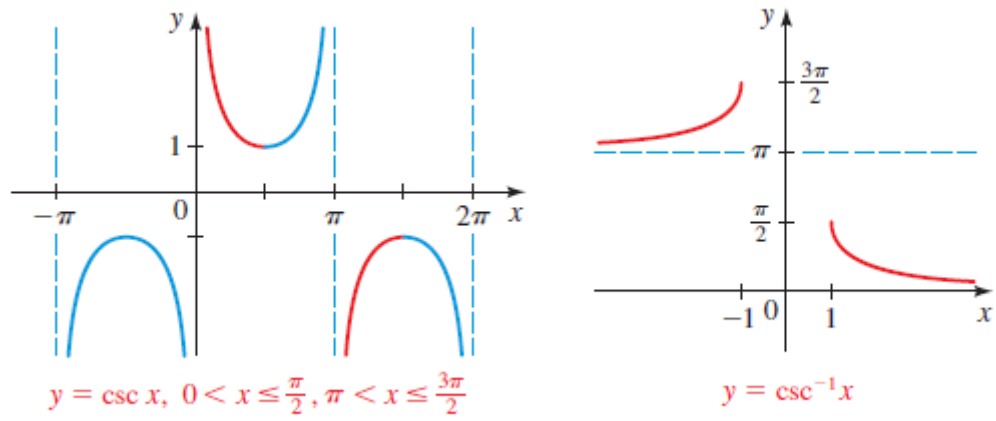
$$\tan^{-1}(20) \approx -1.52084$$

▼ Ters Sekant, Kosekant ve Kotanjant Fonksiyonları

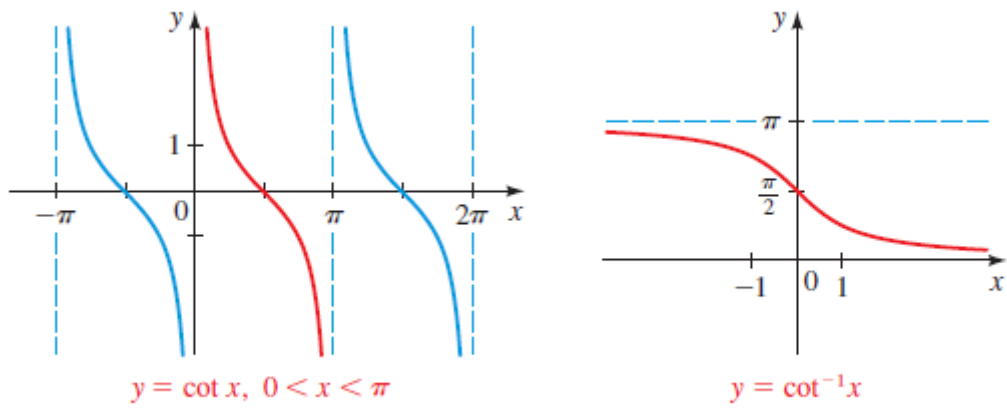
Sekant, kosekant ve kotanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını tanımlamak için, her fonksiyonun tanım kümesini, bu fonksiyonlar üzerinde birebir ve bütün değerlerine erişen bir kümeye yeniden kısıtlıyoruz. Bu kriterleri karşılayan herhangi bir aralık uygun olmasına rağmen, tanım kümelerini ters trigonometrik fonksiyonları içeren işaret hesaplamaların seçimini basitleştirecek şekilde kısıtlamayı seçiyoruz. Yaptığımız seçenekler analiz için de uygundur. Bu sekant ve kosekant fonksiyonlarının tanım kümelerindeki görünüşte garip kısıtlamayı açıklıyor. Bu bölümü sekant, kosekant ve kotanjant fonksiyonlarının kısıtlı tanım kümelerine ait grafikleri ve ters fonksiyonlarının grafikleriyle göstererek bitiriyoruz (bkz. Şekil 6-8).



Şekil 6 Ters Sekant Fonksiyonu



Şekil 7 Ters Kosekant Fonksiyonu



Şekil 8 Ters Kotanjant Fonksiyonu